

الموضوع الثالث

التمرين الأول:

من أجل كل عدد صحيح  $n$  نضع :  $A(n) = n^2 - n + 2007$

- 1 أ - حلل إلى جداء عوامل أولية العددين 4014 و  $A(1)$  .
- ب - أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 4014 و  $A(1)$  .
- 2 بين أنه إذا كان 3 يقسم  $n$  فإن 3 يقسم  $A(n)$  ، وهل العكس صحيح ؟ برر إجابتك .
- 3 تحقق أنه من أجل كل عدد صحيح  $n$  :  $(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = (n^2 - n + 2007) + 2n$
- 4 بين أنه إذا كان  $A(n)$  عدد فردي فإن  $A(n+1)$  عدد فردي .
- 5 عين الأعداد الصحيحة  $n$  التي يكون من أجلها  $A(n)$  يقسم  $A(1)$  .

التمرين الثاني:

عين في كل حالة من الحالات التالية الاقتراح الوحيد مع التبرير

1 مجموعة حلول المعادلة التفاضلية  $y' + 3y = 0$

$y = Ce^{\frac{1}{3}x}$	$y = Ce^{-\frac{1}{3}x}$	$y = Ce^{3x}$	$y = Ce^{-3x}$
-------------------------	--------------------------	---------------	----------------

2 مجموعة حلول المعادلة التفاضلية  $y' - 2y = 6$

$y = Ce^{\frac{1}{2}x} + 3$	$y = Ce^{2x} - 3$	$y = Ce^{\frac{1}{2}x} + 3$	$y = Ce^{2x} + 3$
-----------------------------	-------------------	-----------------------------	-------------------

3 العدد  $3 - \ln(e^2) + e$  يساوي

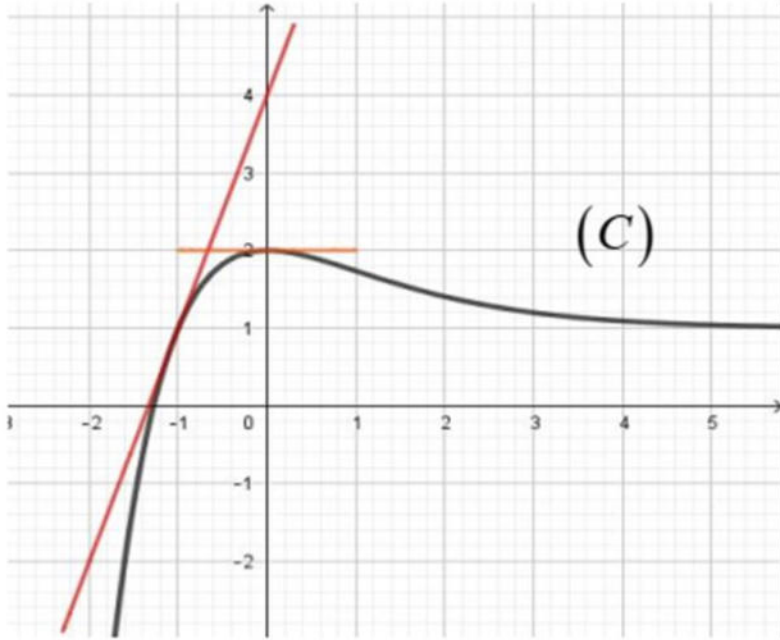
$1+e$	2	0	$2-e$
-------	---	---	-------


4 العدد  $e^{-3\ln(2)}$  يساوي

$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	8	1
---------------	---------------	---	---

5 حلول المعادلة  $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$  هي

$\{e^2; e^3\}$	$\left\{\ln\left(\frac{1}{2}\right); \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$	$\{\ln(2); \ln(3)\}$	$\{2; 3\}$
----------------	---	----------------------	------------



المستوي منسوب الى المعلم المتعامد و   
 المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ، المنحنى  $(C)$  في  
 الشكل هو لدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  
 $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$  حيث  $a$  و  $b$   
 عدنان حقيقيان .  
 1. أ - بقراءة بيانية عين  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم فسر النهاية الأخيرة بيانياً .  
 ب - عين كل من :  $f(0)$  ،  $f(1)$  ،  
 $f'(0)$  ،  $f'(1)$  .


