الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية　　　　　　　　الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان: شهادة البكالوريا　　　　　　　　دورة : ماي2022

الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة : الرياضيات　　　　　　　　المدة :

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة عينه مع التعليل

1) نعتبر المجموع T_n حيث : $T_n = \ln 2 + \ln 2^3 + \ln 2^5 + \ldots + \ln 2^{2n+1}$ قيمة T_n هي:

أ) $T_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$　　ب) $T_n = 2^{(n+1)^2}$　　ج) $T_n = 2\ln(n+1)$

2) نعتبر في المجال　المعادلة : $\log x^{2} - 2\,\mathrm{og}\, x - 3 = 0$ حلول المعادلة هي:

أ) $S = \{e^{-1}; e^{-3}\}$　　ب) $S = \{10^{-1}; 10^{3}\}$　　ج) $S = \{10^{3}\}$

3)المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x}\; 1 + \ln x \;\, dx$

نضع : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{36}$ قيمة S هي:

أ) $S = 1444$　　ب) $S = 2022$　　ج) $S = 1443$

4)المتتاليتان العدديتان u_n و (v_n) المعرفتان بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 3} \end{cases}$

و $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n + 1}$ ، قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية هي:

أ) $\alpha = -1$　　ب) $\alpha = 3$　　ج) $\alpha = 1$

التمرين الثاني:(05 نقاط)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=0\ ;\ u_1=1\ ;\ u_{n+2}=\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n$

نضع : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ و $w_n=u_n\times 5^n$

1) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n .

2) أ)برهن ان المتتالية (w_n) حسابية أساسها 5 ثم اكتب w_n بدلالة n

ب)استنتج عبارة u_n بدلالة n

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0<u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0<u_{n+1}\leq\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

ج) نضع: من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$

بين أن : $0<u_{n+1}\leq\frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

4) احسب بدلالة n المجموعين T_n و T'_n بحيث : $T_n=u_0+5^1u_1+5^2u_2+\ldots+5^nu_n$

و $T'_n=\ln v_0+\ln v_1+\ln v_2+\ldots+\ln v_n$

التمرين الثالث :(04 نقاط)

يريد تلاميذ قسم مكون من 10 ذكور ، 6 اناث أن يشكلوا لجنة تتألف من 3 أفراد لتمثيلهم في مسابقة دراسية (نفرض أن كل التلاميذ لهم نفس الحظوظ لكي يقع عليهم الاختيار)

. نعتبر الحدثين: E :" أعضاء اللجنة من نفس الجنس" ، F : "أعضاء اللجنة من الجنسيين معا"

1) أ) احسب عدد اللجان التي يمكن تشكيلها.

أ) احسب $P(E)$ و$P(F)$ احتمالي E و F .

2) نفترض أنه من بين تلاميذ القسم يوجد التلميذ x، و أخته التلميذة y والتي لا تريد الانضمام الى اللجنة التي تضم التلميذ x

– احسب احتمال أن يكون أعضاء اللجنة من الجنسين معا

3) المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة عدد التلميذات المتواجدات بها.

عين قانون الاحتمال X و احسب $E(X)$ أمله الرياضياتي .

التمرين الرابع: (7 نقاط)

I) الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1-(x^2-2x+2)e^{-x}$.

1. أدرس تغيرات الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,35<\alpha<0,36$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II) الدالة f المعرفة على IR بـ: $f(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$).

1. أدرس تغيرات الدالة f .

2. أ) بين أن $f(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$.

ب) عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

3. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4. أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.

5. أنشيء كل من (Δ) ، (T) و (C_f) على المجال $]-1;+\infty[$.

6. أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون الدالة F المعرفة بـ: $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة: $x\to(x^2+2)e^{-x}$ على IR .

ب) أحسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=-\alpha$ و $x=0$.

ج) بين أن: $A(\alpha)=4e^{2\alpha}+8e^{\alpha}-16$.

التمرين الرابع: (7 نقاط)

I) g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2-\frac{1}{x^2}-4\ln x$

1) بين أن الدالة g متزايدة على المجال $]0;+\infty[$.

2) احسب $g(1)$ ثم حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-(\ln x)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد حيث: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

1) بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) اثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$.

3) بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{2x}$ ثم شكل جدول تغيرات f .

4) أ ـ بين أن الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=f(x)-x$ متناقصة تماما على المجال $]0;1[$.

ب ـ بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل في المجال $[0,54;0,56]$ حلا وحيدا α ثم فسر النتيجة بيانيا .

