الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مواضيع لتحضير بكالوريا 2020 من إعداد الأستاذ: زروقي عيسى

الموضــــــوع الــخامس

التمرين الأول:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة الاتية: $5x-6y=3$............(1)

1. أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 3 .
2. استنتج حلا خاصا للمعادلة (1) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1).
3. استنتج حلول الجملة E: $\begin{cases} x\equiv -4[5] \\ x\equiv -1[6] \end{cases}$
4. حلل العدد 2016 الى عوامل أولية ثم استنتج الاعداد التي مربعاتها تقسم العدد 2016
5. نضع $m=PPCM(a,b)$ و $d=PGCD(a,b)$ عين العددين الطبيعيين a و b حيث أن : $m^2-2d^2=2016$

التمرين الثاني:

اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل مما يلي:

	الجواب – أ -	الجواب – ب -	الجواب – ج -
حلول المعادلة التفاضلية $2y'+y-3=0$ هي	$y=ce^{\frac{-x}{2}}-3$	$y=ce^{\frac{-x}{2}}+2$	$y=ce^{\frac{-x}{2}}+3$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+e)-1}{x}$	e	e^{-1}	$2e$
حلول المتراجحة $\ln(-2x+1)\prec 3$ هي	$S=\left]\frac{1-e^3}{2};\frac{1}{2}\right[$	$S=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$	$S=\left]-\infty;\frac{1-e^3}{2}\right[$
إذا كان $f(x)=\ln(e^{2x}+1)$ فإن (C_f) يقبل	مقارب عمودي معادلته $x=-1$	مقارب أفقي معادلته $y=-1$ عند $-\infty$	مقارب مائل معادلته $y=2x$ عند $+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sin(x)-x}{x^2}$	0	1	2

التمرين الثالث: يحتوي صندوق على 12 كرية لا نفرق بينها باللمس منها 3 كريات بيضاء مرقمة بالأرقام 1 و 1 و 2 وأربع كريات حمراء مرقمة بالأرقام 1 و 1 و 2 و 2 و خمس كريات خضراء مرقمة بالأرقام 1 و 2 و 2 و 2 و 3 و 3 ، نسحب من الصندوق كرتين في ان واحد .

1) أ – احسب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب .

2) ب - لتكن الحادثتان A و B حيث : A " سحب كريتان من نفس اللون " ، B " سحب كرية خضراء على الأقل "

- أحسب احتمال الحوادث التالية : A ، B ، $A \cap B$

ج- هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟

3) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة مجموع الرقمين المحصل عليهما .

أ- عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ثم عين قانون احتماله .

ب- احسب الامل الرياضي $E(X)$ ثم احسب الاحتمال $P\left(x^2-6x+8\leq 0\right)$.

التمرين الرابع:

i. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=1-x^2-2\ln x$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g .
2. احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

ii. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ : $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2}-2x+3$ و (C_f) منحناها البياني المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. احسب كلا من $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ ثم فسر النتيجة الأخيرة بيانيا .
2. أ - بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أ - بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α ، β حيث $0,6\prec\alpha\prec 0,8$ و $1,6\prec\beta\prec 1,8$

ب- استنتج إشارة $f(x)$.

4. أ - بين أن المستقيم الذي معادلته $y=-2x+3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ)

5. أنشئ (Δ) والمنحنى (C_f)
6. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ : $h(x)=\dfrac{2\ln|x|}{x^2}-2|x|+3$

- بين ان الدالة h زوجية ثم اشرح كيفية انشاء (C_h) اعتمادا على (C_f) .

7. نعتبر الدالة k المعرفة كما يلي: $k(x)=\ln f(x)$

- اعتمادا على السؤال 3- ب شكل جدول تغيرات الدالة k .

انتهــى بالتوفيــق

حل الموضـــــوع الـــخامس

التمرين الأول:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة الاتية: $5x-6y=3$............(1)

1. إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 3 .

لدينا (1) تكافئ $5x=6y+3=3(2y+1)$ يكافئ $5x\equiv 0[3]$ وبما أن 3 و 5 اوليان فيما بينهما لحسب مبرهنة غوص فإن $x\equiv 0[3]$ أي أن x مضاعف للعدد .

2. استنتاج حلا خاصا للمعادلة (1) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1).

من الملاحظ أن الثنائية $(3;2)$ هي حل خاص للمعادلة (1).

