

مديرية التربية لولاية المسيلة
ثانوية :
دورة ماي : 2018

وزارة التربية الوطنية
امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي
الشعبة : تسيير واقتصاد

المدة : 3 سا و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول :

التمرين الأول: (4 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}$

(1) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 3$.

(ب) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 3$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

(ب) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n .

(ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$ ، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n و S'_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر كثير الحدود $P(x)$ حيث : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 15x + 18$

(1) احسب $P(2)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

حيث a و b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما .

(3) حل في \mathbb{R} المعادلة $P(x) = 0$.

(4) استنتج حلول المعادلتين :

(أ) $2e^{3x} - e^{2x} - 15e^x + 18 = 0$

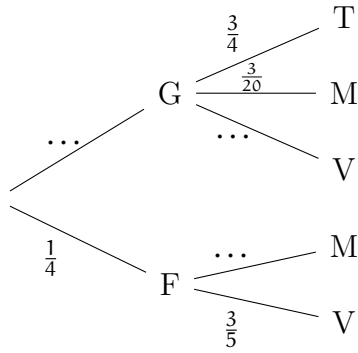
(ب) $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 15(\ln x) + 18 = 0$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

في تجربة عشوائية مُنمذجة بشجرة الاحتمالات التالية :

(1) انقل الشجرة المقابلة على ورقة إجابتك ثم أتممها.

(2) أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة :



$$P_G(V) = \frac{1}{10} \quad (أ)$$

$$P(G \cap T) = \frac{3}{4} \quad (ب)$$

$$P(M) = \frac{11}{20} \quad (ج)$$

$$P_M(G) = \frac{9}{17} \quad (د)$$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ، كما يلي : $g(x) = -3 + 3x^3 + 6 \ln x$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) أحسب $g(1)$ و استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 3x - 3 - \frac{3 \ln x}{x^2}$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. (يعطى : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$)

(2) بيّن أنّ من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(3) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 3x - 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

(4) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(5) انشئ (C_f) و (Δ) .

(6) نعتبر الدالة F المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $F(x) = -3 \left(\frac{1 + \ln x}{x} \right)$.

(أ) بيّن أنّ الدالة F أصلية للدالة $x \mapsto \frac{3 \ln x}{x^2}$ على المجال $]0; +\infty[$.

(ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x = 1$ ، $x = e$ و محور الفواصل .

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0 = -2$. ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

(I) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = u_n + \alpha$ ، حيث α عدد حقيقي غير معدوم .

(1) عيّن قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 .

(II) نعتبر في كل مما يلي : $\alpha = 3$.

(1) أكتب u_n و v_n بدلالة n .

(2) أحسب بدلالة n المجموع S_n و S'_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(3) لتكن المتتالية (w_n) المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = \ln(v_n)$.

(ا) بيّن أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها .

(ب) استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = (2)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لتفسير ارتفاع درجة حرارة الغلاف الجوي (الاحتباس الحراري)، تم قياس متوسط درجة الحرارة السنوية لكوكب الأرض بين السنتين 1974 و 1998 ، سجّلت النتائج في الجدول أدناه:

السنة	1974	1978	1982	1986	1990	1994	1998
رتبة السنة x_i	4	8	12	16	20	24	28
درجة الحرارة المئوية y_i	19.12	19.70	19.62	20	20.60	20.88	20.92

(1) مثلّ سحابة النقط المرفقة بالسلسلة الإحصائية $M(x_i; y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O(0; 18)$.
(وحدة الرسم : 1 cm لكل سنتين على محور الفواصل و 5 cm لكل درجة واحدة على محور الترتيب).

(2) جد إحداثيي النقطة المتوسطة G لهذه السلسلة ثم علّمها .

(3) بيّن أن معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا لهذه السلسلة هي : $y = 0.078x + 18.872$.
ثم أرسمه .

(4) (ا) بقراءة بيانية ، قدّر درجة الحرارة في سنة 2005 .

(ب) باستعمال التعديل السابق ، في أيّ سنة ستتجاوز درجة الحرارة 22.5 درجة مئوية؟

التمرين الثالث: (04 نقاط)

تتكون باقة زهور من ثلاث زهرات حمراء (R) وزهرتين صفراوين (J) . نختار عشوائيا على التوالي زهرتين من الباقة وبدون ارجاع .

