

تصحيح الموضوع الثالث:التمرين الأول:(1) متتالية حسابية حدتها الأول  $u_1 = 2$  وأساسها  $r = 4$ .(1) أكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$ :تطعى عبارة الحد العام  $u_n$  لمتتالية حسابية حدتها الأول  $u_1$  وبالعلاقة التالية:

$$u_n = u_1 + r(n - 1)$$

$$u_n = 2 + 4(n - 1)$$

بالتعويض:

$$u_n = 2 + 4n - 4$$

أي:

ومنه نجد:

$$u_n = 4n - 2 = 2(2n - 1)$$

(2) نحسب الحد السابع والحد الخامس والعشرين:

بما أن الحد الأول هو  $u_1$  فإن:- الحد السابع هو  $u_7$ .- الحد الخامس والعشرين هو  $u_{25}$ .

• نحسب الحد السابع:

$$u_7 = 4 \times 7 - 2$$

لدينا:

ومنه نجد:

$$u_7 = 26$$

• نحسب الحد الخامس والعشرون:

$$u_{25} = 4 \times 25 - 2$$

لدينا:

ومنه نجد:

$$u_{25} = 98$$

(3) نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أكبر تماماً من 1:

$$2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$$

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 4(n - 1) - 2 + 4(n + 1) - 2$$

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 4n - 4 - 2 + 4n + 4 - 2$$

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 8n - 4$$

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 2(4n - 2)$$

$$u_n = 4n - 2$$

حيث:

ومنه نجد:

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n$$

(4) نحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

تطعى عبارة مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية وبالعلاقة التالية:

$$S_n = \frac{(\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع})(\text{عدد الحدود})}{2}$$

وعدد الحدود يحسب بالعلاقة التالية:

$$1 + \text{دليل الحد الأول في المجموع} - \text{دليل الحد الأخير في المجموع} = \text{عدد الحدود}$$

الموضوع الثالث:التمرين الأول:(1) متتالية حسابية حدتها الأول  $u_1 = 2$  وأساسها  $r = 4$ .(1) أكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(2) أحسب الحد السابع والحد الخامس والعشرين.

(3) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أكبر تماماً من 1:

$$2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$$

(4) أ- أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

ب- أوجد العدد الطبيعي  $n$  بحيث:

$$S_n = 98$$

التمرين الثاني: $a, b$  و  $c$  أعداد صحيحة بحيث:- باقي القسمة الإقليدية للعدد  $a$  على 7 هو 3.- باقي القسمة الإقليدية للعدد  $b$  على 7 هو 4.- باقي القسمة الإقليدية للعدد  $c$  على 7 هو 6.

(1) عين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين:

$$a^2 - b^2 \quad a \times b$$

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :

$$c^{2n} \equiv 1 [7]$$

ب- تتحقق أن:

$$2015 \equiv 6 [7]$$

- استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين:

$$2015^{2015} \quad 2014 \quad 2015^{2014}$$

التمرين الثالث:نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\{1\} - \mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{-x + 1}$$

ولتكن  $(C)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعمد ومتتجانس  $(O; i, j)$ .(1) عين العدد حقيقي  $a$  حيث من أجل كل  $x$  من  $\{1\} - \mathbb{R}$  فإن:

$$f(x) = a + \frac{1}{-x + 1}$$

(2) أحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف ثم فسر النتائج هندسياً.

(3) أدرس تغيرات الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.(4) بين أن المنحنى  $(C)$  يقبل مماسين  $(\Delta)$  و  $('\Delta)$  معامل توجيههما يساوي 1 يطلب تعين معادلة كل منها.(5) عين احداثي نقط تقاطع  $(C)$  مع محوري الاحداثيات.(6) انشئ في نفس المعلم، المماسين  $(\Delta)$  و  $('\Delta)$  والمنحنى  $(C)$ .

حيث:

- العدد الأول في المجموع هو  $u_1$ .
- العدد الأخير في المجموع هو  $u_n$ .
- عدد الحدود هو  $n$ .

بالتعميض ينتهي:

أي: ومنه نجد:

$$S_n = 2n^2$$

ب- نبحث عن العدد الطبيعي  $n$  بحسب:

$$S_n = 98$$

نحل في  $\mathbb{N}$  المعادلة:

أي:

ومنه:

فتجد:

بما أن  $n$  عدد طبيعي فإن:

$$n = 7$$

التمرين الثاني:

$a$ ,  $b$  و  $c$  أعداد صحيحة بحسب:

- باقي القسمة الإقليدية للعدد  $a$  على 7 هو 3.
- باقي القسمة الإقليدية للعدد  $b$  على 7 هو 4.
- باقي القسمة الإقليدية للعدد  $c$  على 7 هو 6.