ج - اعتماداً على ما سبق جد قيمة كل من  $a$  و  $b$  ثم استنتج عبارة  $f(x)$  .

2. أ - بين أن المعادلة تقبل  $f(x) = 0$  حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $-1,4 < \alpha < -1,2$  .

ب - استنتج إشارة  $f(x)$  على  $\mathbb{R}$  .

3. نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $h(x) = (|x| + 1)e^{-x} + 1$

- احسب كلا من  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x) - 2}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 2}{x}$  ثم فسر النتيجة هندسياً ، (نقبل أن :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1$ )

نضع فيما يلي :  $f(x) = (x + 1)e^{-x} + 1$  ونعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي  $g(x) = x - \frac{x + 2}{e^x}$  و 

$(C_g)$  منحنائها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ،  $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm)$

1. أ - احسب كلا من  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  .

ب - بين أن المستقيم  $(T)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل لمنحنى الدالة  $g$  بجوار  $(+\infty)$  .

2. أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :  $g'(x) = f(x)$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أكتب معادلة المماس ( $\Delta$ ) للمنحنى ( $C_g$ ) في النقطة التي فصلتها 1 - .

4. بين أن  $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1}$  ثم استنتج حصرا للعدد  $g(\alpha)$ .

5. أ- أحسب  $g(0)$  ثم أنشئ كلا من ( $\Delta$ )، ( $T$ ) والمنحنى ( $C_g$ ).

ب -  $m$  وسيط حقيقي ، ناقش حسب قيم  $m$  عدد و إشارة حلول المعادلة  $g(x) = x + m$ .

الأستاذة زروقي عيسى

بالتوفيق

انتهى

﴿ ترقبوا الحلول قريبا إن شاء الله ﴾

حل الموضوع الثالث

التمرين الأول:

من أجل كل عدد صحيح  $n$  نضع :  $A(n) = n^2 - n + 2007$

(1) أ - تحليل إلى جداء عوامل أولية للعددين 4014 و  $A(1)$  :

$$A(1) = (1)^2 - 1 + 2007 = 2007 = 3^2 \times 223$$

$$4014 = 2A(1) = 2 \times 3^2 \times 223$$

ب - إيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 4014 و  $A(1)$  :

$$p \gcd(A(1); 4014) = p \gcd(A(1); 2A(1)) = A(1) = 2007$$

(2) التبين أنه إذا كان 3 يقسم  $n$  فإن 3 يقسم  $A(n)$  :

لدينا : 3 يقسم  $n$  وبالتالي 3 يقسم  $n^2$  و 3 يقسم  $n$  وبالتالي 3 يقسم  $-n$

ومن جهة اخرى 3 يقسم 2007 ومنه : إذا كان 3 يقسم  $n$  فإن 3 يقسم  $n^2 - n + 2007$  أي : إذا كان 3 يقسم  $n$  فإن 3 يقسم  $A(n)$

العكس غير صحيح لأن :  $A(4) = (4)^2 - 4 + 2007 = 2019$  أي أن 3 يقسم  $A(n)$  من أجل  $n = 4$  لكن 3 لا يقسم 4 .

