الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل: 04 نقاط

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

$\left(\Delta_1\right)$ و $\left(\Delta_2\right)$ مستقيمان من الفضاء معرّفان بتمثيليهما الوسيطيين التاليين:

$$\left(\Delta_1\right):\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2-2t;\left(t\in\mathbb{R}\right)\\ z=1-t\end{cases} \quad \text{و} \quad \left(\Delta_2\right):\begin{cases}x=1\\ y=-1-t';\left(t'\in\mathbb{R}\right)\\ z=4+2t'\end{cases}$$

1) أ) عيّن إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين $\left(\Delta_1\right)$ و $\left(\Delta_2\right)$.

ب) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) المعيّن بالمستقيمين $\left(\Delta_1\right)$ و $\left(\Delta_2\right)$.

2) أ) أثبت أنّ النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي للمستوي (P).

ب) بيّن أنّ النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P).

3) أ) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.

ب) عيّن إحداثيات C و D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من $\left(\Delta_1\right)$ و $\left(\Delta_2\right)$ على الترتيب.

4) أ) عيّن طبيعة المثلث BCD، ثمّ احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

ب) استنتج مساحة المثلث ACD.

التمرين الثاني 04 نقاط

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

لتكن A نقطة لاحقتها: $z_A=i$ و B لاحقتها $z_B=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

1) ليكن الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$، نسمي C صورة B بواسطة r.

أ ـ اعط الكتابة المركبة لـ r ثم عيّن z_C ـ الشكل الأسّي ـ لاحقة C.

ب ـ اكتب كلا من z_B و z_C على الشكل الجبري.

جـ ـ علم النقط A، B و C.

2) لتكن D مرجح النقط A، B و C المرفقة على الترتيب بالمعاملات 2، -1 و 2.

أ ـ عيّن z_D لاحقة D

ب ـ بيّن أنّ A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

3) ليكن H التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 نسمي E صورة D بالتحاكي H.

ـ أعط الكتابة المركبة لـ H ثمّ عيّن z_E لاحقة E، ثمّ علم E.

4) أ ـ احسب النسبة $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}$، تعطى الكتابة على الشكل الأسّي.

ب ـ استنتج طبيعة المثلث CDE

التمرين الثالث: 06 نقاط

نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $f(-x)+f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم استنتج أنّ النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

2. أـ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب ـ ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

3. أ ـ بيّن أنّ المستقيم ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب ـ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)$، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

4. أ ـ بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1,7<\alpha<-1,6$.

ب ـ من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x)=k$.

5. ارسم (C_f) ومستقيميه المقاربين.

التمرين الرابع: 06 نقاط

I ـ لتكن الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+2-2\ln(x)$

1. ادرس تغيّرات الدالة g واحسب $g(1)$.

2. استنتج انّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $g(x)>0$.

II ـ f دالة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+\dfrac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **أ ـ** احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

ب ـ بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

جـ ـ حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

2. **أ ـ** بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ب ـ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3. **أ ـ** بيّن أنّه يوجد مماس وحيد (Δ) للمنحنى (C_f)، مواز للمستقيم (D).

ب ـ اكتب معادلة (Δ).

جـ ـ بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $\frac{1}{2}<\alpha<1$

د ـ أنشئ المستقيمين (Δ) و (D) والمنحنى (C_f).

هـ ـ ناقش بيانيا، حسب قيّم العدد الحقيقي m، عدد حلول المعادلة : $mx-2\ln(x)=0$.

حل الموضوع الأول:

التمرين الأول:

1) أ) تعيين إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2).

نحل الجملة $\begin{cases} 3+2t=1 \ldots\ldots(1) \\ -2-2t=-1-t' \ldots(2) \\ 1-t=4+2t' \ldots(3) \end{cases}$ من (1) نجد $t=-1$ بالتعويض عن t في (2) نجد $0=-1-t'$

ومنه $t'=-1$

بتعويض t و t' في التمثيلين الوسيطيين لـ (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب نجد

$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$ و $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$ إذن المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) يتقاطعان في النقطة $B(1;0;2)$.

