



على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء تحمل الأرقام : $-2; -1; 0; 1; 2$ و ثلاث كريات خضراء تحمل الأرقام : $-1; 0; 1$ و كرتان سوداوان تحملان الرقمين : $-1; 0$ (الكريات لا نفرق بينها عند اللمس).

1/ نسحب عشوائيا ودون إرجاع كرتين من هذا الكيس و ليكن الحدثان :

A : "الكرتان المسحوبتان لونها مختلفان", B : "الكرتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا موجبا تماما"

- أحسب $p(A)$ و $p(B)$ ثم بين أن $p(A \cup B) = \frac{32}{45}$.

2/ نعيد الكريات المسحوبة إلى الكيس و نسحب منه كرتين في آن واحد .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة العدد الحقيقي $|x - y|$ حيث x و y هما الرقمان اللذان تحملهما الكرتان المسحوبتان من الكيس.

أ/ عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ثم أكتب قانون احتماله .

ب/ أحسب الأمل الرياضي $E(X)$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

I / (u_n) متتالية معرفة \mathbb{N} على كما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}(u_n^2 - u_n + \frac{1}{2})}$

(1) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}(u_n - \frac{1}{2})^2} + \frac{1}{8}$

(2) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$

(3) أدرس رتبة المتتالية (u_n) . هل هي متقاربة ؟

II) لتكن (v_n) متتالية المعرفة على كمايلي : $v_n = u_n^2 - u_n$

(1) بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول

(2) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

(3) أحسب S_n بدلالة n المجموع حيث: $S_n = (u_0 - u_0^2) + (u_1 - u_1^2 + 1) + (u_2 - u_2^2 + 2) + \dots + (u_n - u_n^2 + n)$



التمرين الثالث: (04 نقاط)

(1) أ- ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7

ب- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n$

ج- استنتج باقي القسمة الاقليدية على 7 للعددين S_{2021} و S_{2022}

$$\begin{cases} 25x - 31y = 7 \\ p \operatorname{gcd}(x, y) = 7 \end{cases}$$

(2) حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 الجملة :

(3) نعتبر في مجموعة الاعداد الصحيحة \mathbb{Z} المعادلة (E) ذات المجهول x : $3x(x+2) \equiv 2[7]$

أ- حل في المجموعة \mathbb{Z} المعادلة (E) .

ب- N عدد طبيعي يكتب 361 في نظام التعداد الذي أساسه α وباقي القسمة الاقليدية للعدد N على 7 هو 3

عين قيم العدد الطبيعي α ثم تحقق ان العدد 1436 قيمة ممكنة للعدد α .

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I (نعتبر g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^* بالعبارة : $g(x) = x^2 - \ln(x^2)$)

1 - أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

2 - استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون : $g(x) > 0$

II (نعتبر f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^* بالعبارة : $f(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$)

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس (O, \vec{i}, \vec{j})

(1) احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ثم فسر النتيجةن هندسيا .

(2) أ- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من \mathbb{R}^* تكون : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

ج- أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = x$ ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(3) أ- تحقق انه من أجل كل x و $-x$ من \mathbb{R}^* : $f(x) + f(-x) = 0$ ، ماذا تستنتج؟ فسر النتيجة هندسيا .

ب- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,3 < \alpha < 0,4$ ، ثم استنتج انها تقبل حلا اخر β

يطلب تعيين حصرا له .

(4) أ- بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسيين (T_1) و (T_2) موازيين للمستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما .

ب- انشئ كل من (T_1) و (T_2) والمنحنى (C_f)

(5) أ- بين ان الدالة F المعرفة على \mathbb{R}^* بـ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}(\ln x^2)^2 + 2\ln|x|$ هي دالة اصلية للدالة f على \mathbb{R}^* .

ب - عين الدالة الاصلية للدالة f والتي تنعدم من اجل $x = 1$.

ج - نعتبر λ عدد حقيقي حيث $\lambda > 1$ احسب التكامل $I(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx$

- فسر النتيجة هندسيا ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$.