(3) التحقق أنه من أجل كل عدد صحيح  $n$  :  $(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = (n^2 - n + 2007) + 2n$

$$(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = [n^2 + 2n + 1] - (n+1) + 2007$$

$$= n^2 + 2n - n + 1 - 1 + 2007$$

$$= n^2 + n + 2007$$

$$= (n - n + 2007) + 2n$$

(4) التبين أنه إذا كان  $A(n)$  عدد فردي فإن  $A(n+1)$  عدد فردي :

إذا كان  $A(n)$  فردي فإنه يوجد عدد صحيح  $k$  :  $A(n) = 2k + 1$

لدينا :  $A(n) = n^2 - n + 2007$  ومنه :  $A(n+1) = (n+1)^2 - (n+1) + 2007$  أي أن :

$$A(n+1) = A(n) + 2n + 2k + 1 + 2n = 2(k+n) + 1$$

نضع :  $k' = k + n$  ومنه :  $A(n+1) = 2k' + 1$  حيث  $k'$  عدد صحيح

الخلاصة : إذا كان  $A(n)$  عدد فردي فإن  $A(n+1)$  عدد فردي كذلك .

(5) تعيين الاعداد الصحيحة  $n$  التي يكون من أجلها  $A(n)$  يقسم  $A(1)$  :

$A(n)$  يقسم  $A(1)$  معناه  $n^2 - n + 2007$  يقسم 2007 ونعلم أن مجموعة قواسم 2007 هي :

$\{-2007; -669; -223; -9; -3; -1; 1; 3; 9; 223; 669; 2007\}$  ومنه

$n^2 - n + 2007 =$	-2007	-669	-223	-9	-3	-1	1	3	9	223	669	2007
--------------------	-------	------	------	----	----	----	---	---	---	-----	-----	------

ومنه  $n = 1$  أو  $n = 0$

التمرين الثاني:

تعين في كل حالة من الحالات التالية الاقتراح الوحيد مع التبرير

(1) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية  $y' + 3y = 0$  أي  $y' = -3y$  حلها هو  $y = Ce^{-3x}$

(2) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية  $y' - 2y = 6$  أي  $y' = 2y + 6$  حلها هو  $y = Ce^{2x} - \frac{6}{2}$  أي  $y = Ce^{2x} - 3$

(3) العدد  $3 - \ln(e^2) + e$  يساوي  $1+e$  لأن :  $3 - \ln(e^2) + e = 3 - 2 + e = 1+e$

(4) العدد  $e^{-3\ln(2)}$  يساوي  $\frac{1}{8}$  لأن :  $e^{-3\ln(2)} = e^{\ln(2)^{-3}} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

(5) حلول المعادلة  $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$  هي  $\{\ln(2); \ln(3)\}$  لأن : بوضع  $t = e^x$  تصبح المعادلة  $t^2 - 5t + 6 = 0$

نحسب المميز :  $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$  ومنه تقبل حلين متمايزين هما :  $t_1 = 3$  و  $t_2 = 2$

بالعودة الى المتغير الأصلي :  $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$  ،  $e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$

التمرين الثالث:

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ، المنحنى  $(C)$  في الشكل هو لدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  كما

يلي :  $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$  حيث  $a$  و  $b$  عددان حقيقيان .

1. أ - بقراءة بيانية تعين  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  وتفسير النهاية الأخيرة بيانياً .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b)e^{-x} + 1 = 1 ، \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b)e^{-x} + 1 = -\infty$$

تفسير النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  بيانياً :

المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  هو مستقيم مقارب افقي موازي لمحور الفواصل بجوار  $(+\infty)$ .

ب - تعين كل من :  $f(0)$  ،  $f(1)$  ،  $f'(0)$  ،  $f'(-1)$ .

$$f(-1) = 1 \text{ ، } f(0) = 2$$

$f'(0) = 0$  هو معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها 0 وهو افقي وعليه:

$f'(-1)$  هو معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها -1 والمار بالنقطتين  $(0; 4)$  و  $(-2; -2)$  وعليه :

$$f'(-1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - (-2)}{0 - (-2)} = \frac{6}{2} = 3$$