ب) تعيين تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2).

$\vec{u}(2;-2;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ_1) و $\vec{v}(0;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ_2) وهما أساس للمستوي (P).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(P)$ معناه $\overrightarrow{BM}=t\vec{u}+t'\vec{v}$ و $\overrightarrow{BM}(x-1;y;z-2)$.

ومنه $\begin{cases} x-1=2t \\ y=-2t-t' \\ z-2=-t+2t' \end{cases}$ $(t;t')\in\mathbb{R}^2$ أي $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2t-t' \\ z=2-t+2t' \end{cases}$ $(t;t')\in\mathbb{R}^2$

ملاحظة: أخذنا نفس الوسيطين t و t' في التمثيل الوسيطي للمستوي (P) لأننا أخذنا نقطة التقاطع B.

2) أ) إثبات أنّ النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي للمستوي (P).

نفرض أنّ A تنتمي للمستوي (P) إذن $\begin{cases} 6=1+2t \ldots(1) \\ 4=-2t-t' \ldots(2) \\ 4=2-t+2t' \ldots(3) \end{cases}$

من (1) نجد $t=\frac{5}{2}$ بالتعويض في (2) و (3) نجد $\begin{cases} t=\frac{5}{2} \\ 4=5-t' \\ 4=-\frac{1}{2}+2t' \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t=\frac{5}{2} \\ t'=1 \\ t'=\frac{9}{4} \end{cases}$ تناقض

إذن A لا تنتمي للمستوي (P).

ب) تبيين أنّ النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P).

تكون B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) إذا وفقط إذا كان:

$B\in(P)$ و $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

لدينا $\overrightarrow{BA}(5;4;2)$ و $\overrightarrow{BA}.\vec{u}=5\times2+4(-2)+2(-1)=0$ و $\overrightarrow{BA}.\vec{v}=5\times0+4(-1)+2(2)=0$

وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{BA}\perp\vec{u}$ و $\overrightarrow{BA}\perp\vec{v}$ بالتالي $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) وبما أنّ $B\in(P)$ فإنّ B هي

المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P).

3) أ) تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.

معادلة المستوي (Q) من الشكل $5x+y-7z+d=0$ وبما أنّ $A\in(Q)$ فإنّ $5(6)+4-7(4)+d=0$

ومنه $d=-6$ وعليه معادلة المستوي (Q) هي $5x+y-7z-6=0$.

ب) تعيين إحداثيات C و D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب.

تعيين إحداثيات C نقطة تقاطع (Q) مع (Δ_1).

نحل الجملة $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t \\ 5x+y-7z-6=0 \end{cases}$ وعليه $5(3+6t)-2-2t-7(1-t)-6=0$ ومنه $35t=0$ أي $t=0$

إذن $C(3;-2;1)$.

تعيين إحداثيات D نقطة تقاطع (Q) مع (Δ_2).

نحل الجملة $\begin{cases} x=1 \\ y=-1-t' \\ z=4+2t' \\ 5x+y-7z-6=0 \end{cases}$ وعليه $5-1-t'-7(4+2t')-6=0$ ومنه $-15t'-30=0$ أي $t'=-2$

إذن $D(1;1;0)$.

4) أ) تعيين طبيعة المثلث BCD.

$\overrightarrow{BC}(2;-2;-1)$ ومنه $BC=\sqrt{4+4+1}=3$

$\overrightarrow{BD}(0;1;-2)$ ومنه $BD=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$\overrightarrow{CD}(-2;3;-1)$ ومنه $CD=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$

ومنه $BC^2+BD^2=CD^2$ إذن المثلث BCD قائم في B.

طريقة 2: لدينا $\vec{u}.\vec{v}=2\times0-2(-1)-1(2)=0$ وهذا يعني أنّ $\vec{u}\perp\vec{v}$ ومنه المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) متعامدان ومتقاطعان في النقطة B وبما أنّ $C\in(\Delta_1)$ و $D\in(\Delta_2)$ فإنّ المثلث BCD قائم في B.

حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

تذكّر: حجم رباعي الوجوه يعطى كما يلي $\frac{1}{3}\times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع.

