الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تمنراست

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي دورة 2020

الشعبة : تقني رياضي

اختبار في مادة الرياضيات المدة :4 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{4u_n}{1+u_n}$.

1 أ- أحسب u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$

2 لتكن (v_n) متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{u_n-3}{u_n}$

أ -بين أن (v_n)متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

ب أكتب v_n ثم u_n بدلالة n ثمّ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

3 -(w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=\frac{3}{u_n}$، نضع $S_n=w_0+w_1+w_2+....+w_n$.

أ. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=1-v_n$

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=n+1+\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

ج. أحسب نهاية . $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الارقام 0 ، 0 ، 0 ، 1 ،1 ، 2 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 0 ، 1 (الكرات لانفرق بينها باللمس) نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس

1. أحسب احتمال الحوادث A ، B ، C حيث :

"A الكرتين المسحوبتين من نفس اللون " B " الكرتين تحملان رقمين جداؤهما معدوم "

C " كرتين بلونين مختلفين و رقمين جداؤهما معدوم "

2. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين المسحوبين

أ. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

ب. أحسب الأمل ألرياضياتي للمتغير العشوائي X

التمرين الثالث : (05 نقاط)

1. عين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases} \alpha+\beta=-1 \\ 2\overline{\alpha}+\beta=6i \end{cases}$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ نعتبر النقط I و A و B لواحقها على الترتيب $z_I=1$ و $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$.

أ -أنشئ النقط I و A و B

ب عين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$

3. D نقطة لاحقتها $z_D=\dfrac{3+9i}{4+2i}$ أكتب z_D على شكل الجبري ثم بين أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C).

4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث $z_E=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right).z_w$

أ -أكتب العدد $z_E+\dfrac{1}{2}$ على الشكل الآسي .

ب استنتج أن $z_E=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{4}+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}i$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x^2-1+\ln x$.

1. احسب نهايات الدالة h عند 0 وعند $+\infty$.
2. ادرس اتجاه تغير الدالة h على $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. احسب $h(1)$ ثم استنتج اشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .
2. بين انه من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات.
3. أ) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4. بين ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x-1-e^{-1}$ يمس المنحني (C_f) في نقطة A يطلب تعيين احداثيها
5. ارسم (Δ) و (d) و (C_f) .
6. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $-1-\dfrac{\ln(x)}{x}=m$.

انتهى الموضوع الأول

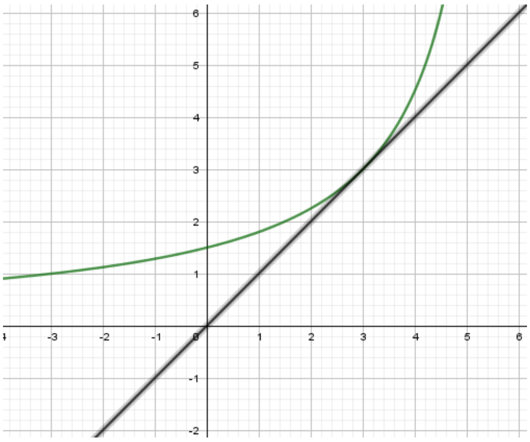
الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty,6[$ بـ: $f(x)=\dfrac{9}{6-x}$.

ولتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0=-3 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

في الرسم المقابل ، (c_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذي المعادلة $y=x$



1. أ-باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

ب -. ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

2. أ- برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$

ب- استنتج اتجاه تغير (u_n) . هل (u_n) متقاربة ؟ برر

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على □ كمايلي: $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها r وحدها الاول v_0

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

هـ- احسب بدلالة n المجموعين: $s_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $s'_n=v_0\times u_0+v_1\times u_1+...+v_n\times u_n$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبرّرا الإجابة .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n}-1$.

2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2-x\equiv 0[6]$ فإن $x\equiv 0[6]$.

3) إذا كان $x^2\equiv y^2[17]$ فإن $x\equiv y\,[17]$.