(1) نعين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العدددين:

$$a^2 - b^2 \text{ و } a \times b$$

• نعين باقي قسمة العدد  $a \times b$  على 7:

$$a \equiv 3 [7] \dots (1)$$

$$b \equiv 4 [7] \dots (2)$$

$$a \times b \equiv 12 [7]$$

$$12 \equiv 5 [7]$$

$$a \times b \equiv 5 [7]$$

فإن (حسب خاصية التعدي):

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد  $a \times b$  على 7 هو 5.

• نعين باقي قسمة العدد  $a^2 - b^2$  على 7:

$$a \equiv 3 [7]$$

$$a^2 \equiv 3^2 [7]$$

$$3^2 \equiv 2 [7]$$

$$a^2 \equiv 2 [7] \dots (3)$$

$$b \equiv 4 [7]$$

$$b^2 \equiv 4^2 [7]$$

$$4^2 \equiv 2 [7]$$

$$b^2 \equiv 2 [7] \dots (4)$$

$$a^2 - b^2 \equiv 0 [7]$$

بطرح (4) من (3) طرف لطرف نجد:

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد  $a^2 - b^2$  على 7 هو 0.

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\{1\} - \mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{-x + 1}$$

ويكن  $(C)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعمد ومتجانس  $(0; i, j)$ .

(1) نعين العدد الحقيقي  $a$  حيث من أجل كل  $x$  من  $\{1\} - \mathbb{R}$  فإن:

$$f(x) = a + \frac{1}{-x + 1}$$

لدينا:

بتوحيد المقامات ينتج:

بعد النشر والترتيب نجد:

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} -a = 2 \\ a + 1 = -1 \end{cases}$$

ومنه:

$$a = -2$$

وبالتالي من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1\}$  فإن:

$$f(x) = -2 + \frac{1}{-x+1}$$

(2) نحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف ثم نفسر النتائج

هندسياً:

• نحسب النهايات عند  $-\infty$  و  $+\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right) = 0$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right) = 0$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

التفسير الهندسي:

المنحنى (C) يقبل مستقيمة مقارب يوازي محور الفواصل معادلته:

$$y = -2$$

• نحسب النهايات عند 1:

$$\lim_{x \leq 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+1) = 0^+$$

$$\lim_{x \leq 1} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right) = +\infty$$

لدينا:

$$\lim_{x \leq 1} f(x) = +\infty$$

لدينا:

$$\lim_{x \geq 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (-x+1) = 0^-$$

$$\lim_{x \geq 1} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right) = -\infty$$

لدينا:

$$\lim_{x \geq 1} f(x) = -\infty$$

### التفسير الهندسي:

المنحنى (C) يقبل مستقيمة مقارب يوازي محور التراتيب معادلته:

$$x = 1$$

(3) ندرس تغيرات الدالة  $f$  ثم نشكل جدول تغيراتها:

• ندرس تغيرات الدالة  $f$ :

- الدالة المشقة للدالة  $f$  هي:

$$f'(x) = \frac{1}{(-x+1)^2}$$

- دراسة إشارة  $f'(x)$ :

من أجل كل  $x$  من المجال  $[1; +\infty)$  نجد:

$$f'(x) > 0$$

لأن:

$$\begin{cases} 1 > 0 \\ ((-x+1)^2) > 0, x \in ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[ \end{cases}$$

. ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[1; +\infty)$ .

• نشكل جدول تغيرات الدالة  $f$ :

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	
$f(x)$	$\nearrow +\infty$	$\searrow -\infty$	$\nearrow -2$

(4) نبين أن المنحنى (C) يقبل مماسين ( $\Delta$ ) و ( $\Delta'$ ) معامل توجيههما

يساوي 1 ونعيين معادلة كل منها:

• نبين أن المنحنى (C) يقبل مماسين ( $\Delta$ ) و ( $\Delta'$ ) معامل توجيههما

يساوي 1:

تعرف معادلة المماس بالعلاقة التالية:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

ونكتب أيضاً:

$$y = f'(x_0) \cdot x + [f(x_0) - x_0 \cdot f(x_0)]$$

حيث:

$f'(x_0)$  هو معامل توجيه المماس.

نقول أن المنحنى (C) يقبل مماسين ( $\Delta$ ) و ( $\Delta'$ ) معامل توجيههما

يساوي 1 إذا كان للمعادلة  $f'(x_0) = 1$  حلان متمايزان  $x_0$  و  $x'_0$ .

