

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

**التمرين الأول : ( 05 نقاط )**

1. تحقق أن  $5^6 \equiv 1[7]$  و إستنتج أن  $5^{2016} \equiv 1[7]$
2. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع :  $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n$   
 (أ) بين أنه من أجل  $n$  من  $\mathbb{N}$  فإن  $4S_n = 5^{n+1} - 1$  و إستنتج أن  $S_n$  و  $5^n$  أوليان فيما بينهما ,  
 (ب) ليكن العدد الصحيح  $a$  . بين أن  $4S_n \equiv a[7]$  إذا و فقط إذا كان  $S_n \equiv 2a[7]$  .  
 (ت) بين أن  $4S_{2015} \equiv 0[7]$  و إستنتج باقي قسمة  $S_{2015}$  على 7  
 (ث) عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم  $n$  بحيث يكون 7 قاسم لـ  $S_n$
3. ليكن  $n$  عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة  $5^n x + S_n y = 1$  ..... (E)  
 تحقق أن  $(4, -5)$  حل للمعادلة (E) ثم حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة (E) .

**التمرين الثاني : ( 04 نقاط )**

- الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  و  $\alpha$  عدد حقيقي من المجال  $]0, \pi[$
- لتكن  $(S_\alpha)$  مجموعة النقط  $M(x, y, z)$  حيث :  $OM^2 - 2\cos(\alpha)[\vec{OM} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})] + 3 - 4\sin^2(\alpha) = 0$
1. (أ) أعط معادلة ديكارتية لـ  $(S_\alpha)$
  - (ب) بين أن  $(S_\alpha)$  هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها  $I_\alpha$  و نصف قطرها  $R_\alpha$  .  
 (ت) إستنتج مجموعة النقط  $I_\alpha$  عندما يسمح  $\alpha$  المجال  $]0, \pi[$  .
  2. (أ) عين سطوح الكرات  $(S_\alpha)$  التي تمر بالمبدأ  $O$  .  
 (ب) بين أن  $O$  منتصف القطعة  $[I_{\pi-\alpha} I_\alpha]$  .  
 (ت) إستنتج أن  $(S_\alpha)$  و  $(S_{\pi-\alpha})$  متناظران بالنسبة إلى  $O$  .
  3. ليكن المستوي  $(P)$  ذو المعادلة :  $x + y + z = 0$   
 (أ) عين إحداثيات النقطة  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $I_\alpha$  على  $(P)$  .  
 (ب) أدرس تقاطع  $(P)$  و  $(S_\alpha)$  .

### التمرين الثالث : (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$   
نعتبر النقطة  $A$  ذات اللاحقة 2 و  $(C)$  الدائرة ذات المركز  $O$  وتشمل  $A$ .

1. نضع  $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$

(أ) بين أن  $\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8$

(ب) بين أن النقطتين  $B$  و  $C$  لاحتقاهما على الترتيب  $\alpha$  و  $\bar{\alpha}$  تنتميان إلى الدائرة  $(C)$ .

(ت) أنشئ  $(C)$  و النقط  $A, B$  و  $C$ .

2. لتكن  $D$  نقطة من الدائرة  $(C)$  لاحتقتها  $2e^{i\theta}$  حيث  $\theta$  عدد حقيقي ينتمي إلى المجال  $]-\pi, \pi]$  و  $E$  صورة

$D$  بالدوران الذي مركزه  $O$  و زاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

- برر أن لاحقة النقطة  $E$  هي  $z_E = \alpha e^{i\theta}$  و علم في نفس الشكل النقطتين  $D$  و  $E$ .

3. لتكن النقطتان  $F$  و  $G$  منتصفا القطعتين  $[BD]$  و  $[CE]$  على الترتيب.

(أ) برر أن لاحقة  $F$  و  $G$  هما  $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$  و  $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}$  على الترتيب.

(ب) بين أن  $\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}$  (يمكن إستعمال السؤال 1) (أ) و إستنتج طبيعة المثلث  $AFG$ .

### التمرين الرابع : (07 نقاط)

لنعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{0; 1\}$  كالتالي:  $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

و ليكن  $(C_f)$  التمثيل البياني للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. (أ) أحسب النهايات عند حدود مجالات التعريف.

(ت) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D_f$  فإن:  $f'(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{2x(x-1)}$  ثم استنتج إشارة  $f'(x)$ .

(ث) شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

2. اثبت أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلته  $y = -\frac{1}{2}x$  هو مقارب مائل للمنحني  $(C_f)$ .

3. أدرس الوضعية النسبية للمنحني  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(\Delta)$ .

4. أثبت أن النقطة  $\omega\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$  هي مركز تناظر للمنحني  $(C_f)$ .

5. أثبت أن المعادلة:  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  حيث:  $\frac{2}{5} < x_0 < \frac{9}{20}$

6. أرسم  $(C_f)$ .

7. لنعتبر الدالة  $g$  المعرفة كما يلي:  $g(x) = -\frac{1}{2}|x| + \ln\left|\frac{|x|-1}{|x|}\right|$

(أ) عين مجموعة تعريف الدالة  $g$ .

(ب) ادرس شفعية الدالة  $g$ .

(ت) بين كيف يمكن رسم المنحني  $(C_g)$  للدالة  $g$  انطلاقا من  $(C_f)$ . (رسم  $(C_g)$  غير مطلوب).

8. (أ) بإستعمال التكامل بالتجزئة أحسب كلا من  $\int_2^3 \ln(x) dx$  و  $\int_2^3 \ln(x-1) dx$ .