ج - اعتمادا على ما سبق ايجاد قيمة كل من  $a$  و  $b$  واستنتاج عبارة  $f(x)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} b=1 \\ a=1 \end{array} \right. : \text{ومنه} \quad \left\{ \begin{array}{l} b=1 \\ (-a+1)e=0 \end{array} \right. : \text{ومنه} \quad \left\{ \begin{array}{l} b+1=2 \\ (-a+b)e+1=1 \end{array} \right. \text{تكافئ} \quad \left\{ \begin{array}{l} (a(0)+b)e^{0+1}=2 \\ (a(-1)+b)e^{-1+1}=1 \end{array} \right. \text{تكافئ} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(0)=2 \\ f(-1)=1 \end{array} \right. \text{لدينا}$$

2. أ - تبيان أن المعادلة تقبل  $f(x) = 0$  حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-1,4 < \alpha < -1,2$

لدينا :  $f$  مستمرة علي  $[-1,4; -1,2]$  و  $f(-1,2) = 0,33$  و  $f(-1,4) = -0,62$  و  $f(-1,2) \times f(-1,4) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $-1,4 < \alpha < -1,2$

ب - استنتاج إشارة  $f(x)$  على  $\mathbb{R}$  :

نلخص النتائج في الجدول التالي :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$		-	+

3. نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $h(x) = (|x|+1)e^{-x} + 1$

- حساب كلا من  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)-2}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)-2}{x}$  ثم تفسر النتيجة هندسيا :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{(|x|+1)e^{-x} + 1 - 2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{(x+1)e^{-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{xe^{-x}}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{x} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{(|x|+1)e^{-x} + 1 - 2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{(-x+1)e^{-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{-xe^{-x}}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{x} \right) = -2$$

التفسير الهندسي :

الدالة لا تقبل الاشتقاق عند النقطة التي فاصلتها 0 ومنحناها يقبل يقبل نصف مماسي معامل توجيهها 0 و -2 .

نضع فيما يلي:  $f(x) = (x+1)e^{-x} + 1$  ونعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي  $g(x) = x - \frac{x+2}{e^x}$  و  $(C_g)$  منحناها البياني في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ،  $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm})$  .

1. أ - حساب كلا من  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - \frac{x+2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 - \frac{1+\frac{2}{x}}{e^x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{x+2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right) = +\infty$$

ب - تبيان أن المستقيم  $(T)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل لمنحنى الدالة  $g$  بجوار  $(+\infty)$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{x+2}{e^x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right) = 0$$

فإن المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل لمنحنى الدالة  $g$  بجوار  $(+\infty)$  .

2. أ - تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن  $g'(x) = f(x)$  :

$g$  تقبل الاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = \left( x - \frac{x+2}{e^x} \right)' = (x - (x+2)e^{-x})' = 1 - ((1-x-2)e^{-x}) = 1 - (-x-1)e^{-x} = f(x)$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا من السؤال السابق :  $g'(x) = f(x)$  ومنه إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $f(x)$  وعليه :

- $g'(x) = 0$  تكافئ  $f(x) = 0$  ومنه  $x = \alpha$
- $g'(x) < 0$  تكافئ  $f(x) < 0$  ومنه  $x \in ]-\infty; \alpha[$  ومنه  $g$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; \alpha[$
- $g'(x) > 0$  تكافئ  $f(x) > 0$  ومنه  $x \in ]\alpha; +\infty[$  ومنه  $g$  متزايدة تماما على المجال  $]\alpha; +\infty[$  .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(\alpha)$	$+\infty$

3. كتابة معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(C_g)$  في النقطة التي فاصلتها -1 :

$$(\Delta): y = g'(-1)(x - (-1)) + g(-1)$$

ولدينا :  $g'(-1) = f(-1) = 1$  وكذلك  $g(-1) = -1 - e$  ومنه  $(\Delta): y = 1(x + 1) - 1 - e$  ومنه  $(\Delta): y = x - e$

4. تبيان أن  $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1}$  واستنتاج حصرا للعدد  $g(\alpha)$ .