4) مجموعة حلول المعادلة $12x-5y=3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x,y) من الشكل $(4+10k\,;9+24k)$ مع $k\in Z$.

5) M و N عددان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M-N$ يقبل القسمة على 27.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

صندوق يحتوي على n كرية بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء . نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق .

1. ما احتمال سحب كرتين بيضاوين
2. نسمى $P(n)$ احتمال سحب كرتين من نفس اللون .

أ –بين أن $P(n)=\dfrac{n^2-n+18}{(n+7)(n+6)}$.

ب أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n)$ ثم فسر النتيجة المحصل عليها .

3. فيما يلي نأخذ $n=5$ و نعتبر اللعبة التالية : يدفع اللاعب $30DA$ ويسحب في آن واحد كرتان من الصندوق

. عند سحب كرة بيضاء يتحصل على $40DA$ وعند سحب كرة حمراء يتحصل على $10DA$ و عند سحب كرة خضراء يخسر ما دفعه . X المتغير العشوائي الذي يمثل الربح الجبري للاعب .

أ. عين قيم المتغير العشوائي X .

ب. عين قانون الاحتمال العشوائي للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=-x+1+e^{-x}$.

1) احسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث $1.27<\alpha<1.28$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(e^x-1)(2-x)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) –احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) أ– بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-2$ استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلته

ب– ادرس الوضع النسبي بالنسبة لـ (C_f) والمستقيم (Δ) معادلته $y=x-2$.

3) بين ان $f'(x)=e^x.g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ و شكل جدول تغيراتها.

4) بين ان $f(\alpha)=\dfrac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

5) ارسم (Δ) و (C_f) .

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح الموضوع الأول شعبة التقني رياضي البكالوريا التجريبية 2021

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{1+u_n}$.

1. أ- حساب u_1 و u_2 : $u_1=\dfrac{4u_0}{1+u_0}=\dfrac{4}{2}=2$ و $u_2=\dfrac{4u_1}{1+u_1}=\dfrac{4\times 2}{1+2}=\dfrac{8}{3}$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$:

لدينا $0<u_0<3$ محققة .

نفرض أن $0<u_n<3$ صحيحة و نبرهن أن $0<u_{n+1}<3$ صحيحة

لدينا $u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{1+u_n}$ يعني أن $u_{n+1}=4-\dfrac{4}{1+u_n}$

$0<u_n<3$ بإضافة 1 نجد $1<1+u_n<4$ بالقلب نجد $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{1+u_n}<1$ بالضرب في -4 نجد

$-4<-\dfrac{4}{1+u_n}<-1$ بإضافة 4 نجد $0<4-\dfrac{4}{1+u_n}<3$ إذن $0<u_{n+1}<3$ محققة

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$

2. لتكن (v_n) متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n}$

أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$: $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}}=\dfrac{\left(\dfrac{4u_n}{1+u_n}\right)-3}{\left(\dfrac{4u_n}{1+u_n}\right)}$ أي أن

$v_{n+1}=\dfrac{4u_n-3-3u_n}{4u_n}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{u_n-3}{u_n}\right)$ إذن $v_{n+1}=\dfrac{1}{4}v_n$ و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$ و

حدها الأول $v_0=\dfrac{u_0-3}{u_0}$ أي $v_0=-2$

ب كتابة v_n ثم u_n بدلالة n : $v_n=v_0.q^n$ أي $v_n=-2.\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ و لدينا $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n}$ يعني

$v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$ و منه $v_n-1=-\dfrac{3}{u_n}$ أي أن $\dfrac{1}{v_n-1}=-\dfrac{u_n}{3}$ إذن $u_n=-\dfrac{3}{v_n-1}$ بالتعويض نجد

$u_n=-\dfrac{3}{\left(\dfrac{-2}{4^n}\right)-1}$ أي أن $u_n=\dfrac{3\times 4^n}{2+4^n}$.

