الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية تيزي وزو
الشعبة : 3 رياضيات

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي
ثانوية العقيد أوعمران أعمر - فريقات
دورة : ماي 2022

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : 05 نقاط

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $2021x-1442y=11$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ) بين أن العددان 2021 و 1442 أوليان فيمابينهما ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب) باستعمال خوارزمية إقليدس عين $(x_0\,;y_0)$حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$.

ج) عين جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $|y-x-581|\leq 579$

2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 5^n و 7^n على 11 .

ب) جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2020^{2022^{1442}}$ على 11 .

ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $2\times 2020^{10n+1}+3n+1$ قابلا للقسمة على 11

د) λ عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 5 كمايلي : $\overline{22\ldots.222\ldots.22}$ حيث 2 مكرر 2020 مرة

- جد باقي قسمة 2λ على 11 .

- عين جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $2020^{x-1}+2018^y+9\equiv 0[11]$

التمرين الثاني : 04 نقاط

1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0\in\,]0;1[$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=\frac{1}{\pi}u_n+\frac{\pi-1}{\pi}$$

أ – برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0\leq u_n\leq 1$

ب – بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $v_0=\frac{2\pi-1}{2\pi}$ و من أجل كل عدد طبيعي n $v_n=u_n-1$

أ – برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{\pi}$

ب – أكتب عبارة v_n بدلالة n .

ج - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\frac{1}{\pi^n}-\frac{1}{2\pi^{n+1}}$

د - استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) نضع : $S_n=u_0+u_1+\cdots\ldots\ldots+u_n$ ، أحسب S_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

التمرين الثالث : 4 نقاط

يحتوي كيس غير شفاف على كريتين بيضاوين و n كرية سوداء حيث $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$

(الكريات متماثلة لانميز بينها باللمس)

1) نعتبر أن $n = 5$ نسحب عشوائيا من هذا الكيس ثلاث كريات في آن واحد .

نعتبر الحدثين : A : " سحب ثلاث كريات مختلفة اللون " ، B : " سحب كرية بيضاء واحدة على الأكثر "

- أحسب $P(A)$ احتمال الحدث A ثم بين أن : $P(B) = \frac{6}{7}$

2) نعيد الكيس إلى حالته الإبتدائية و نسحب عشوائيا كريتان على التوالي دون إرجاع .

نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) أنقل وأكمل الجدول التالي مع التبرير :

$X = x_i$	...	1	...
$P(X = x_i)$	$\frac{n^2 - n}{(n+2)(n+1)}$	...	...

ج) بين أن الأمل الرياضياتي $E(X) = \frac{4}{n+2}$

التمرين الرابع : 7 نقاط

/I g الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

1) أ- بين أن الدالة g متناقصة تماما على $[0; +\infty[$

ب - حدد إشارة الدالة g على $[0; +\infty[$

/II f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^{x})$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1) أ- أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .

ب - تحقق أنه من أجل كل حقيقي x : $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1 + e^{-x})$

ج - أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .

2) أ- أحسب $f'(x)$ ثم عبر عن $f'(x)$ بدلالة $g(e^x)$.

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أنشئ (C_f) .

III) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ و (C_F) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

1) أ- تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $F(x)$.

2) أ- تحقق أن : $F(x) = x + 2ln2 - f(x) - \ln(1 + e^x)$

ب- أحسب نهايات الدالة F عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ج- أحسب $\lim_{x \to -\infty} [F(x) - x]$ واستنتج أن (C_F) يقبل مستقيم مقارب (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته .

3) شكل جدول تغيرات الدالة F .

4) باستعمال إشارة الدالة g ، عين الوضع النسبي لـ (C_F) و (Δ) .

5) أنشىء في المعلم السابق المنحنى (C_F) .

6) أ- عبر بدلالة العدد e عن مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = -1$

ب - أعط قيمة مقربة إلى 10^{-2} لهذه المساحة .