حل المعادلة (1) في $\mathbb{Z}^2$:

لدينا : $\begin{cases}5x-6y=3\\5(3)-6(2)=3\end{cases}$ بالطرح نجد : $5(x-3)-6(y-2)=0$ أي $5(x-3)=6(y-2)$ وبما أن 5 و 6 أوليان فيما بينهما لحسب نظرية غوص نجد : 5 يقسم $(y-2)$ ومنه $y-2=5k$ أي $y=5k+2$

و 6 يقسم $(x-3)$ ومنه $x-3=6k$ أي $x=6k+3$ ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\{(6k+3;5k+2)/k\in\mathbb{Z}\}$

3. **استنتاج حلول الجملة E:** $\begin{cases}x\equiv -4[5]\\x\equiv -1[6]\end{cases}$:

$\begin{cases}x\equiv -4[5]\\x\equiv -1[6]\end{cases}$ يعني أن $\begin{cases}x=5\alpha-4\\x=6\beta-1\end{cases}$ أي أن : $5\alpha-4=6\beta-1$ ومنه : $5\alpha-6\beta=3$ وهي تكافئ المعادلة (1)

ومما سبق $\alpha=6k+3$ ، $\beta=5k+2$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ومنه $x=5(6k+3)-4=30k+11 : k\in\mathbb{Z}$

4. تحليل العدد 2016 الى عوامل أولية و استنتاج الاعداد التي مربعاتها تقسم العدد 2016

$$2016=2^5\times 3^2\times 7$$

استنتاج الاعداد التي مربعاتها تقسم العدد 2016 :

بما أن : $2016=2^5\times 3^2\times 7$ ومنه : $2016=(2^2\times 3)^2\times 2\times 7$ أي ان القواسم المطلوبة هي قواسم ومنه : $(2^2\times 3)^2$

ومنه : $S=\{1,2,3,4,6,12\}$

5. نضع $m=PPCM(a,b)$ و $d=PGCD(a,b)$ تعيين العددين الطبيعيين a و b حيث أن : $m^2-2d^2=2016$

نعتبر العددين الطبيعيين حيث أن $m^2-2d^2=2016$ وبما أن d قاسم للعدد m فإن d^2 قاسم للعدد m^2 ومنه d^2 قاسم للعدد 2016 :

- لما $d=1$ فإن $m^2=2018$ و بما أنها ليست مربع تام فإنها مرفوضة.
- لما $d=2$ فإن $m^2=2024$ و بما أنها ليست مربع تام فإنها مرفوضة.
- لما $d=3$ فإن $m^2=2034$ و بما أنها ليست مربع تام فإنها مرفوضة.
- لما $d=4$ فإن $m^2=2048$ و بما أنها ليست مربع تام فإنها مرفوضة.
- لما $d=6$ فإن $m^2=2088$ و بما أنها ليست مربع تام فإنها مرفوضة.
- لما $d=12$ فإن $m^2=2304$ مقبول ومنه $m=48$ أي أن $ab=12\times 48=576$ وبوضع $a=12a'$ و

و $b=12b'$ حيث العددان a' و b' أوليان فيما بينهما $144a'b'=576$ ومنه $a'b'=4$ إذن الثنائيات $(a';b')$ هي

$(1;4)$ و $(4;1)$ ومنه الثنائيات $(a;b)$ هي $(12;48)$ و $(48;12)$.

التمرين الثاني:

اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل مما يلي:

1. حلول المعادلة التفاضلية $2y'+y-3=0$ هي: $y=ce^{\frac{-x}{2}}+3$ (الجواب – ج –)

التبرير : $2y'+y-3=0$ تكافئ $y'=\frac{-1}{2}y+\frac{3}{2}$ وهي من الشكل $y'=ay+b$ وحلولها هي الدوال حيث

$y=ce^{ax}-\frac{b}{a}$ أي $y=ce^{\frac{-x}{2}}+3$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+e)-1}{x}=e^{-1}$ (الجواب – ب –)

التبرير : نضع $f(x)=\ln(x+e)$ ومنه $f'(x)=\frac{1}{x+e}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+e)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+e)-\ln(0+e)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{1}{e}=e^{-1}$$

3. حلول المتراجحة $\ln(-2x+1)\prec 3$ هي $S=\left]\frac{1-e^3}{2};\frac{1}{2}\right[$ (الجواب – أ –)

التبرير : مجموعة تعريف المتراجحة هي $D=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ حيث :

$$\ln(-2x+1) \prec 3$$
$$\ln(-2x+1) \prec \ln e^3$$
$$-2x+1 \prec e^3$$
$$-2x \prec e^3-1$$
$$x \succ \frac{1-e^3}{2}$$

4. إذا كان $f(x)=\ln(e^{2x}+1)$ فإن (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y=2x$ عند $+\infty$ (الجواب – ج –)

