ثانوية ابن عليوي صالح
2021/2020

المستوي : 3 ت ر
المدة : ساعتين

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الاول (7 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $U_0 = \frac{1}{5}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n+1}$

1/ بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < U_n < \frac{1}{2}$

2/ ا) تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n، $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1-2U_n)}{2U_n+1}$ استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

ب) بين ان المتتالية (U_n) متقاربة

3/ (V_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \frac{3U_n}{1-2U_n}$

ا) اثبت ان المتتالية (V_n) هندسية أساسها 2 يطلب حساب حدها الأول

ب) اكتب عبارة V_n بدلالة n ثم بين ان $U_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3}$، احسب $\lim U_n$

4/ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \ldots + \frac{1}{U_n}$

التمرين الثاني (13 نقاط)

ا g الدالة معرفة على $]1 ; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2x - (x-1)ln(x-1)$

1/ احسب $\lim_{x\to 1} g(x)$ وبين أن $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها

3/ ا) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α على $]1 ; +\infty[$ ، ثم تحقق ان $\alpha \in [e^2+1 ; e^3+1]$

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

|| f الدالة المعرفة على $]1 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{ln(x^2-1)}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1/ احسب $\lim_{x\to 1} f(x)$ ، وبين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2/ ا) بين أنه من اجل كل x من $]1 ; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

ب) بين ان f متزايدة تماما على المجال $]1 ; \sqrt{\alpha}]$ و ومتناقصة تماما على المجال $[\sqrt{\alpha} ; +\infty[$

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f

3/ بين أن $f(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

4/ يبن ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها β حيث $1,4 < \beta < 1,5$

5/ ارسم (C_f) (نأخذ $\sqrt{\alpha} \backsimeq 3$)

6/ m وسيط حقيقي ، عين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = f(m)$ حلين متمايزين

7/ h دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = f(e^x)$

ادرس اتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيراتها (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)

3as.ency-education.com

تصحيح اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات — المدة: 3 سا

التمرين الأول (7 نقاط)

$u_{n+1}=\dfrac{1}{2+\frac{1}{u_n}}=\dfrac{u_n}{2u_n+1}$; $u_0=\dfrac{1}{3}$

(1) البرهان بالتراجع على أن $0<u_n<\frac{1}{2}$:

$P(n)$: $0<u_n<\frac{1}{2}$

$P(0)$: $0<u_0<\frac{1}{2}$ صحيحة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة

$0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $1<2u_n+1<2$ ومنه $0<\frac{u_n}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$

أي $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}$ إذن $P(n+1)$ صحيحة

خلاصة: $0<u_n<\frac{1}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي n

(2) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n}{2u_n+1}-u_n=\dfrac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\dfrac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$

$1-2u_n>0$ لأن $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$ ومنه $u_n>0$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة

المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة

(3) $v_n=\dfrac{3u_n}{1-2u_n}$

$v_{n+1}=\dfrac{3u_{n+1}}{1-2u_{n+1}}=\dfrac{6u_n}{1-2u_n}=2v_n$

$v_0=1$ و $q=2$ ومنه (v_n) هندسية

$v_n=2^n$ لأن $|q|>1$

$u_n=\dfrac{v_n}{2v_n+3}$ أي $v_n=\dfrac{3u_n}{1-2u_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{2^n\left[2+\frac{3}{2^n}\right]}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2+\frac{3}{2^n}}=\dfrac{1}{2}$

التمرين الثاني (13 نقطة)

$D=]1;+\infty[$; $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$

(I) (1) $\lim\limits_{x\to1}g(x)=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\left[\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{\ln(x-1)}{x-1}\right]=-\infty$

(2) $g'(x)=2-\ln(x-1)-\dfrac{x-1}{x-1}=1-\ln(x-1)$

$1-\ln(x-1)=0$ تعني $x=e+1$

x	1		$e+1$		$+\infty$
$1-\ln(x-1)$		$+$	0	$-$	

$g(e+1)=2(e+1)-(e+1)\ln(e)=e+2$

x	1		$e+1$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$e+2$	$\searrow$	$-\infty$

$g(3)=6-2\ln2>0$ و $g(e^3+1)=2-e^3<0$

g مستمرة ورتيبة تماما على $[e+1;+\infty[$ و $0\in[2-e^3;e+2]$

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $[e+1;+\infty[$

$g(e^2+1)\times g(e^3+1)<0$ و $e^2+1<\alpha<e^3+1$

$g(x)=0$ تكافئ $x=\alpha$

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

(II) $D=]1;+\infty[$; $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$

(1) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2(1-\frac{1}{x^2}))}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{\ln(1-\frac{1}{x^2})}{x}=0$

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

(2) $f'(x)=\dfrac{\frac{2x}{x^2-1}\times x-\ln(x^2-1)}{x^2}=\dfrac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}=\dfrac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x^2)$

$x=\sqrt{\alpha}$ تعني $x^2=\alpha$ تعني $g(x^2)=0$

x	1		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$g(x^2)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\sqrt{\alpha})$	$\searrow$	0

$f(\sqrt{\alpha})=\dfrac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$

$2\alpha-(\alpha-1)\ln(\alpha-1)=0$ لأن $g(\alpha)=0$

إذن $\ln(\alpha-1)=\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$

$f(\sqrt{\alpha})=\dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha-1)}=\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين هما 1 و β حيث $1,4<\beta<1,5$

$f(1,5)\approx0,14$ و $f(1,4)\approx-0,029$

$f(1,4)\times f(1,5)<0$

$f(x)=0$ تكافئ $x=1$ أو $x=\beta$

المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3 يشمل النقطة $M(\beta;0)$

$f(3)=\frac{3}{4}=0,75$ و $\sqrt{\alpha}=3$ أي $\alpha=9$

معادلة (T): $y=f'(3)(x-3)+f(3)$ أي $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$

$m\in]\beta;\sqrt{\alpha}[=]\beta;3[$ تقبل حلا وحيدا α في $]\beta;+\infty[$

(3) $h(x)=f(e^x)$ على $]0;+\infty[$

$h'(x)=e^x\times f'(e^x)$

$e^x>0$ و $f'(e^x)$ من إشارة $h'(x)$ لأن $e^x>1$ من أجل $x>0$

$f'(e^x)=0$ تعني $e^x=\sqrt{\alpha}$ تعني $x=\ln\sqrt{\alpha}$

h متناقصة تماما على $]0;\ln\sqrt{\alpha}]$ و متزايدة تماما على $[\ln\sqrt{\alpha};+\infty[$

x	0		$\ln\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$	$\nearrow$	0

$\lim\limits_{x\to0}h(x)=\lim\limits_{x\to0}f(e^x)=\lim\limits_{X\to1}f(X)=-\infty$ ($e^x=X$)

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(e^x)=\lim\limits_{X\to+\infty}f(X)=0$ ($e^x=X$)

$h(\ln\sqrt{\alpha})=f(e^{\ln\sqrt{\alpha}})=f(\sqrt{\alpha})=\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

(4) $S_n=\dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dots+\dfrac{1}{u_n}$

$\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{2^{n+1}+3}{2^n}=\dfrac{2^{n+1}}{2^n}+\dfrac{3}{2^n}=2+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$w_0=3$ و $q=\frac{1}{2}$ و $w_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$S_n=2+w_0+2+w_1+\dots+2+w_n$

$=2(n+1)+w_0\left(\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$

$=2n+2+6-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$S_n=2n+8-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$