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}\times AB$ (AB هي المسافة بين A والمستوي $(BCD)=(P)$)

لدينا $AB=3\sqrt{5}$ ، $S_{BCD}=\frac{BC\times BD}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}ua$

وعليه $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}\times3\sqrt{5}=\frac{15}{2}uv$.

ب) استنتاج مساحة المثلث ACD.

لدينا $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ACD}\times d(B;(Q))$ لأنّ $(ACD)=(Q)$.

ومنه $S_{ACD} = \dfrac{3V_{ABCD}}{d\left(B;(Q)\right)}$ ولدينا $d\left(B;(Q)\right) = \dfrac{|5-14-6|}{5\sqrt{3}} = \dfrac{15}{5\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

وعليه $S_{ACD} = \dfrac{3V_{ABCD}}{d\left(B;(Q)\right)} = \dfrac{3\times\frac{15}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}ua$.

التمرين الثاني:

لتكن A نقطة لاحقتها: $z_A = i$ و B لاحقتها $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

1) ليكن الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\dfrac{2\pi}{3}$، نسمي C صورة B بواسطة r.

أ ـ اعطاء الكتابة المركبة لـ r

لتكن M و M' نقطتان من المستوي لاحقيهما z و z' على الترتيب

$r(M) = M'$ معناه $z' - z_O = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_O)$ أي $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

تعيين z_C ـ الشكل الأسّي ـ لاحقة C.

$r(B) = C$ يكافئ $z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B$ أي $z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ وعليه $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

ب ـ كتابة كلا من z_B و z_C على الشكل الجبري.

$z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right)$ أي $z_B = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

$z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)$ أي $z_C = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

جـ ـ انشاء النقط A، B و C.

2) لتكن D مرجح النقط A، B و C المرفقة على الترتيب بالمعاملات 2، -1 و 2.

أ ـ تعيين z_D لاحقة D

$z_D = \dfrac{2z_A - z_B + 2z_C}{2-1+2} = \dfrac{2i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \sqrt{3} - i}{3}$ وعليه $z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

ب ـ تبيين أنّ A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

$|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 1$ وهذا يعني أنّ $OA = OB = OC = OD = 1$ بالتالي A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 أي الدائرة المثلثية.

3) ليكن H التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 نسمي E صورة D بالتحاكي H.

الكتابة المركبة لـ H.

$\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM}$ معناه $z' - z_A = 2(z - z_A)$ ومعناه $z' = 2z - z_A$ أي $H : z' = 2z - i$

تعيين z_E لاحقة E.

$H(D) = E$ يكافئ $z_E = 2z_D - i$ ومنه $z_E = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) - i$ أي $z_E = \sqrt{3}$.

aziz_mus1@hotmail.fr

4) أ ـ حساب النسبة $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$.

$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i} = \frac{2i}{\sqrt{3}+i}$$

$$= \frac{2i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2i\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)} = \frac{2+2\sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

وعليه $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب ـ استنتاج طبيعة المثلث CDE.

لدينا $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ وهذا يعني أنّ $CD = CE$ و $\left(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

المثلث CDE متساوي الساقين وإحدى زواياه $\dfrac{\pi}{3}$ بالتالي المثلث CDE متقايس الأضلاع

التمرين الثالث:

نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \dfrac{2}{e^x+1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. حساب $f(x)+f(-x)$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x)+f(-x) = x+\frac{2}{e^x+1} - x + \frac{2}{e^{-x}+1} = \frac{2}{e^x+1}+\frac{2e^x}{e^x\left(e^{-x}+1\right)} = \frac{2}{e^x+1}+\frac{2e^x}{e^x+1} = \frac{2e^x+2}{e^x+1} = 2$$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإنّ $-x \in \mathbb{R}$ ولدينا $f(x)+f(-x) = 2$ معناه $f(-x) = 2-f(x)$ أي

$f(2\times 0 - x) = 2\times 1 - f(x)$ إذن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

2. أ ـ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \dfrac{2}{e^x+1} = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x+1} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

استنتاج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

لدينا $f(x) = 2-f(-x)$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[2-f(-x)\right] = \lim\limits_{t\to+\infty}\left[2-f(t)\right] = -\infty$

ب ـ دراسة اتجاه تغير الدالة f.

