الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
ثانوية زاغز جلول بالإدريسية

مديرية التربيــة لولاية الجلفة
المستوى : ثالثة ثانوي علوم تجريبية

يوم : 2020/03/03

الإمتحان الثاني في مادة : الرياضيات

المدة : 4 ساعات

التمريـن الأول

يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، كلّ الكرات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللّمس .

1 - نسحب من الكيس 3 كرات عشوائيا وفي آن واحد .

♣ احسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

- A : " الكرات المسحوبة كلّها حمراء " .
- B : " توجد كرة واحدة حمراء في السحب " .
- C : " توجد على الأقل كرة واحدة بيضاء في السحب " .
- D : " الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة " .

2 - ننزع من الكيس الكرات البيضاء ونضع مكانها n كرة سوداء حيث $n \in \mathbb{N}$ مع $n \geq 2$ ثمّ نسحب كرتين على التوالي وبدون إرجاع .

♣ نفرض أنّ سحب كرة حمراء يساوي (-10) نقطة ، وسحب كرة سوداء يساوي ($+5$) نقطة .

نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق كل سحب كرتين مجموع النقط المحصّل عليها .

أ - عيّن قانون الاحتمال لهذا المتغيّر العشوائي X والأمل الرياضياتي $E(X)$.

ب - عيّن قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة .

ج - كيف نختار عدد الكرات السّوداء حتى تكون اللعبة مربحة ؟

التمريـن الثاني

نعتبر الدّالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$ (الوثيقة المرفقة) .

(I) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n+1} \end{cases}$$

1 - على الوثيقة المرفقة مثّل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) (دون حسابها وموضّحا خطوط الإنشاء) .

2 - ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها .

2 - برهن بالتراجع أنّه من كل عدد طبيعي n : $u_n \prec 2$.

3 - أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ثمّ استنتج أنّها متقاربة . عيّن نهايتها .

(II) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n}$.

1 - برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يّطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

2 - اكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n . تحقق من نهاية المتتالية (u_n) .

(III) اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = \frac{u_0}{u_0-2} + \frac{u_1}{u_1-2} + \frac{u_2}{u_2-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{u_n}{u_n-2}$$

التمريـن الثالث

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$.

(II) المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

نعتبر النّقط A ، B ، C و D ذات اللّواحق $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$ على الترتيب

1 - أ - بيّن أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدّائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاّحقة $z_\Omega=3$.

ب - بيّن أنّ : $\left(\frac{z_D-1}{4}\right)^{1906}+\left(\frac{z_C-1}{4}\right)^{1963}=z_A$.

2 - لتكن النّقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى المبدأ O .

أ - عيّن عمدة وطويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$ ثمّ استنتج طبيعة المثلث BEC .

ب - استنتج طبيعة التحويل T الذي مركزه النقطة B ويحوّل E إلى C ثمّ اكتب الصيغة المركبة له .

(III) 1 - عيّن طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاّحقة z التي تحقق : $|iz-3i|=\left|-3+i\sqrt{3}\right|$.

2 - عيّن طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاّحقة غير المعدومة z التي تحقق : $\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=2k\pi$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$

التمريـن الرابع

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x)=1+x^2+\ln x$.

1 - ادرس تغيّرات الدّالة g .

2 - بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدًا α حيث : $0.32\prec\alpha\prec0.33$.

3 - استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=-x+\frac{2+\ln x}{x}$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$.

1 - احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2 - بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

3 - بيّن أنّ : $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$ ثمّ عيّن حصرًا للعدد $f(\alpha)$.

4 - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ واستنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته .

- ادرس الوضع النّسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5 - أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها . اكتب معادلة المماس (T) .

6 - أنشئ المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحنى (C_f) علما أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_0 و x_1 حيث : $0.1\prec x_0\prec0.2$ و $1.5\prec x_1\prec1.6$.

