وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية بجاية
ثانوية الشهداء السبعة بوعيفل

السنـــة الدراسيــة : 2020/2019
المستوى : الثالثة علوم تجريبية
المـــدة : ساعتان

# اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

## التمرين الأول☺: (6 نقاط)

يحتوي صندوق $U$ على 10 كــرات: 3 منها بيضاء و7 سوداء و يحتوي صندوق $V$ على 10 كرات: 7 منها بيضاء و 3 سوداء( الكرات لا نفرق بينها باللمس) .

**I)** نسحب عشوائيا كرة من الصندوق $U$: اذا كانت بيضاء نعيدها الى نفس الصندوق و نسحب منه عشوائيا 3 كرات في أن واحد. أما اذا كانت سوداء فنضعها في الصندوق $V$ و نسحب منه عشوائيا 3 كرات على التوالي و بدون ارجاع. نعتبر الحادثتين:

$A$: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء و من الصندوق $U$.

$B$: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء و من الصندوق $V$.

**1)** أحسب كل من: $P(A)$ و $P(B)$.

**2)** استنتج احتمال أن تكون الكرات الثلاثة المسحوبة بيضاء .

**3)** اذا علمت أن الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء، ما هو احتمال أن تكون من الصندوق $U$.

**II)** نفرغ محتوى الصندوقين $U$ و $V$ في كيس غير شفاف و نضيف له $n$ كرة حمراء ($n \geq 2$).
نسحب عشوائيا من الكيس كرتان على التوالي مع الإرجاع. نسمي $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس.

**1)** برر أن قيم المتغير العشوائي $X$ هي: $\{n\ ;\ n-1\ ;\ n-2\}$.

**2)** عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي $X$ .

**3)** نضع $n=2$ ، احسب الأمل الرياضياتي ، التباين و الإنحراف للمتغير العشوائي $X$.

## التمرين الثاني☺: ( 5 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:
$$\begin{cases} u_0=0\ ;\ u_1=1 \\ u_{n+2}=\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n \end{cases}.$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ و $w_n=5^n\times u_n$.

**1)** بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{5}$، ثم اكتب $v_n$ بدلالة $n$.

**2)** أ) بين أن المتتالية $(w_n)$حسابية أساسها 5.

ب) اكتب $w_n$ بدلالة $n$، ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$.

**3)** نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$:

$S_n=v_0+v_1+..........+v_{n-1}$ ، $S'_n=w_n+w_{n+1}+..........+w_{n+2020}$ و $P_n=v_0\times v_1\times..........\times v_n$

✓ أحسب $S_n$ ، $S'_n$ و $P_n$ بدلالة $n$.

## التمرين الثالث☺ (9 نقاط)

**I)** نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث: $P(z)=z^3+(1-i\sqrt{3})z^2-2\sqrt{3}iz-2-2\sqrt{3}i$.

**1)** عين الأعداد الحقيقية $a$ و $b$ حيث من أجل كل عدد مركب $z$ : $P(z)=(z-1-i\sqrt{3})(z^2+az+b)$.

**2)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

**II)** نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط : $A$ , $B$ , $C$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب هي : $z_A=-1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=1+i\sqrt{3}$ و $z_D=-z_A$ .

**1)** أكتب العددان المركبان : $z_A, z_C$ على الشكل الأسي ، استنتج الشكل الأسي لـكل من $z_B$ ، $\dfrac{z_A}{z_C}$ .

**2)** أكتب $\dfrac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبريثم على الشكل الأسي ،استنتج طبيعة المثلث $OAB$ .

**3)** اكتب العدد المركب $\dfrac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

**4)** عين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون العدد : $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n$ تخيلي صرف .

**5)** عين $(E_1)$ و $(E_2)$ مجموعتي النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث:

$$(E_1):|z+1-i|=|iz-1-i|$$

$$(E_2):Arg\left(z-1-\sqrt{3}i\right)=Arg\left(\overline{z}-1+\sqrt{3}i\right)+\pi+2k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

**6)** نعتبر التحويل النقطي $T$ الذي يرفق بكل نقطة $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ و الذي يحول النقطة $A$ إلى $B$ و يحول $B$ إلى $D$.

**a.** بين أن العبارة المركبة للتحويل $T$ هي: $z'=iz$ .

**b.** عيّن طبيعة التحويل $T$ و حدد عناصره المميزة .

**c.** عين $z_E$ لاحقة النقطة $E$ صورة النقطة $D$ بالتحويل $T$ .

**d.** ماذا تستنتج بالنسبة الى النقط $A$ ، $B$ ، $D$ و $E$.

**أستاذتكم تتمنى لكم كل التوفيق و النجاح - بن صافية-**

# الإجابة المقترحة للإختبار الفصل الثاني:

## التمرين الأول☺:

**I)** $A$: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء من الصندوق $U$.

$B$: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء و من الصندوق $V$.

