| | |
|---|---|
| المستوى: الثالثة ثانوي تسيير و اقتصاد | جانفي 2021 |
| الفرض الثاني للثلاثي الأول في الرياضيات | المدة: 1 سا |

**تمرين:**

لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4}$.

1) احسب الحدود $u_1$، $u_2$ و $u_3$.

2) أبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن: $u_n < 2$.

3) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $v_n = u_n - 2$.

أ) بيّن أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

جـ) ما هي نهاية المتتالية $(u_n)$؟

4) احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$.

بالتوفيق

الأستاذ زوبير عبد الرحيم

# التصحيح النموذجي

## الحل :

لدينا: $(u_n)$ متتالية عددية معرفة بـ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4} \end{cases}$

$u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4}$ معناه: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{2}{4}$

1) حساب الحدود $u_1$، $u_2$ و $u_3$:

- $u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}(1) + \frac{2}{4} = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4}$
- $u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{2}{4} = \frac{15+8}{16} = \frac{23}{16}$
- $u_3 = \frac{3}{4}u_2 + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{23}{16}\right) + \frac{2}{4} = \frac{69+32}{64} = \frac{101}{64}$

2) أ-البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن، $u_n < 2$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة **01**: من أجل $n = 0$

لدينا: $u_0 = 1 < 2$ إذن: $P(\mathbf{0})$ صحيحة.

المرحلة **02**:

- نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n < 2$ (فرضية التراجع)
- ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $\boxed{u_{n+1} < 2}$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n < 2$

ومنه: $\frac{3}{4}u_n < \frac{6}{4}$

وعليه: $\frac{3}{4}u_n + \frac{2}{4} < \frac{6}{4} + \frac{2}{4}$

أي: $\boxed{u_{n+1} < 2}$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n < 2$.

3) لدينا: $(v_n)$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $v_n = u_n - 2$.

لتبيان أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول:

نكتب $v_{n+1}$ بدلالة $v_n$.

لدينا: $v_n = u_n - 2$، ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{3}{4}u_n + \frac{2}{4} - 2 = \frac{3}{4}u_n - \frac{6}{4} = \frac{3}{4}u_n - \frac{3\times 2}{4} = \frac{3}{4}(u_n - 2) = \frac{3}{4}v_n$$

أي: $\boxed{v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n}$.

إذن: $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{3}{4}}$ وحدها الأول $\boxed{v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1}$.

بكتابة عبارة $v_n$ بدلالة $n$:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$:

لدينا: $v_n = u_n - 2$ إذن: $\boxed{u_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2}$.

جـ-حساب نهاية المتتالية $(u_n)$:

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ (لأن $-1 < \frac{3}{4} < 1$)، إذن: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2}$.

4) حساب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$:

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{3}{4}}\right) = -\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}}\right)$

ومنه: $S_n = -4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4$.

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن، $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$:

لدينا: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \cdots + (v_n + 2)$

ومنه: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + 2(n - 0 + 1)$

وعليه: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = S_n + 2n + 2 = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4 + 2n + 2 = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$