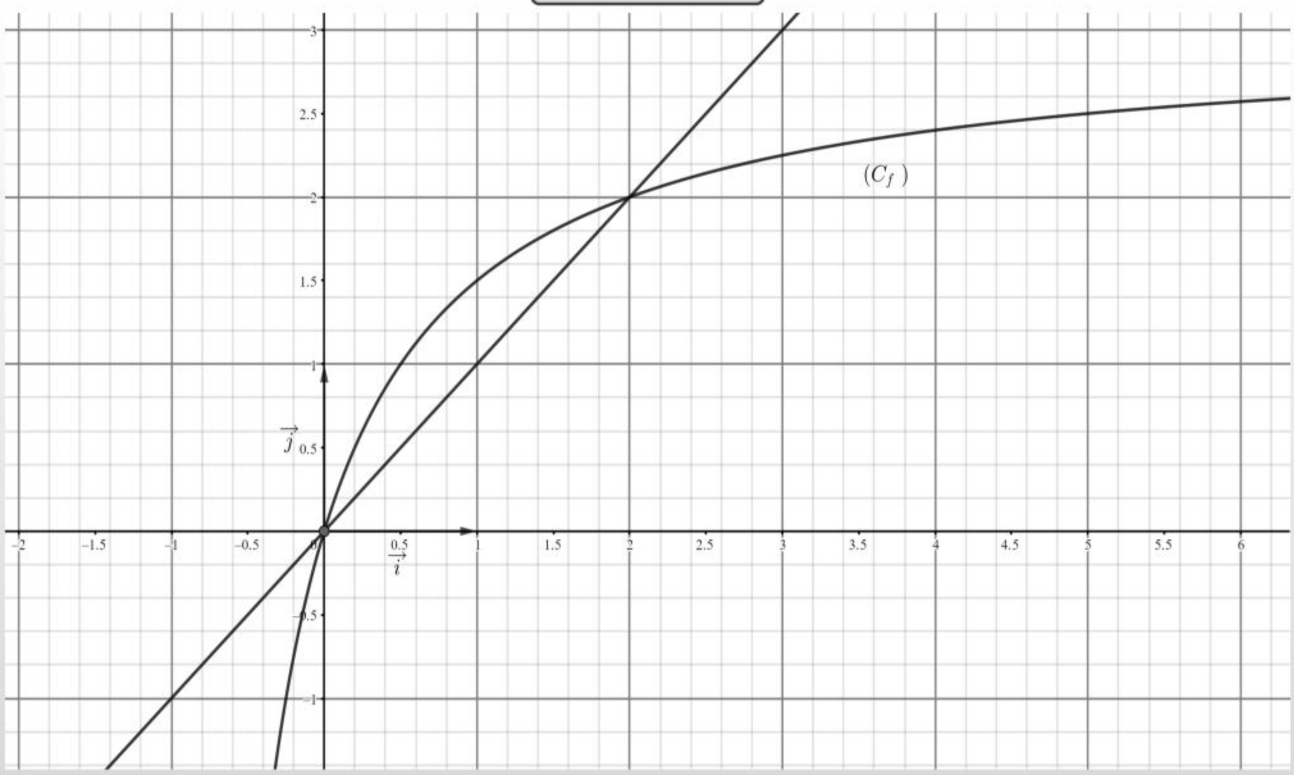
بالتوفيق والنّجاح إن شاء الله في شهادة البكالوريا

أعظم هندسة في العالم :

بناء جسرٍ من الأمل ... على نهرٍ من اليأس !!

الإســـم واللقـب : ....   القســـم : ....