(1) مثل هذه الوضعية بشجرة احتمالات .

(2) احسب احتمال الحوادث التالية :

(أ) A : حادثة "الحصول على زهرتين حمراوين" .

(ب) B : حادثة "الحصول على زهرتين مختلفتين في اللون" .

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل مخرج (نتيجة) عدد الزهرات الصفراء المختارة.

(أ) ماهي قيم X .

(ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي والتباين .

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(1) g دالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R}

$$g(x) = -1 + (x - 1)e^x \text{ : كما يلي}$$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الرسم المقابل)

(أ) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g .

(ب) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.2 < \alpha < 1.3$

(ج) استنتج اشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(2) f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = \frac{2x}{e^x + 1}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى

معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$ ، ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسرها بيانيا .

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x]$ فسر بيانيا النتيجة .

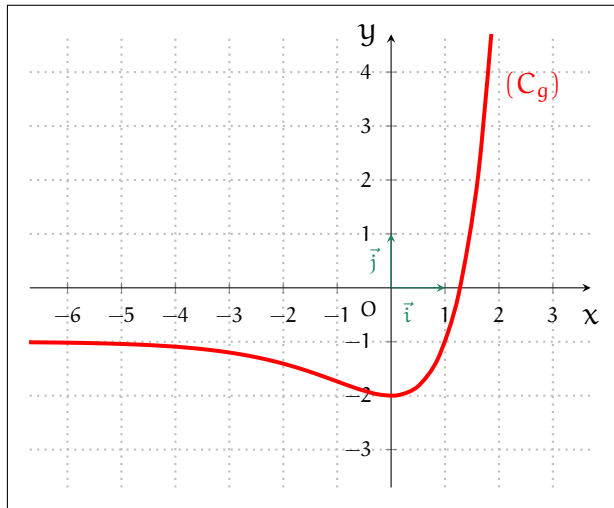
(ج) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x$.

(د) بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{-2g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول

تغيراتها .

(هـ) انشئ (Δ) و (C_f) .

(3) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واطارة حلول المعادلة : $f(x) = m$



ج) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$
 لدينا $u_n = v_n + 3$ ومنه $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$$

$$= 3 \quad \text{لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

(3) حساب المجموع S_n : S_n هو مجموع حدود المتتالية الهندسية v_n أي :

$$S_n = v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = \left(\frac{1 - \frac{1}{2}^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1 - \frac{1}{2}^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2}^{n+1} \right)$$

حساب المجموع S'_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= v_0 + 3 + v_1 + 3 + \dots + v_n + 3 \\ &= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{n+1 \text{ مرة}} \\ &= S_n + 3(n+1) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2}^{n+1} \right) + 3(n+1) \end{aligned}$$

التمرين الثاني :

$P(x)$ كثير حدود حيث : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 15x + 18$

(1) حساب $P(2)$: $P(2) = 2(2)^2 - 2^2 - 15 \times 2 + 18 = 0$:

(2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$ باستعمال النشر والتبسيط :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c \\ &= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -1 \\ -2c = 18 \end{cases}$$

بالمطابقة مع العبارة : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 15x + 18$ نجد :

$b - 2a = -1$ معناه $b = -1 + 2a$ أي $b = 3$ ،
 $-2c = 18$ معناه $c = -9$ ،
 ومنه $a = 2$ ، $b = 3$ ، $c = -9$ ،

أو باستخدام القسمة الاقليدية :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 15x + 18 & x - 2 \\ -2x^3 + 4x^2 & \\ \hline 3x^2 - 15x & \\ -3x^2 + 6x & \\ \hline -9x + 18 & \\ 9x - 18 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه $P(x) = (x-2)(2x^2 + 3x - 9)$

(3) حل المعادلة $P(x) = 0$ في \mathbb{R} :

$P(x) = (x-2)(2x^2 + 3x - 9) = 0$ معناه $(x-2) = 0$ أي $x = 2$ أو $(2x^2 + 3x - 9) = 0$ نحسب المميز Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= (3)^2 - 4 \times 2 \times (-9) \\ &= 9 + 72 = 81 > 0 \end{aligned}$$

u_n متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}$.