حساب نهاية المتتالية (u_n) : $\lim u_n=\lim\left(\dfrac{3\times 4^n}{4^n}\right)=3$.

3. المتتالية المعرفة (w_n) من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = \frac{3}{u_n}$ نضع

. $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$

أ. التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$ لدينا $w_n = \frac{3}{u_n}$ و لدينا $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$ يعني

$v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$ بالجمع نجد $w_n + v_n = 1$ و منه $w_n = 1 - v_n$ و هو المطلوب .

ب. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

S_n هو مجموعة متتالية هندسية و متتالية ثابتة إذن $S_n = (n+1) - v_0 \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}\right]$ أي أن

$$S_n = (n+1) + \frac{8}{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

ح. حساب نهاية . $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$: $\lim \frac{S_n}{n} = \lim \left[\frac{(n+1)}{n} + \frac{8}{3n} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]\right] = 1$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الارقام 0 ، 0 ، 0 ، 1 ،1 ، 2 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 0 ، 1 (الكرات لانفرق بينها باللمس) نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس

1. أحسب احتمال الحوادث A ، B ، C حيث :

"A الكرتين المسحوبتين من نفس اللون " B " الكرتين تحملان رقمين جداؤهما معدوم "

C " كرتين بلونين مختلفين و رقمين جداؤهما معدوم "

$P(A) = \frac{C_6^2 + C_2^2}{C_8^2} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$ و $P(B) = \frac{C_4^1 \times C_4^1 + C_4^2}{C_8^2} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$ و

$$P(C) = \frac{C_6^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_2^1}{C_8^2} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين المسحوبين

أ. قانون الاحتمال للمتغير العشوائي :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28}$	$\frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_8^2} = \frac{12}{28}$	$\frac{C_1^1 \times C_4^1 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{7}{28}$	$\frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_8^2} = \frac{3}{28}$

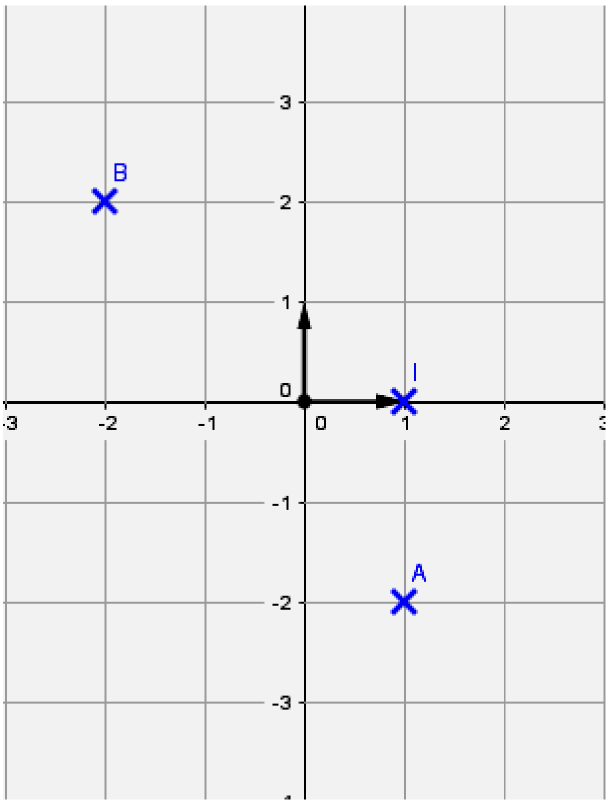
ب. حساب الأمل ألرياضياتي للمتغير العشوائي X :

$E(X)=\dfrac{0\times 6+1\times 12+2\times 7+3\times 3}{28}=\dfrac{35}{28}=\dfrac{5}{4}$ إذن $E(X)=1,25$

التمرين الثالث : (05 نقاط)