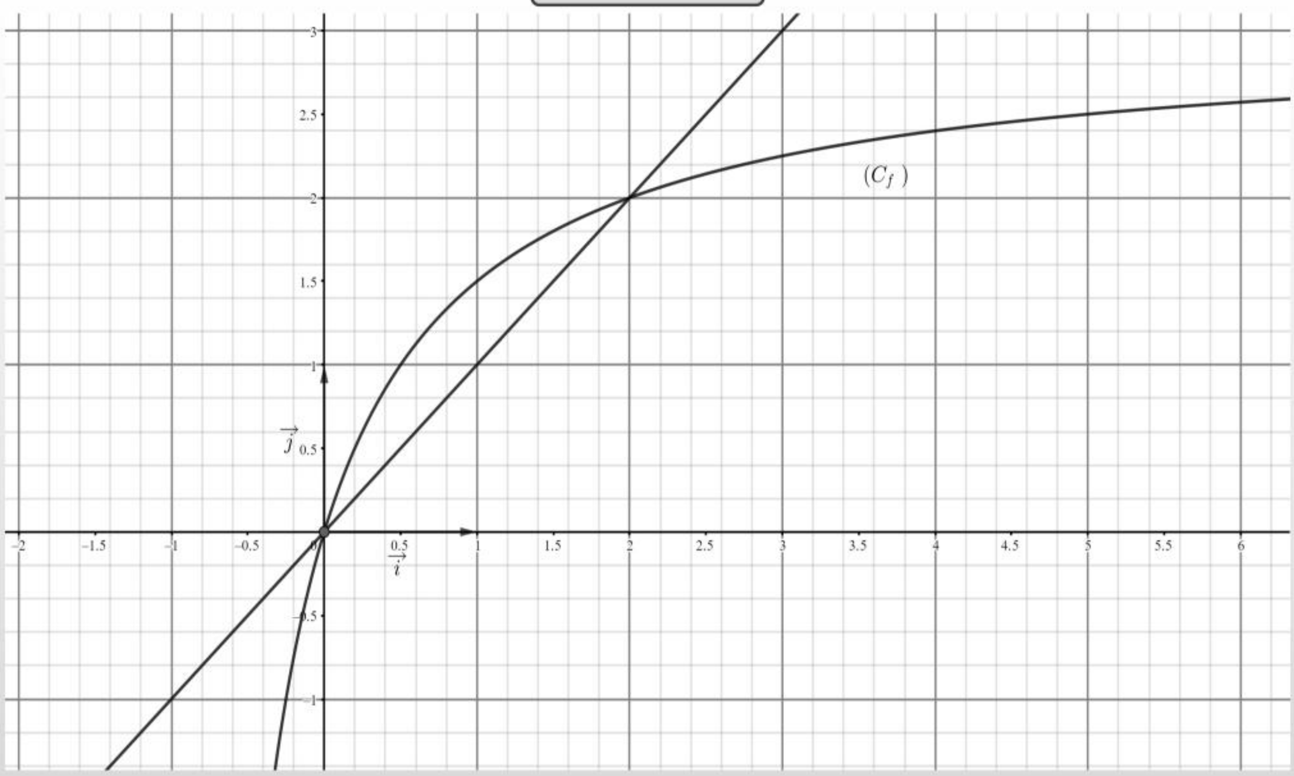
الوثيقة المرفقة



يُنجز العمل المطلوب على الوثيقة المرفقة وتُعاد مع ورقة الإجابة

الإســـم واللقـب : ....   القســـم : ....

الوثيقة المرفقة



يُنجز العمل المطلوب على الوثيقة المرفقة وتُعاد مع ورقة الإجابة

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربيــة لولاية الجلفة

ثانوية زاغز جلول بالإدريسية — المستوى : ثالثة ثانوي علوم تجريبية

يوم : 2020/03/03 — **التصحيح المفصل للامتحان الثاني في مادة : الرياضيات** — المدة : 4 ساعات

التمريـن الأول

1 - ♣ حساب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

$$P(A)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{10}{56}\ ،\ P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_3^2}{C_8^3}=\frac{15}{56}\ ،\ P(C)=\frac{C_3^1\cdot C_5^2+C_3^2\cdot C_5^1+C_3^3}{C_8^3}=\frac{46}{56}$$

و $P(D)=\dfrac{C_3^1\cdot C_5^2+C_3^2\cdot C_5^1}{C_8^3}=\dfrac{45}{56}$.

2 - أ - تعيين قانون الاحتمال لهذا المتغيّر العشوائي X والأمل الرياضياتي $E(X)$:

لنعيّن قيم المتغير العشوائي والتي تحقّق : $x_i\in\{-20;-5;10\}$ مع $i\in\{1;2;3\}$.

لدينا :

$$A_{n+5}^2=\frac{(n+5)!}{(n+5-2)!}=\frac{(n+5)!}{(n+3)!}=\frac{(n+5)(n+4)(n+3)!}{(n+3)!}=(n+5)(n+4)=n^2+9n+20$$

وعليه :

$$P(X=-20)=\frac{A_5^2}{A_{n+5}^2}=\frac{20}{n^2+9n+20}\ ،\ P(X=-5)=\frac{2A_5^1\cdot A_n^1}{A_{n+5}^2}=\frac{10n}{n^2+9n+20}$$

و $P(X=10)=\dfrac{A_n^2}{A_{n+5}^2}=\dfrac{n(n-1)}{n^2+9n+20}$

لنلخّص ذلك في الجدول التالي :

x_i	-20	-5	10
$P(X=x_i)$	$\dfrac{20}{n^2+9n+20}$	$\dfrac{10n}{n^2+9n+20}$	$\dfrac{n^2-n}{n^2+9n+20}$

تعيين الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=-20\left(\frac{20}{n^2+9n+20}\right)-5\left(\frac{10n}{n^2+9n+20}\right)+10\left(\frac{n^2-n}{n^2+9n+20}\right)=\frac{10n^2-60n-400}{n^2+9n+20}$$

ب - تعيين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة : حتى تكون اللعبة عادلة يكون $E(X)=0$

$E(X)=0$ معناه : $\dfrac{10n^2-60n-400}{n^2+9n+20}=0$ أي : $10n^2-60n-400=0$ معناه $n=10$.