(1) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 3$.
 نسمي الخاصية $p(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 3$.

من أجل $n = 0$: $u_0 = 4 > 3$: $p(0)$ صحيحة .
 نفرض صحة الخاصية $p(n)$ ونبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$:

$$p(n+1) = u_{n+1} > 3 : p(n+1)$$

$$. p(n+1) = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} > 3$$

لدينا $u_n > 3$ نضرب طرفي المتراجحة في $\frac{1}{2}$ ثم نضيف $\frac{3}{2}$ أي :

$$u_n > 3$$

$$\frac{1}{2}u_n > \frac{1}{2} \times 3$$

$$\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} > \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$$

$$u_{n+1} > 3$$

إذن الخاصية $p(n+1)$ صحيحة ، ومنه حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 3$.

(ب) نبرهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} - u_n \\ &= \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{2}u_n + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ندرس إشارة الفرق باستعمال $u_n > 3$ ، بضرب طرفي المتراجحة في $-\frac{1}{2}$ ثم نضيف $\frac{3}{2}$ أي :

$$-\frac{1}{2}u_n < 3 \times -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} < \frac{3}{2} - \frac{3}{2}$$

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 3 فإنها متقاربة .

(2) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $v_n = u_n - 3$.

(1) نبين أن المتتالية (v_n) هندسية مع تعيين أساسها وحدها الأول :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} - 3 \\ &= \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(u_n - 3) = \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

ومنه v_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 3 = 1$.

(ب) عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

التمرين الرابع :

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ، كما يلي : $g(x) = -3 + 3x^3 + 6 \ln x$

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :
النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3 + 3x^3 + 6 \ln x = +\infty + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -3 + 3x^3 + 6 \ln x = -\infty$$

حساب الدالة المشتقة g' :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة g' هي : $g'(x) = 9x^2 + \frac{6}{x}$

دراسة إشارة $g'(x)$:

من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $g'(x) = 9x^2 + \frac{6}{x} > 0$ ومنه :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) حساب $g(1)$: $g(1) = -3 + 3 \times 1^3 + 6 \ln 1 = 0$

استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$: من جدول التغيرات نجد :

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		-	0
			+

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$: $f(x) = 3x - 3 - \frac{3 \ln x}{x^2}$

1. حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} 3x - 3 - \frac{3 \ln x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{3 \ln x}{x^2} = -(-\infty) = +\infty \end{aligned}$$

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 3 - \frac{3 \ln x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} +\infty - 0, \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

2. نبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 - \left(\frac{3 \frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(3 \ln x)}{x^4} \right) = 3 - \left(\frac{3x - 6x \ln x}{x^4} \right) \\ &= 3 - \frac{x(3 - 6 \ln x)}{x^4} \\ &= 3 - \frac{(3 - 6 \ln x)}{x^3} = \frac{3x^3 - 3 + 6 \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $x^3 > 0$ ، فلاشارة من إشارة $g(x)$ التي درسناها

ومنه يوجد حلان للمعادلة : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{81}}{4}$ ومنه $x_1 = \frac{-3 - 9}{4} = \frac{-12}{4} = -3$

و $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 9}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

ومنه حلول المعادلة $P(x) = 0$ في \mathbb{R} هي : $S = \left\{ -3; \frac{3}{2}; 2 \right\}$

(4) استنتاج حلول المعادلتين :

$$2e^{3x} - e^{2x} - 15e^x + 18 = 0 \quad (1)$$

بوضع $X = e^x$ نجد : $2X^3 - X^2 - 15X + 18 = 0$ ومنه الحلول من

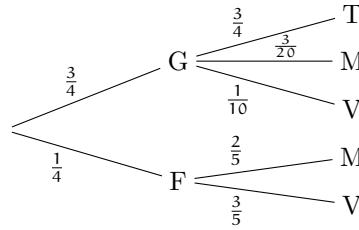
$$S = \left\{ \ln \left(\frac{3}{2} \right); \ln 2 \right\}$$

$$2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 15(\ln x) + 18 = 0 \quad (ب)$$