التبرير:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln(e^{2x}+1)-(2x)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)\right)-2x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \ln e^{2x} + \ln\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)-2x$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \cancel{2x} + \ln\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)-\cancel{2x} = 0$$

5. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sin(x)-x}{x^2}=0$ (الجواب – أ –)

التبرير :

لدينا : $-1\le \sin(x)\le 1$ ومنه $-3\le 3\sin(x)\le 3$ ومنه $-3-x\le 3\sin(x)-x\le 3-x$ ومنه نجد :

$$\frac{-3-x}{x^2}\le\frac{3\sin(x)-x}{x^2}\le\frac{3-x}{x^2}$$

وبما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3-x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$ فإن : $\lim_{x\to\infty}\frac{3\sin(x)-x}{x^2}=0$ * نظرية الحصر *

التمرين الثالث:

1) أ – **حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب .**

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هي : $C_{12}^2=66$

ب - **حساب احتمال الحوادث التالية :** A ، B ، $A\cap B$

A " سحب كريتان من نفس اللون " يعني سحب كرتين حمراوين أو كرتين خضراوين أو كرتين بيضاوين ومنه :

$$P(A)=\frac{C_3^2+C_4^2+C_5^2}{66}=\boxed{\frac{19}{66}}$$

B " سحب كرية خضراء على الأقل " يعني سحب كرة خضراء وكرة من لون اخر أو سحب كرتين خضراوين ومنه:

$$P(B)=\frac{C_5^1\times C_7^1+C_5^2}{66}=\frac{35+10}{66}=\boxed{\frac{45}{66}}=\boxed{\frac{15}{22}}$$

$A\cap B$ " سحب كريتين خضراوين " أي $P(A\cap B)=\frac{C_5^2}{66}=\frac{10}{66}=\boxed{\frac{5}{33}}$

هل الحادثتان A و B مستقلتان يعني أن $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ولدينا

$P(A)\times P(B)=\frac{19}{66}\times\frac{15}{22}=\frac{95}{484}\neq\frac{5}{33}\neq P(A\cap B)$ ومنه الحدثان غير مستقلان

2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة مجموع الرقمين المحصل عليهما .

أ- تعيين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي $\{2,3,4,5\}$

تعين قانون احتماله .

2 : هو مجموع 1 و 1 ومنه عدد الحالات الملائمة لما $X=2$ هي $C_5^2=10$

3 : هو مجموع 1 و 12 ومنه عدد الحالات الملائمة لما $X=3$ هي $C_5^1\times C_6^1=30$

4 : هو مجموع 2 و 2 أو مجموع 1 و 3 ومنه عدد الحالات الملائمة لما $X=4$ هي $C_6^2+C_5^1=20$

5 : هو مجموع 2 و 3 ومنه عدد الحالات الملائمة لما $X=5$ هي $C_6^1=6$

x_i	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{30}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{6}{66}$

ب- حساب الامل الرياضي $E(X)$:

$$E(X)=2\left(\frac{10}{66}\right)+3\left(\frac{30}{66}\right)+4\left(\frac{20}{66}\right)+5\left(\frac{6}{66}\right)=\frac{220}{66}=\frac{10}{3}$$

حساب الاحتمال $P(x^2-6x+8\leq 0)$.

نحسب مميز x^2-6x+8 نجد أن $\Delta=4$ ومنه جذريه هما 4 و 2 إذن :

$$P(x^2-6x+8\leq 0)=P(2\leq x\leq 4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$

ومنه : $P(x^2-6x+8\leq 0)=\frac{10}{66}+\frac{30}{66}+\frac{20}{66}=\frac{60}{66}=\frac{10}{11}$

التمرين الرابع :

i. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=1-x^2-2\ln x$

1. دراسة اتجاه تغير الدالة g .

- $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}(1-x^3-2\ln x)=+\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} g(x)=\lim_{x \to +\infty}(1-x^3-2\ln x)=-\infty$

حساب ودراسة إشارتها :

g تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x)=-3x^2-\dfrac{2}{x}=\dfrac{-3x^3-2}{x}=\dfrac{-(3x^3+2)}{x}$

نلاحظ أن $g'(x)\prec 0$ ، ومنه الدالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

2. حساب $g(1)$: $g(1)=1-(1)^3-2\ln 1=1-1-0=0$

استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
إشارة $g(x)$		+	0	-	

ii. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ : $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2}-2x+3$ و (C_f) منحناها البياني المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب كلا من $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ وتفسير النتيجة الأخيرة بيانيا :

- $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left(\dfrac{2\ln x}{x^2}-2x+3\right)=-\infty$ (لأن $\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left(\dfrac{2\ln x}{x^2}\right)=-\infty$)
- $\lim_{x \to +\infty} f(x)=\lim_{x \to +\infty}\left(\dfrac{2\ln x}{x^2}-2x+3\right)=-\infty$ (لأن $\lim_{x \to +\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=0$) نهاية شهيرة .

