الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5.
2) عين باقي قسمة العدد 1432^{2013} على 5.
3) أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$2^{4n}-1$ مضاعف للعدد 5.
4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:
$$2^{412}+2^{8n+2}-5\equiv 0\,[5]$$

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة وحدودها موجبة، حدها الأول:
$$u_2=4$$
حيث:
$$u_5\times u_7=4096$$
1) أحسب u_6 ثم الأساس q.
2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.
3) أحسب المجموع S_n بدلالة n، حيث:
$$S_n=u_2+u_3+\cdots+u_n$$
4) علما أن: $2^8=256$.
- عين العدد الطبيعي n بحيث: $S_n=1020$.

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$f(x)=2x^3-3x^2+1$$
ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1) عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
2) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3) بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياها.
4) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$$f(x)=(x-1)(2x^2-x-1)$$
5) استنتج نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل.
6) أكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=\frac{1}{2}$.
7) أنشئ (C) و (Δ) في المعلم السابق.

تصحيح الموضوع الثاني:

التمرين الأول:

1) ندرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5:

من أجل $n=0$: $2^0\equiv 1\,[5]$

من أجل $n=1$: $2^1\equiv 2\,[5]$

من أجل $n=2$: $2^2\equiv 4\,[5]$

من أجل $n=3$: $2^3\equiv 3\,[5]$

من أجل $n=4$: $2^4\equiv 1\,[5]$

نلخص بواقي قسمة 2^n على 5 في الجدول التالي:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k\in\mathbb{N}$
$2^n\equiv$	1	2	4	3	$[5]$

ونكتب:
$$\begin{cases}2^{4k}\equiv 1\,[5]\\2^{4k+1}\equiv 2\,[5]\\2^{4k+2}\equiv 4\,[5]\\2^{4k+3}\equiv 3\,[5]\end{cases}$$
ومنه:
- بواقي قسمة 2^{4k} على 5 هي 1.
- بواقي قسمة 2^{4k+1} على 5 هي 2.
- بواقي قسمة 2^{4k+2} على 5 هي 4.
- بواقي قسمة 2^{4k+3} على 5 هي 3.

2) نعين باقي قسمة العدد 1432^{2013} على 5:

لدينا: $1432\equiv 2\,[5]$

حسب خواص الموافقات: $1432^{2013}\equiv 2^{2013}\,[5]$

ونكتب: $1432^{2013}\equiv 2^{4\times 503+1}\,[5]$

ولدينا: $2^{4k+1}\equiv 2\,[5]$

حسب خاصية التعدي ينتج:
$$1432^{2013}\equiv 2\,[5]$$
ومنه باقي قسمة العدد 1432^{2013} على 5 هو 2.

3) نثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$2^{4n}-1$ مضاعف للعدد 5.

$2^{4n}-1$ مضاعف للعدد 5 يعني أن $2^{4n}-1$ يقبل القسمة على 5.

أي:
$$2^{4n}-1\equiv 0\,[5]$$
نسمي الخاصية $P(n)$ التالية: $P(n):\ 2^{4n}-1\equiv 0\,[5]$

من أجل $n=0$ نجد: $0\equiv 0\,[5]$

ومنه $P(0)$ صحيحة.

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة.

أي:
$$2^{4n}-1\equiv 0\,[5]$$
ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$.

أي:
$$2^{4(n+1)}-1\equiv 0\,[5]$$

لدينا من الفرضية: $2^{4n}-1\equiv 0\ [5]\ ...(1)$

ولدينا: $2^4\equiv 1\ [5]\ ...(2)$

نضرب (1) في (2) ينتج: $(2^{4n}-1)2^4\equiv 0\times 1\ [5]$

بالنشر ينتج: $2^{4n}\times 2^4-2^4\equiv 0\ [5]$

ونكتب: $2^{4n+4}-2^4\equiv 0\ [5]$

أي: $2^{4(n+1)}-2^4\equiv 0\ [5]$

وبما أن: $2^4\equiv 1\ [5]$

فإن:

$$2^{4(n+1)}-1\equiv 0\ [5]$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

إذن العدد $2^{4n}-1$ مضاعف للعدد 5.