ج - تبيين كيف نختار عدد الكرات السّوداء حتى تكون اللعبة مربحة ؟ : لدينا : $E(X)=\dfrac{10(n+4)(n-10)}{n^2+9n+20}$.

حتى تكون اللعبة مربحة يكون : $E(X)\succ 0$ أي $(n-10)\succ 0$ أي $n\succ 10$ لأنّ $\dfrac{10(n+4)}{n^2+9n+20}\succ 0$.

ومنه حتى تكون اللعبة مربحة نأخذ الكرات السوداء أكبر تماما من 10 كرات .

التمريـن الثاني

لدينا :

$$u_{n+1}=\frac{3u_n}{u_n+1}=\frac{3u_n+3-3}{u_n+1}=\frac{3u_n+3}{u_n+1}-\frac{3}{u_n+1}=3\left(\frac{u_n+1}{u_n+1}\right)-\frac{3}{u_n+1}=3-\frac{3}{u_n+1}$$

(I) 1 - التمثيل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) (الوثيقة المرفقة) .

2 - وضع التخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها :

من خلال البيان نلاحظ أنّ حدود المتتالية (u_n) تتزايد وبالتالي نُخمّن أنّها متزايدة كما نلاحظ أنّها تتقارب نحو نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المنصف الأول وعليه نُخمّن أنّها متقاربة نحو النقطة ذات الفاصلة 2 .

3 - البرهان بالتراجع أنه من كل عدد طبيعي n : $u_n \prec 2$:

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$ ونعلم أنّ $1 \prec 2$ ومنه $u_0 \prec 2$ وبالتالي الخاصية " $u_n \prec 2$ " محققة من أجل $n = 0$.

- نفرض أنّ $u_n \prec 2$ ونبرهن أنّ $u_{n+1} \prec 2$.

لدينا من الفرض $u_n \prec 2$ بإضافة العدد 1 نجد : $u_n + 1 \prec 3$ بوضع مقلوب الطرفين نجد : $\frac{1}{u_n+1} \succ \frac{1}{3}$ بضرب الطرفين في العدد -3 نجد : $-\frac{3}{u_n+1} \prec -1$ بإضافة العدد 3 نحصل على : $u_{n+1} \prec 2$.

ومنه من أجل كل n عدد طبيعي فإنّ : $u_n \prec 2$.

ملاحظة مهمّة : هنا يمكنك استعمال الدالة المرفقة للانتقال من u_n إلى u_{n+1} وهو الأفضل .

3 - اثبات أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ثمّ استنتاج أنّها متقاربة . تعيين نهايتها :

لدينا : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. نلاحظ من خلال البيان أنّه من كل x من المجال $]0;2[$ المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y = x$

ومنه من أجل كل x من المجال $]0;2[$ فإنّ : $f(x) - x \succ 0$.

بما أنّ $0 \preceq u_n \prec 2$ (واضح أنّ $0 \preceq u_n$) فإنّ : $f(u_n) - u_n \succeq 0$ وعليه $u_{n+1} - u_n \succeq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة .

بما أنّ المتتالية (u_n) ومتزايدة و $u_n \prec 2$ أي محدودة من الأعلى بالعدد 2 فإنّ المتتالية (u_n) متقاربة نحو 2 .

تعيين النهاية :

بما أنّ المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ و $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ مع l عدد حقيقي .

لإيجاد l نضع $f(l) = l$ معناه $l = \frac{3l}{l+1}$ أي $l^2 + l = 3l$ إذن $l^2 - 2l = 0$ وعليه $l(l-2) = 0$ هذا معناه : $l = 2$ أو $l = 0$ وبما أنّ $u_0 = 1$ والمتتالية (u_n) متزايدة فإنّ : $l = 2$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

(II) 1 - البرهان أنّ المتتالية (v_n) هندسية مع تعيين أساسها وحدّها الأول :

$$v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{3u_n}{u_n+1}} = 1 - \frac{2(u_n+1)}{3u_n} = \frac{3u_n - 2u_n - 2}{3u_n} = \frac{u_n - 2}{3u_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n-2}{u_n}\right) = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 1 - \frac{2}{u_0} = 1 - \frac{2}{1} = -1$.

2 - كتابة عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = v_0 q^n$ ومنه $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ وكذلك $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ ومنه $u_n = \frac{2}{1 - v_n}$ ومنه $u_n = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$. -

التحقق من نهاية المتتالية (u_n) :

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 2$ لأنّ $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ ($-1 \prec \frac{1}{3} \prec 1$) .