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=0$ حامل محور التراتيب مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

2. أ - **تبيين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$:** $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$

f تقبل الاشتقاق على ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\left(\frac{2\ln x}{x^2}-2x+3\right)'=\frac{2\frac{1}{x}\times x^2-2x\times 2\ln x}{x^4}=\frac{2x-4x\ln x}{x^4}-2$$
$$=\frac{2-4\ln x}{x^3}-2$$
$$=\frac{2-4\ln x-2x^3}{x^3}$$
$$=\frac{2\left(1-2\ln x-x^3\right)}{x^3}$$
$$=\frac{2g(x)}{x^3}$$

من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ فإن $x^3\succ 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها .

- $f'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=0$ ومنه $x=1$.
- $f'(x)\succ 0\Leftrightarrow g(x)\succ 0$ ومنه $x\in]0;1[$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;1[$
- $f'(x)\prec 0\Leftrightarrow g(x)\prec 0$ ومنه $x\in]1;+\infty[$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

3. أ - **تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α ، β حيث** $0,6\prec\alpha\prec 0,8$ **و** $1,6\prec\beta\prec 1,8$:

* على المجال $]0,6;0,8[$:

- f مستمرة على $]0,6;0,8[$
- $f(0,6)\times f(0,8)\prec 0$ (لأن $f(0,6)=-1,03$ و $f(0,8)=0,7$)
- f رتيبة على المجال $]0,6;0,8[$.

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **حيث** $0,6\prec\alpha\prec 0,8$

* على المجال $]1,6;1,8[$:

- f مستمرة على $]1,6;1,8[$

- $f(0,6)\times f(0,8)\prec 0$ (لأن $f(1,6)=0,16$ و $f(1,8)=-0,23$)

- f رتيبة على المجال $]1,6;1,8[$.

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $1,6\prec\beta\prec1,8$

ب- استنتاج إشارة $f(x)$:

x	0		α		β		$+\infty$
إشارة $f(x)$		-	0	+	0	-	

4. أ - تبيين أن المستقيم الذي معادلته $y=-2x+3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$.

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2x+3)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2\ln x}{x^2}\right)=0$

فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=-2x+3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$.

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ)

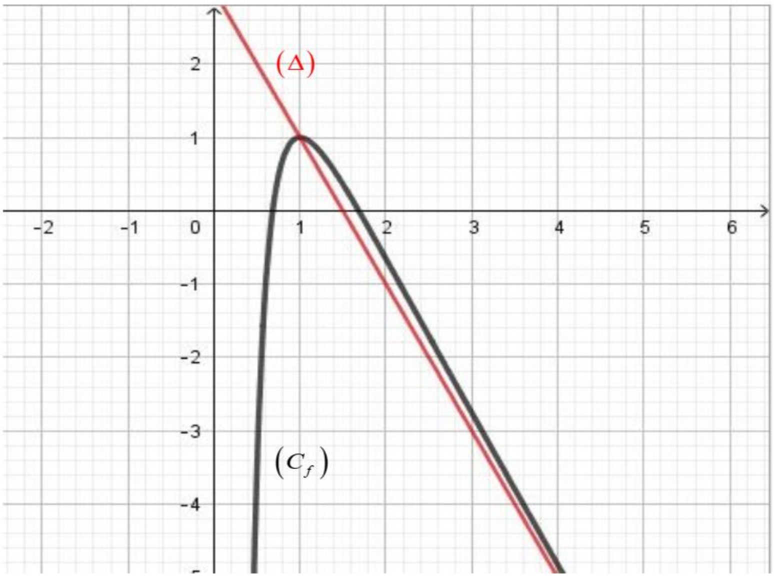
ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-(-2x+3)\right]$ وهو من إشارة $\dfrac{2\ln x}{x^2}$