7) نضع $u_n = \int_{n-1}^{n} f(x)dx$ مع n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 1

أ) أحسب المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots \ldots \ldots . + u_n$

ب) أحسب $\lim_{n \to +\infty} S_n$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : 4 نقاط (الأسئلة 1 ، 2 و 3 مستقلة فيما بينها)

1) نعتبر α عددا طبيعيا أكبر تماما من 5 و n عدد طبيعي يكتب من الشكل $\overline{4452}$ في نظام التعداد ذي الأساس α و يكتب من الشكل $\overline{2020}$ في نظام التعداد ذي الأساس $\alpha + 2$

أ) بين أن $\alpha\,(2\alpha^2 - 8\alpha - 21) = 18$

ب) استنتج قيمة α ، ثم أكتب العدد $2n$ في النظام العشري .

ج) نفرض أن $\alpha = 6$ ، أكتب العدد $2n$ في النظام ذي الأساس 6 .

2) a و b عددان طبيعيان حيث $a > b$ نضع $d = PGCD(a;b)$

أ) برهن أن $d = PGCD(a-b;b)$

ب) استنتج $PGCD(437;323)$ و $PPCM(437;323)$

3) عين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة و التي تحقق $\begin{cases} xy = 24 \\ m^2 + d^2 = 148 \end{cases}$

حيث $d = PGCD(x;y)$ و $m = PPCM(x;y)$

التمرين الثاني : 4 نقاط

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = \int_{-1}^{1} \left(\frac{2|x|}{3} + \frac{e^{-2n|x|}}{3}\right)\, dx$

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n > 0$

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n = 2\int_{0}^{1} \left(\frac{2x}{3} + \frac{e^{-2nx}}{3}\right)\, dx$

3) أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}\int_0^1 (\,1 - e^{2x})\left(e^{-2(n+1)x}\right)dx$

4) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وبين أنها متقاربة .

5) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث :

يحتوي كيس U على 9 كريات لانفرق بينهما باللمس، من بينها ثلاثة بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 و اثنان حمراء تحمل الأرقام 2 ، 3 و أربعة سوداء اللون تحمل الأرقام 1 ، 3 ، 3 ، 3 .

نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في آن واحد .

1) أحسب احتمال الحوادث التالية : E : " الحصول على 3 كريات من نفس اللون "

F : " الحصول على كرية تحمل على الأكثر رقما فرديا "

G : " الحصول على 3 كريات تحمل عددا أوليا من كل لون "

2) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس

أ - عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي.

ب - استنتج $E(2022X + 1443)$

3) نعتبر الآن الكيس الأول U وكيسا آخر V يحوي كرية بيضاء وكرتين حمراوين وثلاث كرات صفراء، نرمي مرة واحدة زهرة نرد متوازنة مرقمة من 1 إلى 6

- إذا ظهر الرقم 4 نسحب كرية واحدة من الكيس U وإلا فنسحب كرتين في آن واحد من الكيس الثاني V.

أ) نعتبر الحدث B : " سحب كرية بيضاء على الأقل " . بين أن $P(B) = \frac{1}{3}$

ب) إذا سحبنا كرية بيضاء على الأقل، ماهو احتمال أن تكون من الكيس الثاني V ؟

التمرين الرابع:

I/ g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$

1) أ - أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

ب – تحقق أن: $g(0) = 0$ ثم استنتج إشارة الدالة g .

II/ f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = x + 1 - \ (x^2+1)\, e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1) أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$

ب – استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

ج – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x\left[1 + \frac{1}{x} - \left(x + \frac{1}{x}\right)e^x\right]$

د - بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) أ - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = x + 1$ بجوار $-\infty$.

ب – أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (Δ) .

3) أ - برر قابلية اشتقاق الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f .

ب – أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) - بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

5) أنشئ المنحنى (C_f) و (Δ) . (نأخذ $f(-3) \approx -2{,}5$ و $f(-1) \approx -0{,}7$)

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد وإشارة حلول المعادلة: $(x^2+1) = (1-m)e^{-x}$

7) أ – بين أن الدالة $H: x \to (x-1)e^x$ دالة أصلية للدالة $h: x \to xe^x$ على $\mathbb{R}$

ب – بين أن $\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$

ج – باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $\int_{-1}^{0} (x^2+1)\, e^x\, dx = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$

د - أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ، والمستقيمين ذو المعادلتين $x = -1$ و $x = 0$