(III) كتابة بدلالة n المجموع S_n :

لدينا : $\frac{u_n}{u_n - 2} = \frac{1}{\frac{u_n-2}{u_n}} = \frac{1}{\frac{u_n}{u_n} - \frac{2}{u_n}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{u_n}} = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{-\frac{1}{(3)^n}} = -(3)^n$ وبالتالي :

$$S_n = -(3)^0 - (3)^1 - (3)^2 - \ldots\ldots - (3)^n = -\left(3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots\ldots + 3^n\right) = -\left(\frac{1 - (3)^{n+1}}{1 - 3}\right) = \frac{1 - (3)^{n+1}}{2}$$

التمرين الثالث

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$:

لدينا $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$ معناه : $(z^2+3)=0$ أو $(z^2-6z+21)=0$

لنبدأ بالمعادلة الأولى $(z^2+3)=0$ معناه $z^2=-3$ أي $z^2=3i^2$ وعليه $z=i\sqrt{3}$ $z=-i\sqrt{3}$.

الآن نمر إلى المعادلة الثانية $(z^2-6z+21)=0$ نحسب المميز $\Delta=(-6)^2-4(1)(21)=-48=48i^2=\left(4\sqrt{3}i\right)^2$

وعليه حلول المعادلة الثانية هي :
$$\begin{cases} z_1=\dfrac{6-i4\sqrt{3}}{2}=3-2i\sqrt{3} \\ z_2=\dfrac{6+i4\sqrt{3}}{2}=3+2i\sqrt{3} \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$ هي : $S=\left\{-i\sqrt{3};i\sqrt{3};3-2i\sqrt{3};3+2i\sqrt{3}\right\}$.

(II) 1 - أ - تبيين أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدّائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللّاحقة $z_\Omega=3$:

$$|z_\Omega-z_A|=\left|3-\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\right|=\left|3-\sqrt{3}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\right|=\left|3-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$
$$|z_\Omega-z_B|=\left|3-\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}\right|=\left|3-\sqrt{3}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)\right|=\left|3+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$
$$|z_\Omega-z_C|=\left|3-\left(3+2i\sqrt{3}\right)\right|=\left|3-3-2i\sqrt{3}\right|=\left|-2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$$
$$|z_\Omega-z_D|=\left|3-\left(3-2i\sqrt{3}\right)\right|=\left|3-3+2i\sqrt{3}\right|=\left|2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$$

واضح أنّ : $|z_\Omega-z_A|=|z_\Omega-z_B|=|z_\Omega-z_C|=|z_\Omega-z_D|$ أي : $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=2\sqrt{3}$.

ومنه النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدّائرة (C) .

ب - تبيين أنّ : $\left(\dfrac{z_D-1}{4}\right)^{1906}+\left(\dfrac{z_C-1}{4}\right)^{1963}=z_A$: لدينا :

$$\left(\frac{z_D-1}{4}\right)^{1906}+\left(\frac{z_C-1}{4}\right)^{1963}=\left(\frac{2-2i\sqrt{3}}{4}\right)^{1906}+\left(\frac{2+2i\sqrt{3}}{4}\right)^{1963}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1906}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1963}$$

أي :
$$\left(\frac{z_D-1}{4}\right)^{1906}+\left(\frac{z_C-1}{4}\right)^{1963}=\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{1906}+\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{1963}=e^{-i\frac{1906\pi}{3}}+e^{i\frac{1963\pi}{3}}$$

لدينا :
$$e^{i\left(\frac{-1905\pi-\pi}{3}\right)}+e^{i\left(\frac{1962\pi+\pi}{3}\right)}=e^{-i635\pi}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{i654\pi}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه :
$$\left(\frac{z_D-1}{4}\right)^{1906}+\left(\frac{z_C-1}{4}\right)^{1963}=-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}=z_A$$

أ - تعيين عمدة وطويلة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$ ثمّ استنتاج طبيعة المثلث BEC :

E نظيرة D بالنسبة إلى O معناه : $z_E=-z_B=-3+2i\sqrt{3}$.

$$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

لدينا : $\left|\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right|=\dfrac{|z_C-z_B|}{|z_E-z_B|}=\dfrac{BC}{BE}=1$ و $\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$ ومنه المثلث BEC متقايس الأضلاع .

ب - استنتاج طبيعة التحويل T الذي مركزه النقطة B ويحوّل E إلى C ثمّ كتابة الصيغة المركبة له :

لدينا : $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_C-z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z_E-z_B\right)$ إذن T دوران مركزه النقطة B وزاويته $-\dfrac{\pi}{3}$.