**1) حساب كل من: $P(A)$ و $P(B)$:**

$$P(A)=\frac{3}{10}\times\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30} \quad \text{و} \quad P(B)=\frac{7}{10}\times\frac{A_7^3}{A_{11}^3}=\frac{49}{330}$$

**2) استنتاج احتمال أن تكون الكرات الثلاثة المسحوبة بيضاء:**

(نسميها الحادثة $C$):قد تكون بيضاء ومن الصندوق $U$ او بيضاء و من الصندوق $V$.

$$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{1}{30}+\frac{49}{330}=\frac{60}{330}=\frac{2}{11}$$

**4) اذا علمت أن الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء، ما هو احتمال أن تكون من الصندوق $U$:**

$$P_C(U)=\frac{P(C\cap U)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{2}{11}}=\frac{1\times 11}{30\times 2}=\frac{11}{60}$$

**II)** نسمي $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس.

**1) برر أن قيم المتغير العشوائي $X$ هي:** $\{n \ ; \ n-1 \ ; \ n-2\}$.

اذا سحبنا كرتان ليستا حمراوتان، يبقى في الكيس $n$ كرة حمراء .

اذا سحبنا كرتان احداهما حمراء، يبقى في الكيس $n-1$ كرة حمراء .

اذا سحبنا كرتان حمراوتان، يبقى في الكيس $n-2$ كرة حمراء .

**2) قانون الإحتمال للمتغير العشوائي $X$ .**

$$P(X=n)=\frac{20^2}{(n+20)^2}=\frac{400}{n^2+40n+400}$$

$$P(X=n-1)=\frac{2(n^1\times 20^1)}{(n+20)^2}=\frac{40n}{n^2+40n+400}$$

$$P(X=n-1)=\frac{n^2}{(n+20)^2}=\frac{n^2}{n^2+40n+400}$$

| $X$ | $n$ | $n-1$ | $n-2$ |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{400}{n^2+40n+400}$ | $\frac{40n}{n^2+40n+400}$ | $\frac{n^2}{n^2+40n+400}$ |

**3)** نضع $n=2$

| $X$ | $2$ | $1$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{400}{484}$ | $\frac{80}{484}$ | $\frac{4}{484}$ |

✓ **الأمل الرياضياتي :** $E(X)=\frac{2\times 400+1\times 80+0\times 4}{484}=1.8$

✓ **التباين:** $V(X)=\frac{2^2\times 400+1^2\times 80+0^2\times 4}{484}-(1.8)^2=0.23$

✓ **الانحراف:** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.23}=0.48$ .

## التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي:

$$\begin{cases} u_0=0 \ ; \ u_1=1 \\ u_{n+2}=\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n \end{cases}.$$

نضع : $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ و $w_n=5^n\times u_n$.

**1) اثبات أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{5}$:**

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+2}-\frac{1}{5}u_{n+1}}{u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n}=\frac{\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n-\frac{1}{5}u_{n+1}}{u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}\left(u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n\right)}{\left(u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n\right)}=\frac{1}{5}$$

**كتابة $v_n$ بدلالة $n$:** لدينا: $v_0=u_1-\frac{1}{5}u_0=1$

منه: $v_n=v_0\times q^n=\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

**2) أ)تبيان أن المتتالية $(w_n)$ حسابية أساسها $5$:**

$$w_{n+1}-w_n=5^{n+1}\times u_{n+1}-5^n\times u_n$$
$$=5^n\left(5u_{n+1}-u_n\right)$$

لدينا: $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ منه: $u_{n+1}=v_n+\frac{1}{5}u_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{5}u_n$.

اذن:

$$w_{n+1}-w_n=5^n\left(5\left(\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{5}u_n\right)-u_n\right)$$
$$=5^n\left(5\times\frac{1}{5^n}+u_n-u_n\right)=5$$

**ب) كتابة $w_n$ بدلالة $n$:** $w_n=w_0+nr=0+n\times 5=5n$

**استنتاج $u_n$ بدلالة $n$:**

- منه: $w_n=5^n\times u_n$ : $u_n=\frac{w_n}{5^n}=\frac{5n}{5^n}$.