4) **نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:**

$$2^{412}+2^{8n+2}-5\equiv 0\ [5]$$

لدينا:

$2^{412}+2^{8n+2}-5\equiv 2^{4\times 103}+2^{2(4n+1)}-5\ [5]$

$2^{412}+2^{8n+2}-5\equiv 2^{4\times 103}+(2^{4n+1})^2-5\ [5]$

$2^{412}+2^{8n+2}-5\equiv 1+(2)^2-5\ [5]$

$2^{412}+2^{8n+2}-5\equiv 1+4-5\ [5]$

$2^{412}+2^{8n+2}-5\equiv 5-5\ [5]$

ومنه نجد:

$$2^{412}+2^{8n+2}-5\equiv 0\ [5]$$

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة وحدودها موجبة، حدها الأول:

$$u_2=4$$

حيث:

$$u_5\times u_7=4096\ ...(1)$$

1) **نحسب u_6 ثم الأساس q:**

نكتب كلا من u_7 و u_5 بدلالة u_6.

لدينا:

$$\begin{cases}u_7=u_6\times q\\ u_6=u_5\times q\end{cases}$$

ونكتب:

$$\begin{cases}u_7=u_6\times q\\ u_5=\dfrac{u_6}{q}\end{cases}$$

بالتعويض في المعادلة (1) ينتج: $u_6^2=4096$

نجد: $u_6=-64$ أو $u_6=64$

بما أن حدود المتتالية (u_n) موجبة فإن:

$$u_6=64$$

لدينا: $u_6=u_2\times q^4$

ومنه: $q^4=\frac{u_6}{u_2}$

بعد التعويض نجد: $q^4=16$

ونكتب: $q^4=(-2)^4$ أو $q^4=2^4$

نجد: $q=-2$ أو $q=2$

وبما أن (u_n) متتالية هندسية متزايدة فإن:

$$q=2$$

2) **نكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n:**

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_2 بالعلاقة التالية:

$$u_n=u_2\times q^{n-2}$$

بعد التعويض نجد: $u_n=4\times 2^{n-2}$

ونكتب: $u_n=2^2\times 2^{n-2}$

ومنه نجد:

$$u_n=2^n$$

3) **نحسب المجموع S_n بدلالة n:**

$$S_n=u_2+u_3+\cdots+u_n$$

تعطى عبارة مجموع حدود متتالية هندسية بالعلاقة التالية:

$$S_n=\text{الحد الأول في المجموع}\times\frac{1-\text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{1-\text{الأساس}}$$

ويعطى عدد الحدود بالعلاقة التالية:

عدد الحدود = دليل الحد الأخير في المجموع − دليل الحد الأول في المجموع + 1

حيث:

- **الحد الأول في المجموع هو u_2.**
- **الأساس هو q.**
- **عدد الحدود هو $n-1$.**

ومنه: $S_n=u_2\times\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$

بالتعويض: $S_n=4\times\frac{2^{n-1}-1}{2-1}$

ومنه نجد:

$$S_n=4(2^{n-1}-1)$$

4) **علما أن:** $2^8=256$.

- نعين العدد الطبيعي n بحيث: $S_n=1020$.

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $S_n=1020$

أي: $4(2^{n-1}-1)=1020$

بالاختزال: $2^{n-1}-1=255$

أي: $2^{n-1}=256$

حيث: $2^8=256$

ومنه: $2^{n-1}=2^8$

بالمطابقة نجد: $n-1=8$

ومنه:

$$n=9$$

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=2x^3-3x^2+1$$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) **نعين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:**

● **نحسب نهاية f الدالة عند $-\infty$:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-3x^2+1)$

نأخذ نهاية أكبر أس: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)$

ومنه نجد:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

● **نحسب نهاية f الدالة عند $+\infty$:**

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-3x^2+1)$

نأخذ نهاية أكبر أس: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3)$

ومنه نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2) **ندرس تغيرات الدالة f ثم نشكل جدول تغيراتها:**

● **ندرس تغيرات الدالة f:**

- نحسب الدالة المشتقة f' للدالة f:

لدينا: $f'(x) = 6x^2-6x$

ومنه نجد:

$$f'(x) = 6x(x-1)$$

- ندرس إشارة $f'(x)$:

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f'(x) = 0$

أي: $6x(x-1) = 0$

ومنه: $6x = 0$ أو $x-1 = 0$

فنجد:

$$x = 0 \text{ أو } x = 1$$

نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(6x)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

حيث:

- الدالة f متزايدة تماما على المجال: $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$