1. تعيين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ 2\overline{\alpha}+\beta=6i\end{cases}$ يكافئ أن $2\overline{\alpha}-\alpha=1+6i$ بوضع $\alpha=x+iy$ نجد $x-3iy=1+6i$ و منه $\begin{cases}x=1\\ -3y=6\end{cases}$ إذن $\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$ و منه $\alpha=1-2i$ بالتعويض في معادلة من معادلتي الجملة نجد $1-2i+\beta=-1$ إذن $\beta=-2+2i$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ نعتبر النقط I و A و B لواحقها على الترتيب $z_I=1$ و $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$



أ-أنشاء النقط I و A و B

ب-تعيين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$: المركز هو منتصف القطعة $[AB]$ أي أن

$$z_w=\frac{z_A+z_B}{2}=-\frac{1}{2}$$

3. D نقطة لاحقتها $z_D=\dfrac{3+9i}{4+2i}$

كتابة z_D على شكل الجبري :

$$z_D=\frac{3+9i}{4+2i}=\frac{(3+9i)(4-2i)}{16+4}=\frac{30+30i}{20}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$$

إثبات أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C): $|z_D-z_w|=\left|\dfrac{4}{2}+\dfrac{3}{2}i\right|=\dfrac{5}{2}$ و $|z_A-z_w|=\left|\dfrac{3}{2}-2i\right|=\dfrac{5}{2}$ و منه محققة

4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث $z_E=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right).z_w$

أ –كتابة العدد $z_E+\frac{1}{2}$ على الشكل الآسي : $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$

يعني أن $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$ و منه $z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ إذن

$z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و هو المطلوب .

ب استنتاج أن $z_E=\frac{3\sqrt{2}-2}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{4}i$: لدينا $z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}+i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ و

منه $z_E=\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{4}+i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

التمرين الرابع : (07 نقاط) :

I - نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x^2-1+\ln x$.

1. حساب النهايات الدالة h عند 0 وعند $+\infty$:

النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}h(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\left[x^2-1+\ln(x)\right]=-\infty$ و

دراسة اتجاه تغير الدالة h على $]0;+\infty[$: $h'(x)=2x+\frac{1}{x}$ موجبة إذن الدالة h متزايدة على $]0;+\infty[$

جدول تغيرات:

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$h(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2. حساب $h(1)$: $h(1)=1^2-1+\ln(1)=0$

استنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x على المجال $]0;+\infty[$: بما أن الدالة hمتزايدة على $]0;+\infty[$ و تنعدم عند 1 فإن $h(x)$ موجبة على المجال $[1;+\infty[$ و سالبة على المجال $]0;1]$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ بالتزايد المقارن

حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$: حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$: $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\frac{\ln(x)}{x}=-\infty$

تفسير النتيجة بيانيا المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب له معادلة من الشكل $x=0$.

2. بين انه من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$:

$f'(x)=1-\frac{\left(\frac{1}{x}\right).x-\ln(x)}{x^2}$ و منه $f'(x)=\frac{x^2-1+\ln(x)}{x^2}$ إذن $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$ محققة

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : f متزايدة على المجال $]1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]0;1]$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. أ) إثبات أن (Δ) المستقيم الذي معادلته
من الشكل $y=x-1$ مقارب للمنحنى
(C_f) : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]=0$ و منه محققة.