**3) حساب $S_n$ و $S'_n$ و $P_n$ بدلالة $n$:**

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots\dots + v_{n-1} = v_0\left(\frac{1-q^{n-1-0+1}}{1-q}\right)$$

$$= 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}\right) = \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

$$S'_n = w_n + w_{n+1} + \dots\dots\dots + w_{n+2020}$$

$$= \frac{n+2020-n+1}{2}\left(w_n + w_{n+2020}\right)$$

$$= \frac{2021}{2}\left(5n + 5(n+2020)\right) = 2021(5n+1010)$$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots\dots\dots \times v_n$$

و: $$= 1\times\left(\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\left(\frac{1}{5}\right)^3\times\dots\dots\dots\dots\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{0+1+2+\dots\dots+n} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n-0+1}{2}(0+n)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

**التمرين الثالث☺**

**I)** $P(z) = z^3 + \left(1-i\sqrt{3}\right)z^2 - 2\sqrt{3}iz - 2 - 2\sqrt{3}i$.

**1) تعيين الأعداد الحقيقية $a$ و $b$ :**

$P(z) = \left(z-1-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+az+b\right)$:

نجد: $a=2$ و $b=2$

**2) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $P(z)=0$ :**

$z_0 = 1+i\sqrt{3}$ ، $z_1 = -1+i$ و $z_2 = -1-i$

**II)** $z_A = -1+i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 1+i\sqrt{3}$ و $z_D = -z_A$ .

**1) أكتب العددان المركبان $z_A, z_C$ على الشكل الأسي ، استنتج**

**الشكل الأسي لكل من $z_B$ ، $\frac{z_A}{z_C}$ :**

$z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_B = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}\right)}$

و $\frac{z_A}{z_C} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$.

**2) كتابة $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري و الأسي ، ثم استنتاج طبيعة المثلث $OAB$ :**

$\frac{z_A}{z_B} = \frac{(-1+i)\times(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{1-1-2i}{1+1} = -i$ منه: $\frac{z_A}{z_B} = e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}$

$\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = 1$ منه: $OA = OB$ و $Arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = -\frac{\pi}{2}$

منه: $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right) = -\frac{\pi}{2}$ منه المثلث قائم و متساوي الساقين.

**3) اكتب العدد المركب $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري :**

$$\frac{z_A}{z_C} = \frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(-1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1^2+\sqrt{3}^2} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$$

**استنتاج القيمة المضبوطة لـ : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$:**

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)$$ ،

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}\right)$$

**4) عين قيم العدد الطبيعي $n$ :**

$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ تخيلي صرف معناه: $Arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

منه:

$$n\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow n = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\times\left(\frac{2}{-\pi}\right)$$

$n = -1-2k$ ، $k \in \mathbb{Z}^*_-$

**5) تعيين $(E_1)$ و $(E_2)$ :**

لدينا: $(E_1): |z+1-i| = |iz-1-i|$ منه:

$(E_1): |z-(-1+i)| = |i(z+i-1)|$

تكافيء: $(E_1): |z-z_A| = |z-z_D|$ ، $AM = DM$

منه: $(E_1)$ هي محور القطعة المستقيمة $[AD]$.

لدينا:

$(E_2): Arg\left(z-1-\sqrt{3}i\right) = Arg\left(\bar{z}-1+\sqrt{3}i\right) + \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$(E_2): Arg\left(z-(1+\sqrt{3}i)\right) = -Arg\left(\overline{\bar{z}-1+\sqrt{3}i}\right) + \pi + 2k\pi$

$(E_2): Arg\left(z-(1+\sqrt{3}i)\right) = -Arg\left(z-(1+\sqrt{3}i)\right) + 2k\pi + \pi + 2k\pi$

$(E_2): 2Arg\left(z-(1+\sqrt{3}i)\right) = \pi + 4k\pi$

$(E_2): Arg\left(z-(1+\sqrt{3}i)\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$(E_2): \left(\overrightarrow{U};\overrightarrow{MC}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

منه: $(E_2)$ هي نصف المستقيم $]CM)$ الموازي لمحور التراتيب ما عدا النقطة $C$ .

**6)**

**أ) تبيان أن العبارة المركبة للتحويل $T$ هي: $z' = iz$ :**

$T$ يكتب على الشكل: $z' = az+b$ و يحول النقطة $A$ إلى $B$

و يحول $B$ إلى $D$ منه: $\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_B + b \end{cases}$ اذن:

$$a = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_B} = i \quad \text{و} \quad b = z_B - az_A = 0$$

**ب) طبيعة التحويل $T$ و عناصره المميزة :**

$a \in \mathbb{C}$ و $|a| = 1$ منه $T$ دوران زاويته $\theta = Arg(a) = \frac{\pi}{2}$

و مركزه $\Omega$ حيث: $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = 0$ .

**ت) تعيين $z_E$ لاحقة النقطة $E$ صورة النقطة $D$:**

$z_E = iz_D$ :منه $z_E = i(1-i) = i+1$

**ث)** نستنتج أن النقط $A$ ، $B$ ، $D$ و $E$ تنتمي الى نفس الدائرة ذات المركز $O$ و نصف القطر $R = \sqrt{2}$.