والعبارة المركبة لهذا التحويل هي :

$$z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}\cdot z+z_B\left(1-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+z_B\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

1 - تعيين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاّحقة z التي تحقق : $|iz-3i|=\left|-3+i\sqrt{3}\right|$:

لدينا : $|iz-3i|=\left|-3+i\sqrt{3}\right|$ تكافئ : $|i(x+iy)-3i|=\sqrt{(-3)^2+3}$ تكافئ : $|-y+i(x-3)|=\sqrt{12}$ تكافئ : $(x-3)^2+y^2=12$ إذن (E) هي دائرة مركزها النقطة $\Omega(3;0)$ ونصف قطرها $r=2\sqrt{3}$.

2 - تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاّحقة غير المعدومة z التي تحقق : $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=2k\pi$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$:

لدينا $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=\arg(z)-\arg(\bar{z})$ ونعلم أنّ : $\arg(\bar{z})=-\arg(z)$ وعليه $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=2\arg(z)$ وعليه حتى تكون $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=2k\pi$ يكون $\arg(z)=k\pi$ يكافئ : $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)=k\pi$ إذن (Γ) هي محور الفواصل باستثناء النقطة O .

التمرين الرابع

(I) 1 - دراسة تغيّرات الدّالة g .

النهايات : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}(1+x^2+\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2+\ln x)=+\infty$.

المشتقة : الدّالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x)=2x+\frac{1}{x}$.

نلاحظ أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ : $g'(x)\succ 0$ ومنه الدّالة g متزايدة تماما .

جدول التغيّرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

2 - تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا α حيث : $0.32\prec\alpha\prec 0.33$:

لدينا $g(0.32)=-0.037$ و $g(0.33)=0.00023$.

من جدول التغيرات لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0.32;0.33[$ و $g(0.32)\times g(0.33)\prec 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0.32\prec\alpha\prec 0.33$.

3 - استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	‖ $-$	0	$+$

(II) 1 - حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(-x+\frac{2+\ln x}{x}\right)=-\infty$ لأنّ : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\ln x=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\frac{2+\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$ لأنّ : $\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\right\}$

2 - تبيين أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f :

الدّالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=-1+\left(\frac{\frac{1}{x}\times x-(2+\ln x)}{x^2}\right)=-1+\frac{-\ln x-1}{x^2}=\frac{-x^2-\ln x-1}{x^2}=-\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيّرات الدّالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$	$-\infty \nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow -\infty$	

3 - تبيين أنّ : $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$ ثمّ تعيين حصرًا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $f(\alpha)=-\alpha+\frac{2+\ln\alpha}{\alpha}\cdots(1)$ ولدينا : $g(\alpha)=0$ أي : $1+\alpha^2+\ln\alpha=0$ ومنه $\ln\alpha=-(1+\alpha^2)$

بالتعويض في (1) نجد :

$$f(\alpha)=-\alpha+\frac{2+\ln\alpha}{\alpha}=-\alpha+\frac{2-(1+\alpha^2)}{\alpha}=-\alpha+\frac{1-\alpha^2}{\alpha}=-\alpha+\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha^2}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}-2\alpha=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$$

4 - حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ واستنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{2+\ln x}{x}+x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$.

- دراسة الوضع النّسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) : لدينا : $f(x)-y=f(x)+x=\frac{2+\ln x}{x}$

إشارة $f(x)+x$ من إشارة $2+\ln x=0$ لأنّ $x\succ 0$.

لدينا : $f(x)+x=0$ معناه $\frac{2+\ln x}{x}=0$ أي $2+\ln x=0$ معناه $\ln x=-2$ ومنه $x=e^{-2}$.

- لمّا $x\succ e^{-2}$ معناه $\ln x\succ -2$ أي $2+\ln x\succ 0$ ومنه $f(x)-y\succ 0$ ومنه (C_f) فوق (Δ) على المجال $]e^{-2};+\infty[$.

- لمّا $x\prec e^{-2}$ معناه $\ln x\prec -2$ أي $2+\ln x\prec 0$ ومنه $f(x)-y\prec 0$ ومنه (C_f) تحت (Δ) على المجال $]0;e^{-2}[$.

- المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $(e^{-2};-e^{-2})$ ، $((C_f)\cap(\Delta)=\{(e^{-2};-e^{-2})\})$.