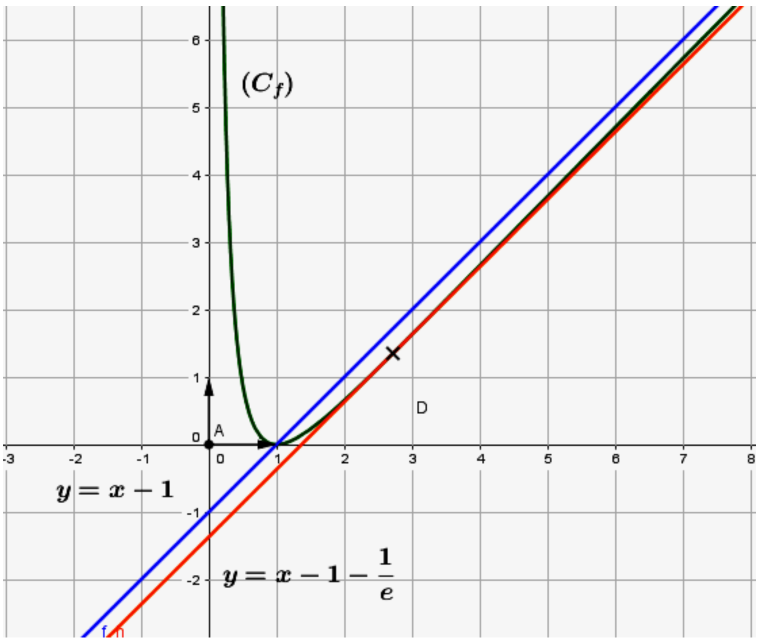
ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ندرس إشارة الفرق $[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]$

و هو موجب على المجال على المجال $]0;1[$ إي أن (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على هذا المجال .

و سالب على المجال على المجال $]1;+\infty[$ إي أن (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على هذا المجال.

1. إثبات أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x-1-e^{-1}$ يمس المنحني (C_f) في نقطة A يطلب تعيين احداثيها : معامل توجيهه هو $f'(x)=1$ يعني أن تكافئ $\frac{g(x)}{x^2}=1$ يعني أن $g(x)=x^2$ يكافئ أن $\ln(x)=1$ يكافئ أن $x=e$ و منه ف $A(e;\ f(e))$ أي أن $A\left(e\ ;\ e-1-\frac{1}{e}\right)$

4. ارسم (Δ) و (d) و (C_f) .



5. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $-1-\frac{\ln(x)}{x}=m$.

يعني أن $x-1-\frac{\ln(x)}{x}=x+m$ أي أن $f(x)=x+m$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم
$(\Delta_m): y=x+m$

لما $m\in\left]-\infty;-1-\frac{1}{e}\right[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول

لما $m=-1-\frac{1}{e}$ نلاحظ أن $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta_m\right)$ يتقاطعان في نقطة واحدة و منه للمعادلة حل وحيد

لما $m\in\left]-1-\frac{1}{\mathrm{e}};-1\right[$ نلاحظ أن $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta_m\right)$ يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة حلين

لما $m\in\left[-1;+\infty\right[$ نلاحظ أن $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta_m\right)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة حل وحيد

انتهى الموضوع الأول

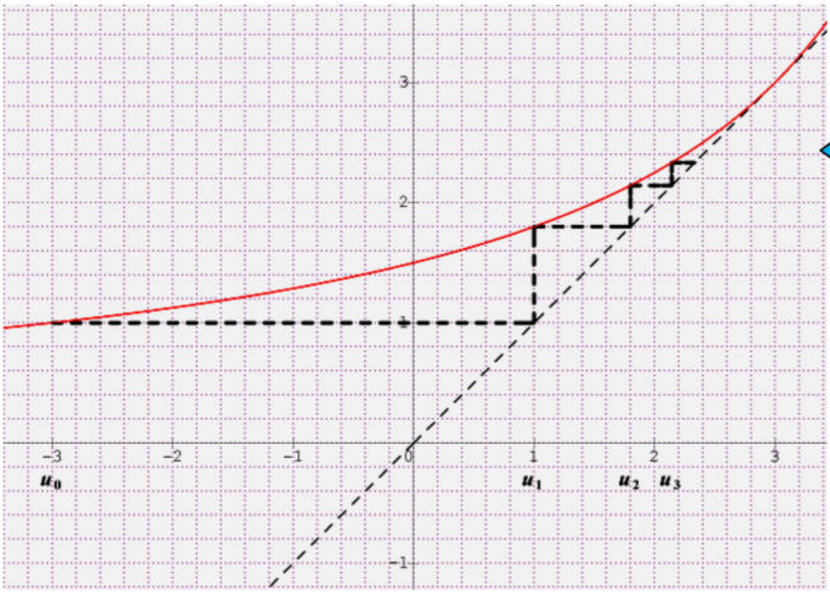
التصحيح المفصل للموضوع الثاني شعبة التقني رياضيات

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty\ ;\ 6[$ بـ: $f(x)=\dfrac{9}{6-x}$.

ولتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0=-3 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

في الرسم المقابل ، (c_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j}\right)$ و (Δ) المستقيم ذي المعادلة $y=x$



1. أ- باستعمال الرسم السابق نمثل على حامل محور الفواصل في الشكل المقابل

ب - التخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها :

(u_n) متتالية متزيدة و محدودة من الأعلى بالعدد 3 فاصلة نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و (C_f) فهي متقاربة

2. أ- البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$:

$u_0<3$ محققة

نفرض أن $u_n<3$ صحيحة و نبرهن صحة $u_{n+1}<3$

$u_n<3$ بالضرب في (-1) نجد $-u_n>-3$ بإضافة 6 نجد $6-u_n>3$ بالقلب نجد $\dfrac{1}{6-u_n}<\dfrac{1}{3}$ بالضرب في 9 نجد $\dfrac{9}{6-u_n}<3$ أي أن $u_{n+1}<3$ صحيحة

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<3$.

ب- استنتاج اتجاه تغير (u_n) : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{9}{6-u_n}-u_n$ أي أن $u_{n+1}-u_n=\dfrac{9-6u_n+u_n^2}{6-u_n}$ يعني أن $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(3-u_n)^2}{6-u_n}$ بما أن $u_n<3$ فإن الفرق موجب إذن المتتالية (u_n) متزايدة .

(u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى هي متقاربة .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$

أ –البرهان أن المتتالية (v_n) حسابية : $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-3}=\frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3}$ أي أن $v_{n+1}=\frac{6-u_n}{9-18+3u_n}$ و منه

$v_{n+1}=\frac{6-u_n}{3u_n-9}$ بحساب الفرق نجد $v_{n+1}-v_n=\frac{6-u_n}{3u_n-9}-\frac{1}{u_n-3}$ أي

$v_{n+1}-v_n=\frac{6-u_n-3}{3u_n-9}=-\frac{(3-u_n)}{3(3-u_n)}$ إذن $v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{3}$ و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها

$-\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=\frac{1}{u_0-3}=-\frac{1}{6}$

ب –كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n=v_0+n.r$ أي $v_n=-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n$

استنتاج عبارة u_n : $v_n=\frac{1}{u_n-3}$ يعني أن $u_n-3=\frac{1}{v_n}$ و منه $u_n=3+\frac{1}{v_n}$ أي أن $u_n=3+\frac{1}{-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n}$

و منه , $u_n=3+\frac{6}{-1-2n}$ إذن $u_n=\frac{3-6n}{-1-2n}$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-6n}{-2n}\right)=3$

هـ – حساب بدلالة n المجموعين:

المجموع الأول : $s_n=v_0+v_1+...+v_n$ أي $S_n=\frac{(n+1)(v_0+v_n)}{2}$ أي $S_n=\frac{(n+1)\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n\right)}{2}$ و منه

$S_n=\frac{(n+1)(-1-n)}{6}$ إذن $S_n=-\frac{(n+1)^2}{6}$

و المجموع الثاني : $s'_n=v_0\times u_0+v_1\times u_1+...+v_n\times u_n$. لدينا $u_n=3+\frac{1}{v_n}$ و منه $u_n\times v_n=3v_n+1$ و

منه S'_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتاليتين متتالية حسابية و متتالية ثابتة إذن $S'_n=3S_n+(n+1)$ أي أن

$S'_n=-3\frac{(n+1)^2}{6}+(n+1)$ إذن $S'_n=\left[-\frac{(n+1)}{2}+1\right](n+1)$ أي $S'_n=-\frac{1}{2}(1-n).(n+1)$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبرّرا الإجابة .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n}-1$ لدينا $2^2\equiv1[3]$ بالرفع الى قوى n نجد $2^{2n}\equiv1[3]$ و منه

$2^{2n}-1\equiv0[3]$ و منه صحيحة.