بوضع $\ln x = X$ نجد : $2X^3 - X^2 - 15X + 18 = 0$ ومنه الحلول من

$$S = \left\{ e^{-3}; e^{\frac{3}{2}}; e^2 \right\}$$

التمرين الثالث :



(1) اتمام الشجرة :

(2) الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير :

$$P_G(V) = \frac{1}{10} \quad (أ)$$

التبرير :

$$P(G \cap V) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{40}$$

$$P_G(V) = \frac{3/40}{3/4} = \frac{3}{40} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{10}$$

$$P(G \cap T) = \frac{3}{4} \quad (ب)$$

التبرير :

$$P(G \cap T) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \neq \frac{3}{4}$$

$$P(M) = \frac{11}{20} \quad (ج)$$

التبرير :

$$P(M) = P(F \cap M) + P(G \cap M)$$

$$\begin{aligned} P(M) &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{20} \\ &= \frac{2}{20} + \frac{9}{80} = \frac{17}{80} \neq \frac{11}{20} \end{aligned}$$

$$P_M(G) = \frac{9}{17} \quad (د)$$

التبرير :

$$P_M(G) = \frac{9/80}{17/80} = \frac{9}{17}$$

$$P_M(G) = \frac{9}{80} \times \frac{80}{17} = \frac{9}{17}$$

6. نعتبر الدالة F المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $F(x) = -3 \left(\frac{1 + \ln x}{x} \right)$.

(1) نبيّن أنّ الدالة F أصلية للدالة $\frac{3 \ln x}{x^2}$ على المجال $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -3 \left(\frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \ln x)}{x^2} \right) \\ &= -3 \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} \\ &= -3 \frac{(-\ln x)}{x^2} = \frac{3 \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

(ب) حسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = e$ ، $x = 1$ ومحور القواسل:

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x) dx &= \int_1^e \left(3x - 3 - \frac{3 \ln x}{x^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{3}{2} x^2 - 3x - (-3) \left(\frac{1 + \ln x}{x} \right) \right]_1^e \\ &= \frac{3}{2} e^2 - 3e + 3 \left(\frac{1 + \ln e}{e} \right) \\ &\quad - \left[\frac{3}{2} 1^2 - 3 \cdot 1 + 3 \left(\frac{1 + \ln 1}{1} \right) \right] \\ &= \frac{3}{2} e^2 - 3e + \frac{6}{e} - \frac{3}{2} + 3 - 3 = \frac{3}{2} e^2 - 3e + \frac{6}{e} - \frac{3}{2} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

(I) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = -2$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

(II) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n + \alpha$ ، حيث α عدد حقيقي غير معلوم.

(1) تعيين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 معناه: $v_{n+1} = 2v_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} + \alpha &= 2u_n + 3 + \alpha = 2(u_n + \alpha) \\ 2u_n + 3 + \alpha &= 2u_n + 2\alpha \\ 2\alpha - \alpha &= 3 \\ \alpha &= 3 \end{aligned}$$

(2) كتابة v_n بدلالة n :

v_n متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 3 ومنه $v_0 = u_0 + 3 = -2 + 3 = 1$ ، ومنه عبارة الحد العام: $v_n = 2^n$ لدينا: $u_n = v_n - 3 = 2^n - 3$ أي: $u_n = 2^n - 3$.

(3) حساب بدلالة n المجموع S_n ، حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \\ \text{ومنّه } S_n &= -(1 - 2^{n+1}) = 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

حساب بدلالة n المجموع S'_n ، حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= v_0 - 3 + v_1 - 3 + \dots + v_n - 3 \\ &= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - \underbrace{(3 + 3 + \dots + 3)}_{n+1 \text{ مرّة}} \\ &= S_n - 3(n+1) = 2^{n+1} - 1 - 3n - 3 \\ &= 2^{n+1} - 3n - 4 \end{aligned}$$

فيما سبق إذن:

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$f(1) = 0$	$+\infty$

3. نبيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 3x - 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 3 - \frac{3 \ln x}{x^2} - (3x - 3) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3 \ln x}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

ومنّه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 3x - 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