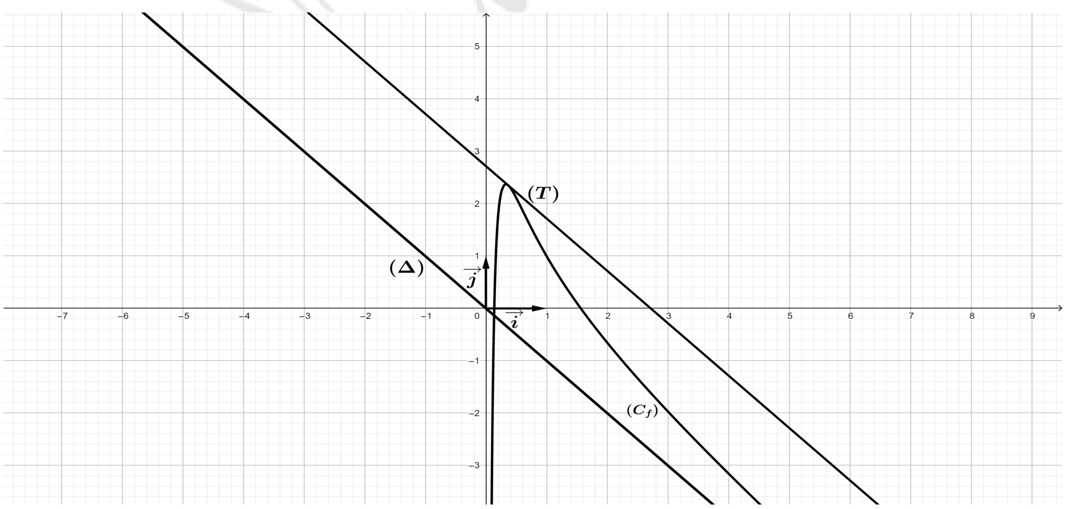
5 - اثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها . كتابة معادلة المماس (T) :

نعتبر النقطة $A(x_0;f(x_0))$.

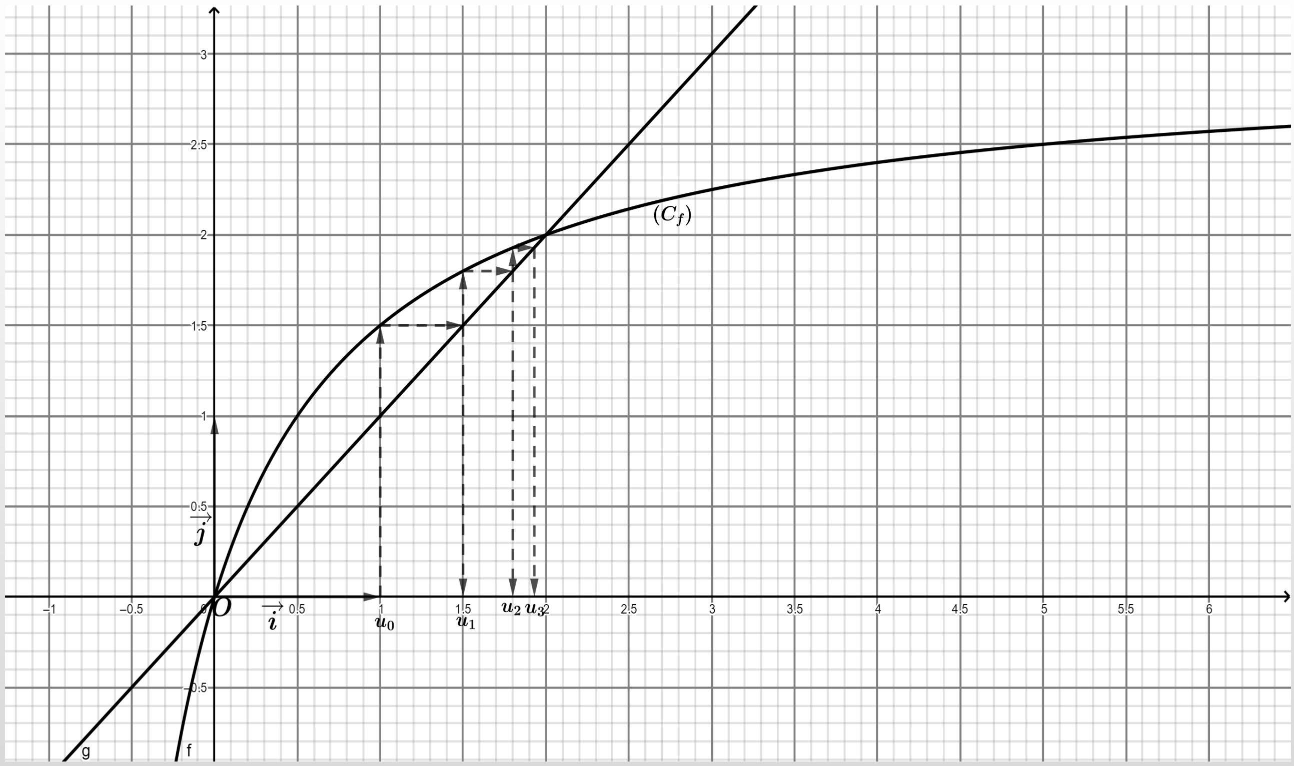
المماس (T) عند النقطة A يوازي المستقيم (Δ) معناه $f'(x_0)=-1$ معناه $-\frac{g(x_0)}{x_0^2}=-1$ أي $g(x_0)=x_0^2$ أي $1+x_0^2+\ln x_0=x_0^2$ ومنه $x_0=e^{-1}$ وعليه إحداثيات النقطة A التي يكون عندها المماس (T) يوازي المستقيم (Δ) هي $A(e^{-1};e-e^{-1})$.