2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2-x\equiv0[6]$ فإن $x\equiv0[6]$:

$x\equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$x^2-x\equiv$	0	0	2	0	0	2	$[6]$

و منه خاطئة

3) إذا كان $x^2 \equiv y^2 [17]$ فإن $x \equiv y [17]$.

$x^2 \equiv y^2 [17]$ يعني إن $x^2 - y^2 \equiv 0 [17]$ يكافئ أن $x^2 - y^2$ مضاعف للعدد 17 و 17 عدد أولي و $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ إذن 17 قاسم$(x+y)$ أو 17 قاسم للعدد $(x-y)$ أي أن $x \equiv y [17]$ أو $x \equiv -y [17]$ و منه خاطئة .

4) مجموعة حلول المعادلة $12x - 5y = 3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x, y) من الشكل $(4+10k ; 9+24k)$ مع $k \in Z$: $12(4+10k) - 5(9+24) = 12 \times 4 + 120k - 5 \times 9 - 120k$ و منه $12(4+10k) - 5(9+24) = 3$ إذن محققة و منه صحيحة

5) M و N عددان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M - N$ يقبل القسمة على 27.

إذا كان M يقبل القسمة على 27 يعني $M \equiv 0 [27]$ أي أن $100a + 10b + c \equiv 0 [27]$ أي أن

$M - N \equiv -N [27]$ أي أن $M - N \equiv -100b - 10c - a [27]$ أي

$M - N \equiv -a - 100b - 10c [27]$ و $-999 \equiv 0 [27]$ أي أن و منه $M - N \equiv -1000a - 100b - 10c [27]$

أي $M - N \equiv -10(100a + 10b + c) [27]$ أي أن $M - N \equiv -10M [27]$ و $M \equiv 0 [27]$ إذن

$M - N \equiv 0 [27]$ صحيحة

التمرين الثالث : (04 نقاط)

صندوق يحتوي على n كرية بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء . نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق .

1. احتمال سحب كرتين بيضاوين : $P(A) = \frac{C_n^2}{C_{n+7}^2} = \frac{\frac{n!}{2(n-2)!}}{\frac{(n+7)!}{2(n+5)!}} = \frac{n(n-1)}{(n+7)(n+6)}$.

2. نسمي $P(n)$ احتمال سحب كرتين من نفس اللون .

أ –بين أن $P(n) = \frac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)}$:. $P(n) = \frac{C_n^2 + C_4^2 + C_3^2}{C_{n+7}^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 6 + 3}{\frac{(n+7)(n+6)}{2}}$ أي ان

$$P(n) = \frac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)}$$

ب حساب $\lim_{n \to +\infty} P(n)$: $\lim_{n \to +\infty} P(n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2}{n^2}\right) = 1$

تفسير النتيجة المحصل عليها : كلما كان عدد الكرات البيضاء أكبر فإن احتمال سحب كرتين من نفس اللون يقترب احتمالها من 1 .

3. فيما يلي نأخذ $n=5$ و نعتبر اللعبة التالية : يدفع اللاعب $30DA$ ويسحب في آن واحد كرتان من الصندوق . عند سحب كرة بيضاء يتحصل على $40DA$ وعند سحب كرة حمراء يتحصل على $10DA$ و عند سحب كرة خضراء يخسر ما دفعه . X المتغير العشوائي الذي يمثل الربح الجبري للاعب .