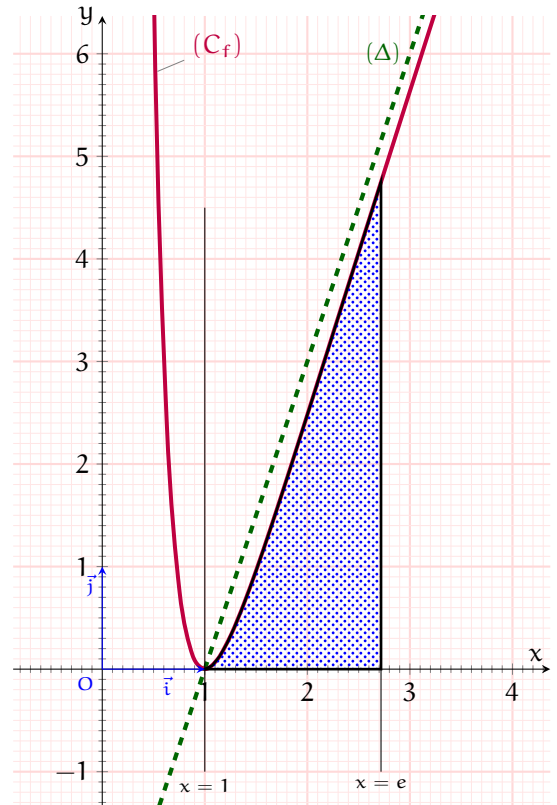
4. دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

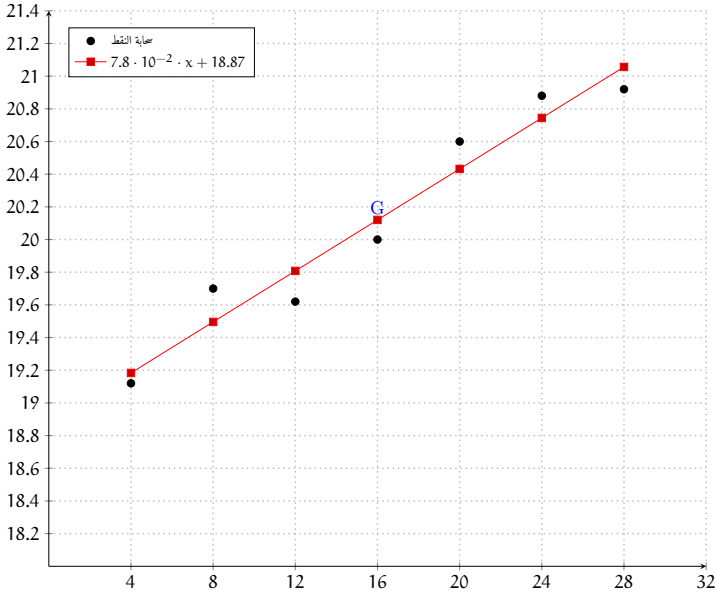
ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ أي: $f(x) - y = -\frac{3 \ln x}{x^2} = 0$ ومنه $f(x) - y = 0$ وبالتالي $x = 1$.

x	0	1	$+\infty$	
$\ln x$		-	0	+
x^2			+	
$-\frac{3 \ln x}{x^2}$		+	0	-

ومنّه (C_f) يقع أعلى (Δ) لـ $x \in]0; 1[$ و (C_f) يقع أسفل (Δ) لـ $x \in [1; +\infty[$.

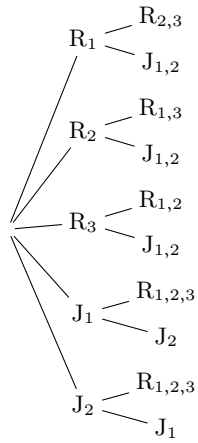
5. رسم (C_f) و (Δ) :





التمرين الثالث :

تتكون باقة زهور من ثلاث زهرات حمراء (R) وزهرتين صفراوين (J). نختار عشوائيا على التوالي زهرتين من الباقة وبدون ارجاع .



(1) تمثيل هذه الوضعية بشجرة احتمالات .

(2) حساب احتمال الحادث التالية :

(أ) A حادثة "الحصول على زهرتين حمراوين":

$$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0.3$$

(ب) B حادثة "الحصول على زهرتين مختلفتين في اللون":

$$P(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6$$

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل منحج (نتيجة) عدد الزهرات الصفراء المختارة.

(أ) قيم X: $X \in \{0; 10; 2\}$ ، حيث : $X = 0$ عدم الحصول على أي زهرة صفراء ، $X = 1$ ، الحصول على زهرة صفراء واحدة و $X = 2$ الحصول على زهرتين صفراوين.

(ب) قانون احتمال المتغير العشوائي X:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

- حساب الأمل الرياضي $E(x)$: لدينا : $E(x) = \sum_{i=2}^3 P_i \cdot x_i$ أي :

$$E(x) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5} = 0.8$$

- حساب التباين $V(x)$: لدينا : $V(x) = \left(\sum_{i=2}^3 P_i \cdot x_i^2 \right) - E^2(x)$

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$
x_i^2	0	1	4
$P_i \cdot x_i^2$	0	$\frac{3}{5} = 0.6$	$\frac{4}{10} = 0.4$

$$V(x) = 0.6 + 0.4 - (0.8)^2 = 1 - 0.64 = 0.36 \text{ ومنه}$$

(3) لتكن المتتالية (w_n) المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي n

(أ) نبين أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln(2^{n+1}) - \ln(2^n) \\ &= (n+1) \ln 2 - n \ln 2 = \ln 2 + n \ln 2 - n \ln 2 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

ومنه w_n متتالية حسابية أساسها $r = \ln 2$ وحدها الأول $w_0 = \ln(v_0) = \ln 1 = 0$

(ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n &= (2)^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ v_n &= e^{w_n} \text{ فإن } w_n = \ln(v_n) \text{ بما أن} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n &= e^{w_1} \times e^{w_2} \times \dots \times e^{w_n} \\ &= e^{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \text{ (مجموع متتالية حسابية)} \\ &= e^{\frac{n+1}{2} (w_n)} = e^{\frac{n+1}{2} (\ln(v_n))} \\ &= e^{\frac{n+1}{2} \ln(2^n)} = e^{\ln 2 \left(n \times \frac{n+1}{2} \right)} \text{ (خواص الدالة اللوغاريتمية)} \\ &= (2)^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

التمرين الثاني :

(1) تمثيل سخابة النقط المرفقة بالسلسلة الإحصائية $M(x_i; y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O(0; 18)$

(2) إحداثيي النقطة المتوسطة G لهذه السلسلة :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28}{7} = 16$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^7 19.12 + 19.70 + 19.62 + 20 + 20.6 + 20.08 + 20.92}{7} = 20.12$$

ومنه $G(16; 20.12)$

(3) معادلة مستقيم الانحدار:

$$a = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^7 x_i \cdot y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\frac{1}{7} \cdot 2288.4 - 321.92}{\frac{488}{7}} \simeq 0.078$$

$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x} = 20.12 - 0.078 \times 16 = 20.12 - 1.28 = 18.872$$

ومنه معادلة مستقيم الانحدار هي : $y = 0.078x + 18.872$

(أ) درجة الحرارة في سنة 2005: رتبة سنة 2005 هي $2005 - 1974 + 4 = 35$ ومنه : $y = 0.078 \times 35 + 18.872 = 21.602$

(ب) ستجاوز درجة الحرارة 22.5 درجة مئوية سنة : $x = \frac{y - 18.872}{0.078} = \frac{22.5 - 18.872}{0.078} \simeq 46$ ومنه $1974 + 46 = 2020$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x		+	
$-2x$	+	0	-
$-2xe^x$	+	0	-
$f(x) - 2x$	+	0	-

ومنه (C_f) يقع أعلى (Δ) و $-\infty; 0] \cup [0; +\infty[$. $x \in$ يقع أسفل (Δ) و $x \in [0; +\infty[$

(د) نبين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{-2g(x)}{(e^x + 1)^2}$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1 \cdot (e^x + 1) - e^x(x)}{(e^x + 1)^2} = 2 \cdot \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{1 + (1 - x)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{-2(-1 + (x - 1)e^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{-2g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

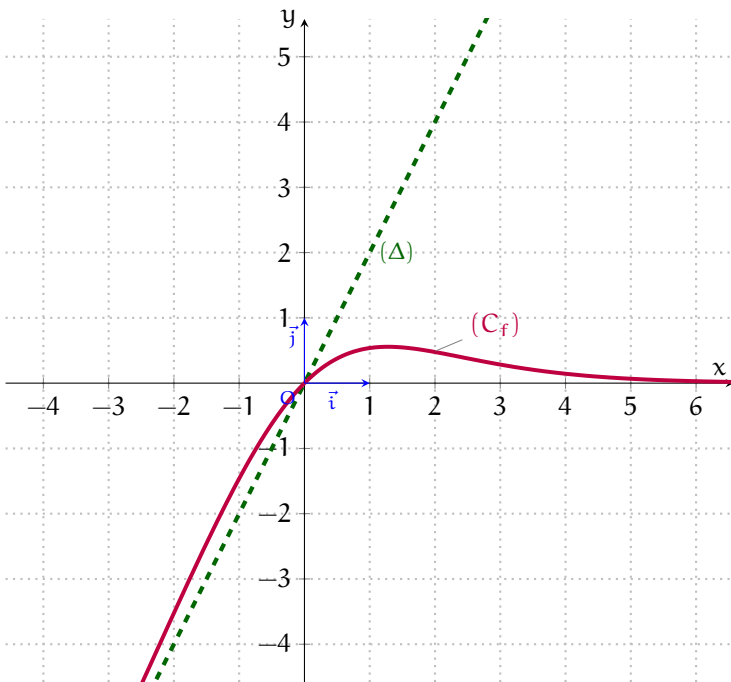
بما أن المقام موجب تماما فالإشارة من إشارة البسط ، أي عكس إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$-2g(x)$	+	0	-
$\frac{-2g(x)}{(e^x + 1)^2}$	+	0	-
f(x)	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

الدالة f متزايدة تماما على المجال $-\infty; \alpha]$ و متناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

(3) المناقشة :

على المجال $-\infty; 0]$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب . و على المجال $[0; f(\alpha)]$ المعادلة تقبل حلين موجبين ; و من أجل $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حل وحيد . و على المجال $[\alpha; +\infty[$ المعادلة لا تقبل حلا .



(1) دالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R}
 كما يلي : $g(x) = -1 + (x - 1)e^x$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}; \vec{j}; 0)$

(ا) بقراءة بيانية لشكل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g(x)	-1	-2	$+\infty$

(ب) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.2 < \alpha < 1.3$:

الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]0; +\infty[$.

$$g(1.2) = -1 + (1.2 - 1)e^{1.2} \simeq -0.34$$

$$g(1.3) = -1 + (1.3 - 1)e^{1.3} \simeq 0.1$$

$$g(1.2) \times g(1.3) < 0$$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.2 < \alpha < 1.3$

(ج) إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} : من التمثيل البياني لدينا :

- $x \in]-\infty; \alpha]$ المنحنى يقع تحت محور الفواصل ، إذن $g(x) < 0$.

- $x \in [\alpha; +\infty[$ المنحنى يقع فوق محور الفواصل ، إذن $g(x) > 0$.

ومنه جدول الإشارة يكون كالآتي :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
g(x)	-	0	+

الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = \frac{2x}{e^x + 1}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}; \vec{j}; 0)$.

(2) (ا) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \frac{2}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}}$

$$f(x) = \frac{2}{e^x + 1} = \frac{2}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = \frac{2}{+\infty + \frac{1}{+\infty}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب موازي محور الفواصل بجوار $+\infty$ لـ (C_f)

(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = \frac{2}{0 + \frac{1}{-\infty}} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x + 1} - 2x = \frac{2 - 2xe^x - 2x}{e^x + 1} = \frac{-2xe^x}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2xe^x}{e^x + 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0$$

ومنه $y = 2x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

(ج) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x$:

لدينا : $f(x) - 2x = \frac{-2xe^x}{e^x + 1}$ ، إذن $e^x > 0$ ، $e^x + 1 > 0$ ومنه الإشارة من إشارة البسط :