معادلة المماس (T) : $(T): y_T=f'(e^{-1})(x-e^{-1})+f(e^{-1})=-x+e^{-1}+e-e^{-1}=-x+e$

6 - إنشاء المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحنى (C_f) :



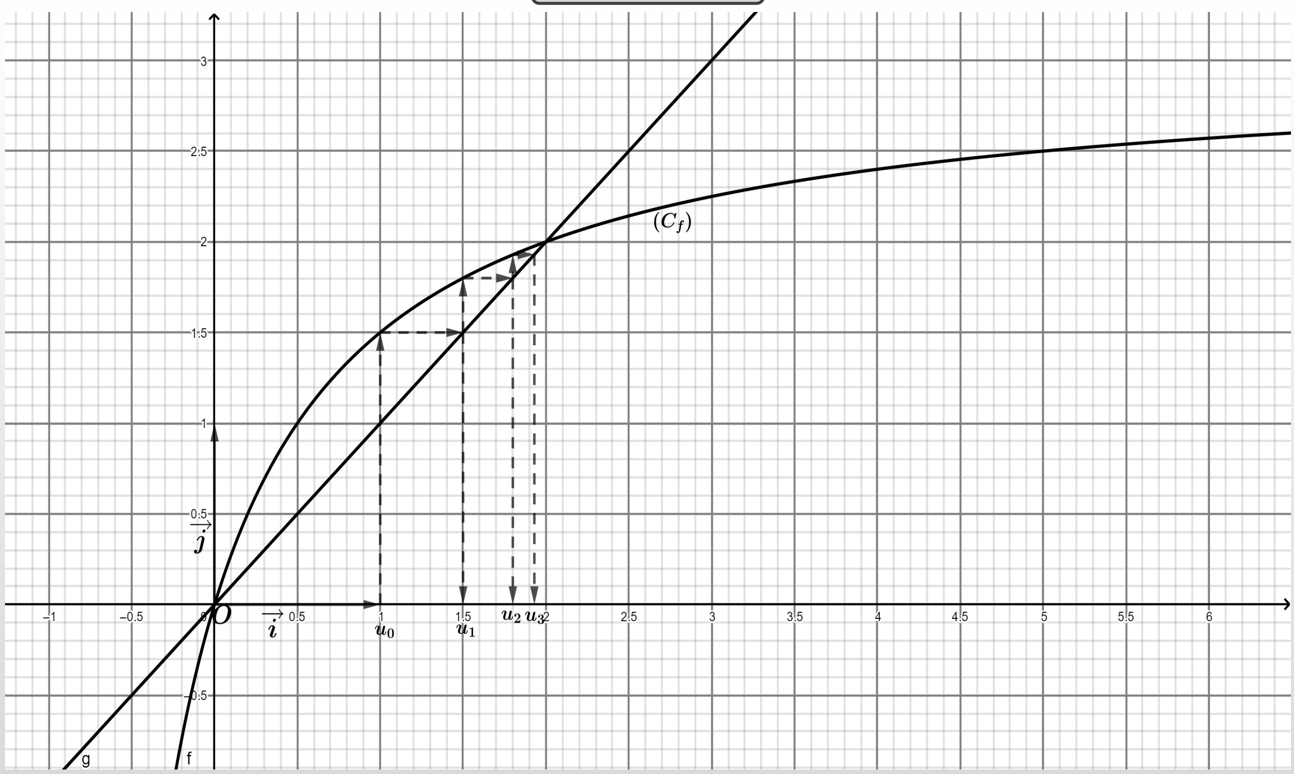
الوثيقة المرفقة



تُلصق الوثيقة المرفقة مع الإجابة النموذجية على الكراس

....

الوثيقة المرفقة



تُلصق الوثيقة المرفقة مع الإجابة النموذجية على الكراس