(ت) إستنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  و المستقيمت التي معادلاتها  $x = 2$  و  $x = 3$

## الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

- نعتبر المعادلة :  $21x - 17y = 8$ .....(\*) حيث  $x$  و  $y$  عددين طبيعيين .
- أ- عين الثنائية  $(x_0, y_0)$  حل للمعادلة (\*).
  - ب - حل في  $\mathbb{N}^2$  للمعادلة (\*).
  - أ - ادرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي القسمة الاقليدية للعدد  $9^n$  على 13 ،  
ب - بين أنه إذا كان  $(\alpha, \beta)$  حل للمعادلة (\*) فان :  $3^{34\beta+20} - 9^{21\alpha} - 2 \equiv 0 [13]$ .
  - أ- بين أنه إذا كان  $(x, y)$  حلا للمعادلة (\*) و  $x$  مضاعف لـ 4 فان  $y \equiv 0 [4]$  .  
ب - عين الثنائيات  $(x, y)$  حلول المعادلة (\*) التي يكون من أجلها :  $PGCD(x, y) = 4$  .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية إختار الإقتراح الصحيح مع التعليل

- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  .

نعتبر النقطتان  $A$  و  $B$  لاحتماهما على الترتيب 1 و  $i$  . مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  بحيث يكون  $\frac{z-i}{z-1}$

حقيقي هي : أ . المستقيم  $(AB)$  بإستثناء  $A$  ، ب . القطعة المستقيمة  $[AB]$  بإستثناء  $A$

ج . الدائرة التي قطرها  $[AB]$  بإستثناء  $A$  .

- إذا كانت طويلة عدد مركب  $z$  هي 3 فإن مرافق  $z$  هو :

أ .  $\frac{3}{z}$  ، ب .  $\frac{\sqrt{3}}{z}$  ، ج .  $\frac{9}{z}$

- ليكن  $z$  عدد مركب  $|z+i|$  هي :

أ .  $|z|+1$  ، ب .  $\sqrt{z^2+1}$  ، ج .  $|iz-1|$

- ليكن  $z$  عدد مركب غير معدوم حيث  $\theta$  عمدة له . عمدة العدد المركب  $\frac{-1+i\sqrt{3}}{z}$  هي :

أ .  $-\frac{\pi}{3} + \theta$  ، ب .  $\frac{2\pi}{3} + \theta$  ، ج .  $\frac{2\pi}{3} - \theta$

- لتكن النقطة  $\Omega$  ذات اللاحقة  $1-i$  .

مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z = x + iy$  و تحقق  $|z-1+i| = |3-4i|$  لها معادلة من الشكل :

أ .  $y = -x + 1$  ، ب .  $(x-1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$  ، ج .  $z = 1-i + 5e^{i\theta}$  حيث  $\theta$  عدد حقيقي .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

- نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة كما يلي :  $U_0 = \frac{3}{2}$  و  $U_{n+1} = \frac{4U_n}{U_n+3}$  .

أ- بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فان :  $U_n > 1$  .

ب- ادرس رتبة المتتالية  $(U_n)$  ، ماذا تستنتج ؟

2. لتكن المتتالية  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ :  $V_n = \frac{U_n}{U_n - 1}$

(أ) بين أن المتتالية  $(V_n)$  هندسية ، عين أساسها و حدها الأول .

(ب) عبر عن  $V_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج أن :  $U_n = \frac{3}{3 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$  و أحسب نهاية  $(U_n)$  .

3. لتكن المتتالية  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  حيث :  $W_n = \frac{V_n}{n^2}$  .

(أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم :  $W_n = 3e^{n \ln\left(\frac{4}{3}\right) - 2 \ln(n)}$

(ب) أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$  .

### التمرين الرابع : (07 نقاط)

I . نعتبر الدالة  $f_k$  المعرفة على المجموعة  $\mathbb{R}$  بـ :  $f_k(x) = \frac{k}{e^{kx} + 1}$  (  $k$  عدد حقيقي غير معدوم )

نرمز بـ  $(C_k)$  للمنحنى الممثل للدالة  $f_k$  في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  حيث  $\|\vec{i}\| = 4cm$  و  $\|\vec{j}\| = 2cm$  .

1. احسب نهايات الدالة  $f_k$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$  حسب قيم  $k$  ثم فسر النتيجة هندسيا .

2. ليكن  $(D_k)$  المستقيم المقارب للمنحنى  $(C_k)$  و الذي معادلته  $y = k$

(أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f_k(x) = k - \frac{k e^{kx}}{e^{kx} + 1}$  ،

(ب) أدرس حسب قيم  $k$  الوضع النسبي للمنحنى  $(C_k)$  و  $(D_k)$

3. أدرس حسب قيم  $k$  اتجاه تغير الدالة  $f_k$  ثم شكل جدول تغيراتها .

4. أكتب معادلة لمماس  $(\Delta_k)$  للمنحنى  $(C_k)$  في النقطة ذات الفاصلة  $O$  .

II

1. أثبت أن :  $f_3(x) - f_{-3}(x) = 3$  مستنتجا طبيعة التحويل الذي يحول المنحنى  $(C_3)$  إلى المنحنى  $(C_{-3})$

2. أنشئ  $(\Delta_3)$  و  $(C_3)$  ثم استنتج إنشاء  $(\Delta_{-3})$  و  $(C_{-3})$

3.  $\alpha$  عدد حقيقي موجب تماما .

$A(\alpha)$  هي المساحة بالسنتيمتر مربع للحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_3)$  و المستقيمت التي معادلاتها

$$y = 0 \quad , \quad x = 0 \quad \text{و} \quad x = \alpha$$

(أ) أثبت أن :  $A(\alpha) = 3\alpha - \ln(e^{3\alpha} + 1) + \ln(2)$

(ب) أحسب نهاية  $A(\alpha)$  لما  $\alpha$  يؤول إلى  $+\infty$