$f'(x) = 1-\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \dfrac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}$ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{2x}+1>0$ و $\left(e^x+1\right)^2>0$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

إذن $f'(x)>0$ وعليه الدّالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدّالة f.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3. أ - تبيين أنّ المستقيم ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0$$

إذن المستقيم ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^x+1}-2=2-2=0$$

تفسير النتيجة بيانيا.

بما أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=0$ فإنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+2$ بجوار $-\infty$.

4. أ - تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1,7<\alpha<-1,6$.

لدينا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على المجال $[-1,7;-1,6]$ و $f(-1,7)\approx-0,008$ ، $f(-1,6)\approx-0,064$

أي $f(-1,7)\times f(-1,6)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]-1,7;-1,6[$

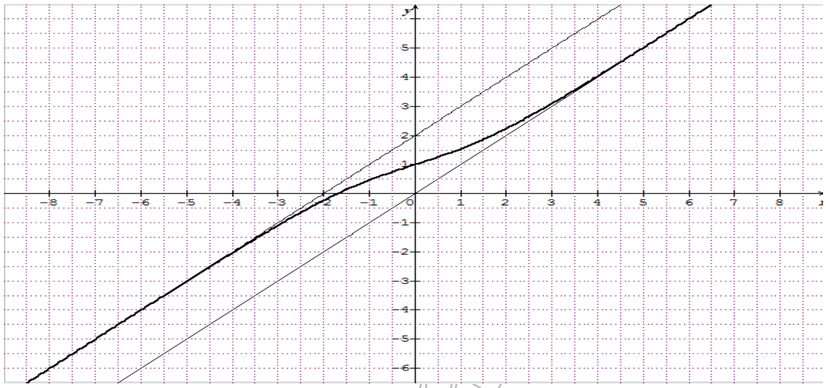
بحيث $f(\alpha)=0$ وبما أنّ الدّالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإنّ α وحيد.

ب - من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x)=k$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)+f(-x)=2$ وخاصة $f(\alpha)+f(-\alpha)=2$ ومنه $f(-\alpha)=2$ لأنّ $f(\alpha)=0$

إذن العدد $(-\alpha)$ هو حل للمعادلة $f(x)=2$ وعليه $k=2$.

5. رسم (C_f) ومستقيميه المقاربين.



التمرين الرابع:

I- لتكن الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+2-2\ln(x)$

1. **دراسة تغيّرات الدالة** g

لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^2+2=2$ عندئذ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^2+2-2\ln x=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(x+\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$$

$g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}$ لدينا $x>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة x^2-1

x	0	1	$+\infty$
x^2-1	‖ $-$	0	$+$

$g(1)=1+2+2\ln 1=3$

جدول تغيرات الدالة g.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖ $-$	0	$+$
$g(x)$	‖ $+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$

2. **استنتاج انّه من أجل كل** x **من** $]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

للدّالة g قيمة حدية صغرى على المجال $]0;+\infty[$ وهي $g(1)=3$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x)\geq 3$ وبالتالي $g(x)>0$.

II- f دالة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+\frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **أ- حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=0$ فيكون $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{2\ln x}{x}=+\infty$

ولدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{2\ln x}{x} = -\infty$ فيكون $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x + \dfrac{2\ln x}{x} = -\infty$

ب ـ تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x}{x} = 0$ إذن المنحنى (C_f) له مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = x$ في جوار $+\infty$

جـ ـ تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

لدينا $f(x) - x = \dfrac{2\ln x}{x}$ ؛ ومنه إشارة $f(x) - x$ هي من نفس إشارة $\ln x$.

$f(x) - x = 0$ يكافئ $\ln x = 0$ أي $x = 1$

$f(x) - x > 0$ يكافئ $\ln x > 0$ ويكافئ $x > 1$

$f(x) - x < 0$ يكافئ $\ln x < 0$ ويكافئ $0 < x < 1$

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - x$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

2. **أ ـ تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$:** $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = 1 + 2\left[\dfrac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2}\right] = 1 + \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2} = \dfrac{x^2 + 2 - 2\ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$$

ب ـ استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f .