الموضوع الثاني:**التمرين الأول: (4 نقاط)**

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

(1) لتكن (u_n) متتالية هندسية حيث $u_1 = 2$ وأساسها $\frac{1}{2}$ - نعتبر الجداء: $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n+1}$

(أ) $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-1}$ (ب) $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)(n-2)}{2}}$ (ج) $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2+1}{2}}$

(2) حلول المعادلة ذات المجهول x التالية $-2 \times 3^{2x} + 2 \times 3^x + 4 = 0$ هي:

(أ) $S = \left\{ \frac{-1}{\ln 3}; \frac{\ln 2}{\ln 3} \right\}$ (ب) $S = \left\{ \frac{\ln 2}{\ln 3} \right\}$ (ج) $S = \emptyset$

(3) (أ) $\int_1^e \ln(x) dx = 1$ (ب) $\int_1^e \ln(x) dx = e+1$ (ج) $\int_1^e \ln(x) dx = e-1$

(4) (أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = +\infty$ (ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$ (ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 1$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

n عدد طبيعي حيث: $n \geq 4$

يحتوي صندوق U على n كرية لا يمكن التمييز بينها في اللمس، منها 3 حمراء و البقية سوداء . نسحب في آن واحد كرتين .

(1) أحسب احتمال الحدثين التاليين : A : سحب كرتين من نفس اللون . B : سحب كرية حمراء على الأكثر .

(2) أحسب احتمال الحدث C : سحب كرية حمراء على الأقل

(3) نعيد التجربة و نضيف صندوقين بحيث نرمز لـ U_k للصندوق k ($1 \leq k \leq 3$) الذي يحتوي على k كرية

حمراء و $n - k$ كرية سوداء ، نختار عشوائيا صندوق من الصناديق الثلاثة و نسحب في آن واحد كرتين .

نسمي RR حادثة " الحصول على كرتين حمراويتين" و NN حادثة " الحصول على كرتين سوداويتين"

و RN حادثة " الحصول على كرتين مختلفتين في اللون "

ليكن المتغير X العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكرات الحمراء .

(أ) انجز شجرة الإحتمالات

(ب) عين مجموعة قيم X .

(ج) أثبت أن : $P(X = 1) = \frac{4(3n - 7)}{3n(n - 1)}$ و $P(X = 2) = \frac{8}{3n(n - 1)}$

(د) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الثالث: (4 نقاط)

1. a و b عدنان طبيعيين مكتوبان في النظام ذي الأساس ثلاثة على الشكل $a = \overline{201}$ و $b = \overline{100}$

أكتب العددين a و b في النظام العشري .

2. x, y عدنان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : $ax - by = 3$

(أ) بين أنه إذا كانت الثنائيات $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 0 [3]$

(ب) استنتج حلا خاصا $(x_0; y_0)$ حيث $0 \leq x_0 < 5$ ثم حل المعادلة (E)

3. نرسم بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x; y)$ حل للمعادلة (E) .

(أ) ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

(ب) بين ان $pgcd(x, y) = pcgd(y, 3)$.

(ج) عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) حتى يكون $\frac{y}{x}$ كسرا قابلا للإختزال .

4. (u_n) و (v_n) متالتان حسابيتان معرفتان على \mathbb{N} : $u_0 = 2, u_{n+1} = u_n + 19, v_0 = 5, v_{n+1} = v_n + 9$

- عين كل الثنائيات $(p; q)$ للأعداد الطبيعية التي تحقق $u_p = v_q$ و $|q - p| \leq 20$.

التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

1] نعتبر الدالة g_n المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g_n(x) = n(x+1) + e^x$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم

أ- أدرس تغيرات الدالة g_n ثم شكل جدول تغيراتها .

ب- برهن أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل على \mathbb{R} حلا وحيدا α_n ثم تحقق أن $-2 < \alpha_n < -1$

ج- استنتج حسب قيم x إشارة $g_n(x)$

2] نعتبر الدالة f_n المعرفة على \mathbb{R} حيث : $f_n(x) = \frac{x e^x}{n + e^x}$ و نسمي (C_n) منحنيا البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j})

أ- أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_n(x) - x]$ ثم فسر النتائج بيانيا

ب- برهن انه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'_n(x) = \frac{e^x \cdot g_n(n)}{(n + e^x)^2}$

ج- بين أن : $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_n

3] أ- أدرس وضعية المنحني (C_n) بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته : $y = x$

ب- أدرس وضعية المنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) ثم أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2)

|| نعتبر التكاملين : $I = \int_{-1}^0 x e^x dx$ و $U_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$

1] أحسب : I ثم برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1, 0]$: $\frac{x e^x}{n} \leq \frac{x e^x}{n + e^x} \leq \frac{x e^x}{n + 1}$

2] بين أن المتتالية (U_n) متقاربة و حدد نهايتها

3] نضع : $V_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k+1}$

ب- استنتج ان $\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \dots + \frac{1}{n+1} \geq Ln(n+2) - Ln2$