أ. قيم المتغير العشوائي X هي -60 ، -20 ، -10 ، 10 ، 20 ، 50

n كرية بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء

ب. تعيين قانون الاحتمال العشوائي للمتغير العشوائي X :

x_i	-60	-20	-10	10	20	50
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{66}$	$\frac{12}{66}$	$\frac{6}{66}$	$\frac{15}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{10}{66}$

حساب أمله الرياضياتي: $\mathrm{E(X)}=\dfrac{-60\times3-20\times12-10\times6+10\times15+20\times20+50\times10}{66}=\dfrac{570}{66}=\dfrac{95}{11}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I – نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=-x+1+e^{-x}$.

1. حساب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ بالتزايد المقارن

و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة g: $g'(x)=-1-e^{-x}$ سالبة تماماً

و منه الدالة g متناقصة على المجال $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3. إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث $1.27<\alpha<1.28$: $g(1{,}27)=0{,}010$ و $g(1{,}28)=-0{,}0001$ بما أن الدالة g مستمرة و متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ حسب مبرهن القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $1.27<\alpha<1.28$

استنتلج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$	$+$	0	$-$

II – نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(e^x-1)(2-\mathrm{x})$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -x.e^{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[-(2-x)]=-\infty$

2. أ-إثبات أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-2$: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}[e^{x}.(2-x)-2]=-2$ لأن

$\lim\limits_{x\to-\infty}[e^{x}.(2-x)]=0$ التزايد المقارن .

استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلته : بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-2$

فإن $y=x-2$ معادلة نصف مستقيم المقارب المائل جهة $-\infty$.

ب- دراسة الوضع النسبي بالنسبة لـ (C_f) والمستقيم (Δ) معادلته $y=x-2$:

إشارة الفرق $[f(x)-x+2]=e^{x}(2-x)$ من إشارة $(2-x)$

و المستقيم (Δ) و (C_f) المنحنى يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 2

x	$-\infty$		2		$+\infty$
إشارة $f(x)-y$		+	0	—	
الوضعية :		(C_f) يقع فوق المستقيم (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان	(C_f) يقع تحت المستقيم (Δ)	

3. إثبات إن $f'(x)=e^{x}.g(x)$: $f(x)=(e^{x}-1)(2-x)$ يعني أن $f'(x)=e^{x}(2-x)-(e^{x}-1)$ أي

أن $f'(x)=e^{x}[(2-x)-(1-e^{-x})]$ و منه $f'(x)=e^{x}[-x+1+e^{-x}]$ إذن $f'(x)=e^{x}g(x)$

استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{x}g(x)$ إشارتها من إشارة $g(x)$ و منه f متزايدة

على $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$

جدول تغيرات :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

4. إثبات أن $f(\alpha)=\dfrac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$: $g(\alpha)=0$ يعني $-\alpha+1+e^{-\alpha}=0$ يعني أن $e^{-\alpha}=\alpha-1$ أي

$e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$ و $f(\alpha)=(e^{\alpha}-1).(2-\alpha)$ بالتعويض نجد $f(\alpha)=\left(\dfrac{1}{\alpha-1}-1\right).(2-\alpha)$ و منه

$f(\alpha)=\dfrac{(2-\alpha).(2-\alpha)}{\alpha-1}$ إذن $f(\alpha)=\dfrac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$.

استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$: $1,27<\alpha<1,28$ و منه $0,27<\alpha-1<0,28$ بالقلب نجد

$\dfrac{1}{0,28}<\dfrac{1}{\alpha-1}<\dfrac{1}{0,27}$ ....(1)

و $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$ بإضافة -2 يعني $-0{,}73 < \alpha - 2 < -0{,}72$ بالتربيع نجد

$0{,}72^2 < (\alpha-2)^2 < 0{,}73^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

بضرب (1) و (2) نجد $\frac{0{,}73^2}{0{,}27} < \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha-1} < \frac{0{,}72^2}{0{,}28}$ أي أن $1{,}85 < f(\alpha) \leq 1{,}97$

5. رسم (Δ) و (C_f) :