- $\left[f(x)-(-2x+3)\right]=0$ تكافئ $\dfrac{2\ln x}{x^2}=0$ ومنه $\ln x=0$ أي $\ln x=\ln 1$ ومنه $x=1$
- $\left[f(x)-(-2x+3)\right]\succ0$ تكافئ $\dfrac{2\ln x}{x^2}\succ0$ ومنه $\ln x\succ0$ أي $\ln x\succ\ln1$ ومنه $x\succ1$ أي $x\in]1;+\infty[$
- $\left[f(x)-(-2x+3)\right]\prec0$ تكافئ $\dfrac{2\ln x}{x^2}\prec0$ ومنه $\ln x\prec0$ أي $\ln x\prec\ln1$ ومنه $x\prec1$ أي $x\in]0;1[$

الوضع النسبي :

x	0	1	$+\infty$
وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

5. إنشاء (Δ) والمنحنى (C_f) :



6. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=\frac{2\ln|x|}{x^2}-2|x|+3$

أ- تبيين ان الدالة h زوجية و شرح كيفية انشاء (C_h) اعتمادا على (C_f) .

من أجل $x \in D_h$ ، $-x \in D_h$ (D_h متناظر بالنسبة لـ O) :

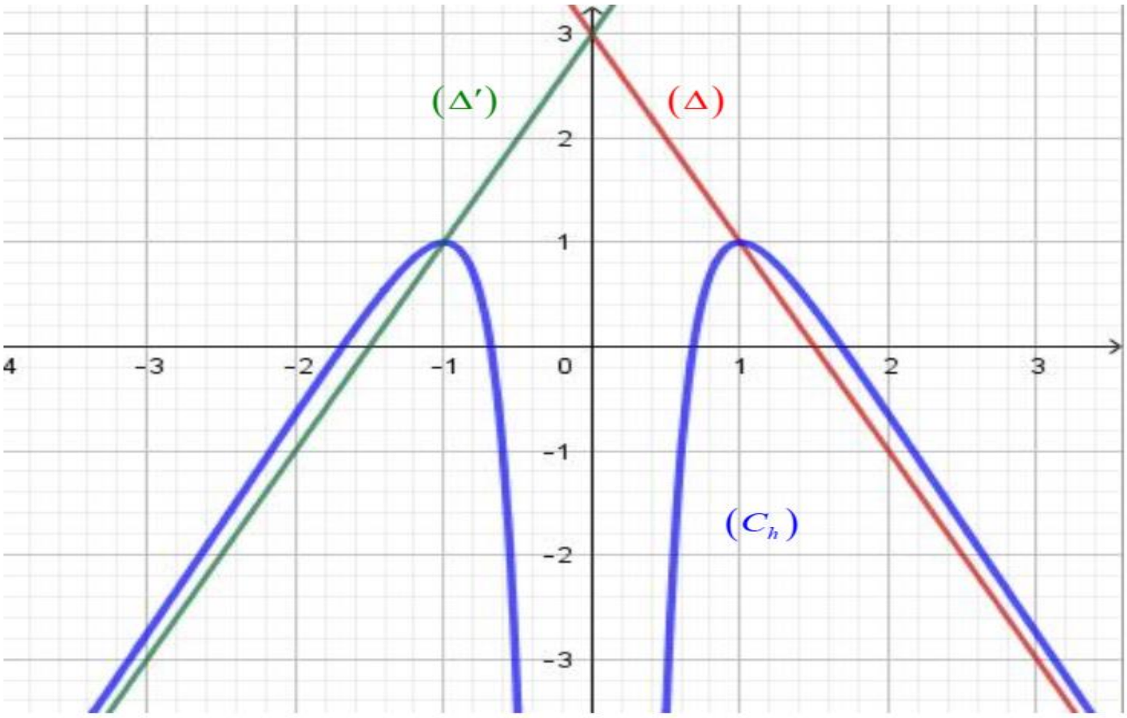
$$h(-x)=\frac{2\ln|-x|}{(-x)^2}-2|-x|+3$$
$$=\frac{2\ln|x|}{x^2}-2|x|+3$$
$$=h(x)$$

ومنه h دالة زوجية .

شرح كيفية انشاء (C_h) اعتمادا على (C_f) :

- على المجال $]0;+\infty[$: (C_h) منطبق على (C_f) ، ($\left(h(x)=\frac{2\ln x}{x^2}-2x+3=f(x)\right)$)
- على المجال $]-\infty;0[$: (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب ، (hدالة زوجية)

إنشاء (C_h) :



7. نعتبر الدالة k المعرفة كما يلي: $k(x)=\ln f(x)$

- اعتمادا على السؤال 3- ب تشكيل جدول تغيرات الدالة k .

k معرفة إذا كان $f(x)\succ 0$ ومنه $D_k=]\alpha;\beta[$ ، $k'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

x	α		1		β
$k'(x)$		+	0	-	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

ZERROUKI AISSA