$$g(\alpha) = \alpha - (\alpha + 2)e^{-\alpha}$$

وكذلك لدينا :  $f(\alpha) = 0$  تكافئ  $(\alpha + 1)e^{-\alpha} + 1 = 0$  نستخرج منها قيمة  $e^{-\alpha}$  أي :  $e^{-\alpha} = \frac{-1}{\alpha + 1}$  ونعوضها في  $g(\alpha)$

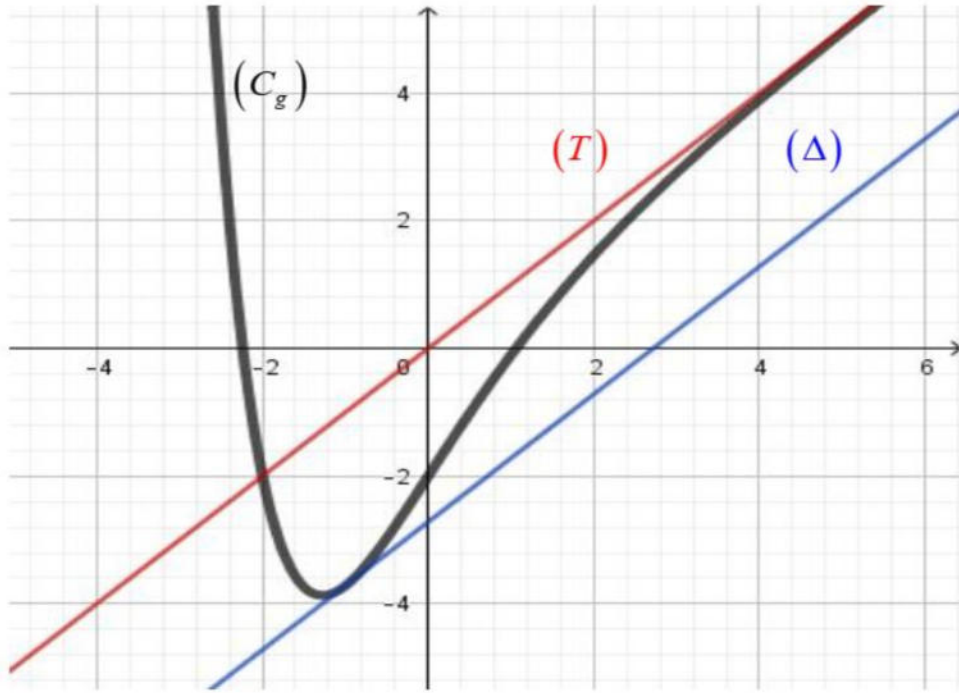
$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \alpha - (\alpha + 2) \frac{-1}{\alpha + 1} \\ &= \alpha + \frac{(\alpha + 1) + 1}{\alpha + 1} \\ &= \alpha + \frac{\alpha + 1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha + 1} \\ &= \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1} \end{aligned}$$

نجد :

$$g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1} \text{ ومنه :}$$

5. أ - حساب  $g(0)$  ثم أنشاء كلا من  $(\Delta)$ ،  $(T)$ ، والمنحنى  $(C_g)$  :  $g(0) = 0 - \frac{0+2}{e^0} = 0 - \frac{0+2}{1} = -2$





ب - المناقشة حسب قيم  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $g(x) = x + m$  :

حلول المعادلة  $g(x) = x + m$  هي فواصل نقط تقاطع  $(C_g)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = x + m$  والموازي للمستقيمين  $(T)$  و  $(\Delta)$

- من أجل  $m \in ]-\infty; -e[$  المعادلة ليس لها حلول .
- من أجل  $m = -e$  المعادلة لها حل مضاعف سالب تماما
- من أجل  $m \in ]-e; -2[$  المعادلة لها حلان سالبان تماما .
- من أجل  $m = -2$  المعادلة لها حلان أحدهما سالب و الاخر معدوم .
- من أجل  $m \in ]-2; 0[$  المعادلة لها حلان مختلفان في الإشارة .
- من أجل  $m \in ]0; +\infty[$  المعادلة لها حل واحد سالب تماما .