5) أنشئ المنحنى (C_f) .

6) أ ـ بين أن الدالة $x\mapsto -x+x\ln x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب ـ احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$y=0$ ، $x=1$ و $x=e$

الموضـــــوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

1) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n العدد الحقيقي: $a=\ln\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{2022}+\ln\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^{2022}$

أ) $a=2022$ ب) $a=0$ ج) $a=n$

2) إذا كانت الأعداد $\left(1-e^{-2}\right)$، $\left(e^{-2}-e^{-4}\right)$ و α تشكل حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية فإن:

أ) $\alpha=\left(1-e^{-4}\right)$ ب) $\left(e^{-2}-e^{-6}\right)$ ج) $\left(e^{-4}-e^{-6}\right)$

3) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$. القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;1]$ هي:

أ) $m=\ln\left(\dfrac{e+1}{2}\right)$ ب) $m=\ln\sqrt{\dfrac{e+1}{2}}$ ج) $m=\ln\left(\dfrac{e-1}{2}\right)$

4) معامل x^{10} في منشور $\left(2+x\right)^{12}$ هو: أ) 262 ب) 263 ج) 264

التمرين الثاني: (5 نقاط)

يحوي كيس على أربع كريات حمراء تحمل الرقم α و ثلاث كريات خضراء تحمل الرقم $1-\alpha$ و كريتين بيضاوين تحملان الرقم 1 ، حيث α عدد طبيعي غير معدوم . الكريات متماثلة ولا نميز بينها عند اللمس .

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد .

نعتبر الحوادث التالية : A " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر" ، B "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس العدد" و C " الحصول على كريتين بالضبط تحملان الرقم $1-\alpha$" .

1) أ) أحسب إحتمال كل من الحوادث A ، B و C.

ب) ما هو احتمال الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني ؟

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام الظاهرة على الكريات الحمراء المسحوبة والذي يأخذ القيمة 0 إذا لم يتم سحب أي كرية حمراء .

أ) برر أن القيم الممكنة لـ X هي $\{0,\alpha,2\alpha,3\alpha\}$ ثم عرف قانون احتماله .

ب) أحسب بدلالة α الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

ج) عين قيمة α التي من أجلها $\left|E(X)-1\right|\le 2$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 بحيث: $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{3}{u_n}\right)$ و $u_0>\sqrt{3}$

1) أ. اثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{1}{2u_n}\left(u_n-\sqrt{3}\right)^2$.

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n>\sqrt{3}$.

ج. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln\left(\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}\right)$

أ. اثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}+\sqrt{3}=\frac{1}{2u_n}\left(u_n+\sqrt{3}\right)^2$.

ب. برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم استنتج عبارة v_n بدلالة u_0 و n .

ج ـأثبت أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) نضع : من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$S_n=\left(\frac{u_0-\sqrt{3}}{u_0+\sqrt{3}}\right)\times\left(\frac{u_1-\sqrt{3}}{u_1+\sqrt{3}}\right)\times\left(\frac{u_2-\sqrt{3}}{u_2+\sqrt{3}}\right)\times\ldots\times\left(\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}\right)$$

- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $S_n=e^{\left(2^{n+1}-1\right)\ln\left(\frac{u_0-\sqrt{3}}{u_0+\sqrt{3}}\right)}$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

I) الدالة h معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$

وبجدول تغيراتها المقابل:

x	0		α		e		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\frac{2}{e}$	$\searrow$	1

3) بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق: $0.7<\alpha<0.8$

4) استنتج حسب قيم x إشارة $h(x)$

II) الدالة g معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1+\frac{\ln x}{x}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

7) أ. احسب $g'(x)$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$

ب.استنتج اتجاه تغير الدالة g .

8) أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ثم $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$

ب. فسر النتيجتين بيانيا .

ج) شكل جدول تغيرات g .

III) الدالة f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=g(x)+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم السابق.

1) أ ـ بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=g'(x)\times h(x)$.

ب ـ استنتج اتجاه تغير الدالة f .

2) أ. يين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ثم احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=+\infty$.

ب. فسر النتيجتين بيانيا

ج . برهن أن: $f(\alpha)=\frac{3}{4}$، شكل جدول تغيرات f .

3) أ. بين أن : (C_g) و (C_f) لهما مماس مشترك (T)، اكتب معادلة له .

ب. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$ ثم فسر بيانيا هذه النتيجة.

ج. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة (C_g) .

4) أنشئ بدقة المماس (T) ثم (C_f) و (C_g) في نفس المعلم السابق.