- الدالة f متناقصة تماما على المجال: $]0\,;1[$

● **نشكل جدول تغيرات الدالة f:**

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

حيث:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

3) **نبين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياها:**

نحسب الدالة المشتقة الثانية $f''(x)$ حيث: $f''(x) = 12x-6$

ومنه نكتب:

$$f''(x) = 6(2x-1)$$

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f''(x) = 0$

أي: $2x-1 = 0$

ومنه نجد:

$$x = \frac{1}{2}$$

نحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$ فنجد:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ومنه (C) يقبل نقطة انعطاف w هي:

$$w\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$$

4) **نتحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = (x-1)(2x^2-x-1)$$

ننشر العبارة $(x-1)(2x^2-x-1)$ فنجد:

$$(x-1)(2x^2-x-1) = 2x^3-x^2-x-2x^2+x+1$$

بعد الاختزال والترتيب نجد:

$$(x-1)(2x^2-x-1) = 2x^3-3x^2+1 = f(x)$$

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (x-1)(2x^2-x-1)$$

5) **استنتاج نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل:**

نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل هي مجموعة حلول المعادلة:

$$f(x) = 0$$

أي: $(x-1)(2x^2-x-1) = 0$

ومنه:

$$\begin{cases} x-1 = 0 \\ \text{أو} \\ 2x^2-x-1 = 0 \end{cases}$$

لدينا: $x-1 = 0$

أي: $x = 1$

ولدينا: $2x^2-x-1 = 0$

نحسب المميز Δ فنجد: $\Delta = 9$

ومنه حلول المعادلة هي:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

وبالتالي:

(C) يقطع محور الفواصل في النقطتين A و B حيث:

$$A(1\,;0) \text{ و } B\left(-\frac{1}{2}\,;0\right)$$

6) نكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=\frac{1}{2}$:

تعطى معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 بالعلاقة التالية:

$$(\Delta):y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

حيث:

$$\begin{cases} x_0=\frac{1}{2} \\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \end{cases}$$

بعد التعويض نجد:

$$(\Delta):y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}$$

7) ننشئ (C) و (Δ):

- لرسم المماس (Δ) يكفي تعيين نقطتين اعتبارا من المعادلة:

$$(\Delta):y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}$$

x	$1/2$	0
y	$1/2$	$5/4$

فيصبح المماس (Δ) معرف بالنقطتين $w\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ و $w'\left(0;\frac{5}{4}\right)$.

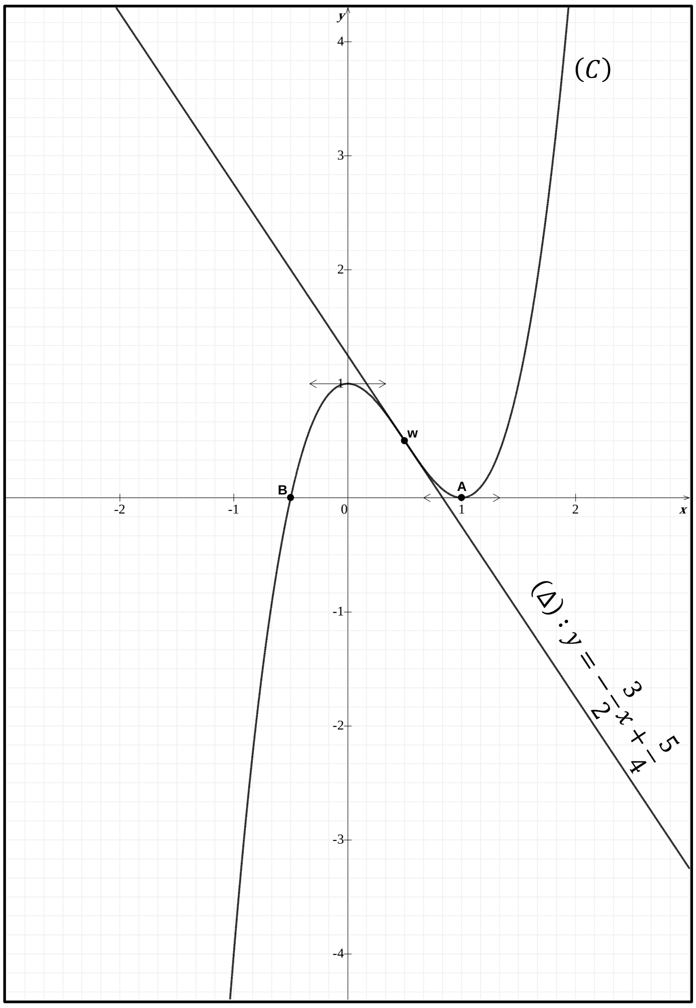
- لرسم المنحنى (C) نأخذ بعين الاعتبار ما يلي:

- نقط تقاطع المنحنى (C) مع محور الفواصل.

$A(1;0)$ و $B\left(-\frac{1}{2};0\right)$

- نقطة انعطاف المنحنى (C).

$$w\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$



المنحنى الممثل للدالة f

حظ سعيد

05 56 24 69 06
bouguetof.hamid@yahoo.fr