نحل في  $\{1\} - \mathbb{R}$  المعادلة:

أي:

$$\frac{1}{(-x_0+1)^2} = 1$$

$$x_0(x_0 - 2) = 0$$

بعد النشر والترتيب ينتج:

ومنه نجد:

$$x'_0 = 2 \text{ أو } x_0 = 0$$

وبالتالي المنحنى (C) يقبل مماسين ( $\Delta$ ) و ( $\Delta'$ ) معامل توجيههما

يساوي 1 عند النقطتين ذات الفاصلتين 0 و 2 على الترتيب.

• تعين معادلة كل من ( $\Delta$ ) و ( $\Delta'$ ):

لدينا:

$$\{(\Delta) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$\{(\Delta') : y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$f(x) = a + \frac{1}{-x+1}$$

$$f(x) = \frac{a(-x+1)+1}{-x+1}$$

$$f(x) = \frac{-ax+(a+1)}{-x+1}$$

لدينا:

بتوحيد المقامات ينتج:

بعد النشر والترتيب نجد:

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} -a = 2 \\ a + 1 = -1 \end{cases}$$

ومنه:

$$a = -2$$

وبالتالي من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{1\}$  فإن:

$$f(x) = -2 + \frac{1}{-x+1}$$

(2) نحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف ثم نفسر النتائج

هندسياً:

• نحسب النهايات عند  $-\infty$  و  $+\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right) = 0$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right) = 0$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

التفسير الهندسي:

المنحنى (C) يقبل مستقيمة مقارب يوازي محور الفواصل معادلته:

$$y = -2$$

• نحسب النهايات عند 1:

$$\lim_{x \leq 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+1) = 0^+$$

$$\lim_{x \leq 1} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right) = +\infty$$

لدينا:

$$\lim_{x \leq 1} f(x) = +\infty$$

لدينا:

$$\lim_{x \geq 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (-x+1) = 0^-$$

$$\lim_{x \geq 1} \left( -2 + \frac{1}{-x+1} \right) = -\infty$$

لدينا:

$$\lim_{x \geq 1} f(x) = -\infty$$

حيث:

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f(0) = -1 \\ f'(2) = 1 \\ f(2) = -3 \end{cases}$$

ومنه نجد:

$$\begin{cases} (\Delta) : y = x - 1 \\ (\Delta') : y = x - 5 \end{cases}$$

(5) نعين احصائيي نقط تقاطع ( $C$ ) مع محوري الاحصيات:

• مع محور الفواصل:

نقط تقاطع المنحنى ( $C$ ) مع حامل محور الفواصل هي مجموعة حلول المعادلة:

$$f(x) = 0$$

نحل في  $\mathbb{R} - \{1\}$  المعادلة:

أي:

$$x = \frac{1}{2}$$

ومنه نجد:

إذن ( $C$ ) يقطع محور الفواصل في النقطة:

$$A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$$

• مع محور التراتيب:

نقط تقاطع المنحنى ( $C$ ) مع حامل محور التراتيب هي مجموعة حلول المعادلة:

$$y = f(0)$$

$$f(0) = -1$$

لدينا:

إذن ( $C$ ) يقطع محور التراتيب في النقطة:

$$B(0; -1)$$

(6) ننشئ في نفس المعلم، المماسين ( $\Delta$ ) و ( $\Delta'$ ) والمنحنى ( $C$ ):

• لرسم المماس ( $\Delta$ ) يكفي تعين نقطتين اعتبارا من المعادلة:

$$(\Delta) : y = x - 1$$

$x$	1	0
$y$	0	-1

فيصبح المماس ( $\Delta$ ) معرف بال نقطتين  $(1; 0)$  و  $(0; -1)$ .

• لرسم المماس ( $\Delta'$ ) يكفي تعين نقطتين اعتبارا من المعادلة:

$$(\Delta') : y = x - 5$$

$x$	5	0
$y$	0	-5

فيصبح المماس ( $\Delta'$ ) معرف بال نقطتين  $(5; 0)$  و  $(0; -5)$ .

• لرسم المنحنى ( $C$ ) نأخذ بعين الاعتبار ما يلي:

- المستقيمات المقاربة للمنحنى ( $C$ ):

$$x = 1$$

$$y = -2$$

- نقطة تقاطع المنحنى ( $C$ ) مع حامل محور الفواصل:  $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

- نقطة تقاطع المنحنى ( $C$ ) مع حامل محور التراتيب:  $B(0; -1)$