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $g(x) > 0$ و $x^2 > 0$ إذن $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

3. **أ ـ تبيين أنّه يوجد مماس وحيد (T) للمنحنى (C_f)، مواز للمستقيم (Δ).**

(T) يوازي (Δ) يعني $f'(x_0) = 1$.

$f'(x_0) = 1$ يكافئ $\dfrac{g(x_0)}{x_0^2} = 1$ ويكافئ $x_0^2 + 2 - 2\ln x_0 = x_0^2$ ويكافئ $\ln x_0 = 1$ أي $x_0 = e$

aziz_mus1@hotmail.fr

إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) موازيا لـ (Δ) في النقطة التي إحداثيتيها $\left(e;e+\frac{2}{e}\right)$.

ب ـ كتابة معادلة (Δ).

$y=f'(e)(x-e)+f(e)$ ومنه $y=(x-e)+e+\frac{2}{e}$ أي $y=x+\frac{2}{e}$.

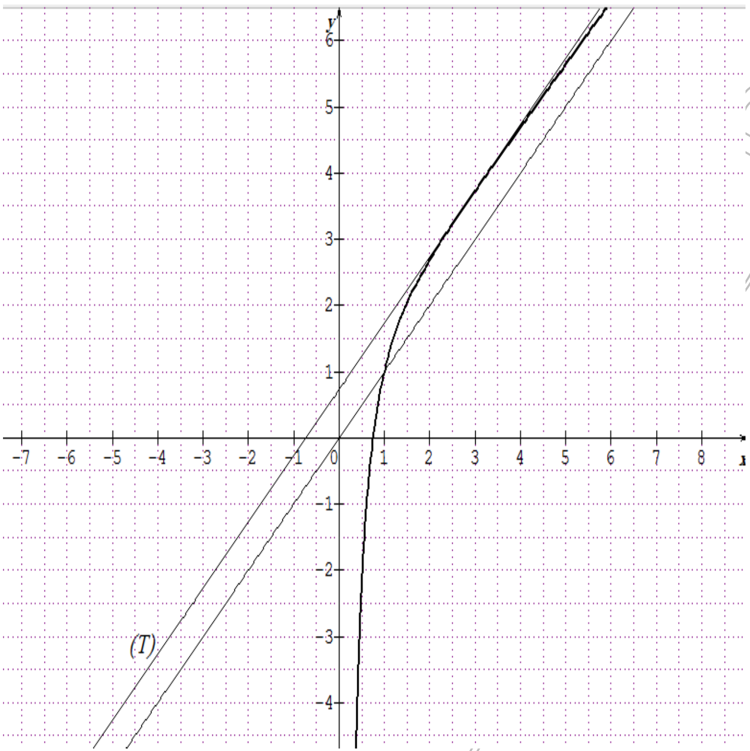
جـ ـ تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $\frac{1}{2}<\alpha<1$

لدينا الدالة f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[0,5;1]$ و $f(0,5)\approx-2,27$ ، $f(1)=1$

أي $f(0,5)\times f(1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]0,5;1[$ بحيث

$f(\alpha)=0$ وبما أنّ الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن α وحيد أي (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $0,5<\alpha<1$

د ـ رسم المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C_f).



هـ ـ المناقشة بيانيا، حسب قيم العدد الحقيقي m، عدد حلول المعادلة : $mx-2\ln(x)=0$.

$mx-2\ln(x)=0$ تكافئ $mx=2\ln(x)$

وتكافئ $m=\frac{2\ln(x)}{x}$ وتكافئ

$x+m=x+\frac{2\ln(x)}{x}$ أي $f(x)=x+m$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل النقط المشتركة بين (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=x+m$

بقراءة بيانية:

إذا كان $m\leq 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلا واحدا.

إذا كان $0<m<\frac{2}{e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m=\frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

إذا كان $m>\frac{2}{e}$ فإن المعادلة لا تقبل أي حل.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr