اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة رياضيات، تقني رياضيات المدّة: ساعتان

التّمرين الأوّل: (6 نقاط)

1) نعتبر المعادلة $(E)\quad 11x-7y=5$ حيث x و y عددان صحيحان نسبيّان.

أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

ب) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، نعتبر المستقيم (D) ذو المعادلة الدّيكارتيّة $11x-7y-5=0$. نرمز بـــ (Δ) لمجموعة النّقط $M(x,y)$ من المستوي حيث $0\leq x\leq 50$ و $0\leq y\leq 70$.

عيّن عدد النّقاط من (D) التي تنتمي إلى (Δ) والتي تكون إحداثياتها أعداداً صحيحة نسبيّة.

2) نعتبر المعادلة $(F)\quad 11x^2-7y^2=5$ حيث x و y عددان صحيحان نسبيّان.

أ) أثبت أنّه إذا كانت الثنائيّة (x,y) حلاً للمعادلة (F) فإنّ $x^2\equiv 2y^2[5]$.

ب) ليكن x و y عددين صحيحين نسبيّين. أنقل ثمّ أتمم الجدولين الآتيين

y	0	1	2	3	4	$\equiv[5]$
$2y^2$						$\equiv[5]$

x	0	1	2	3	4	$\equiv[5]$
x^2						$\equiv[5]$

ج) استنتج أنّه إذا كانت الثنائيّة (x,y) حلاً للمعادلة (F) فإنّ كل من x و y مضاعف لـ 5.

3) أثبت أنّه إذا كان كل من x و y مضاعف لـ 5 فإنّ الثنائيّة (x,y) ليست حلاً للمعادلة (F).

التّمرين الثاني: (14 نقطة)

I. الجدول الآتي يُمثّل جدول تغيّرات الدّالّة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=x^3-x^2-x-1$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

1) أحسب $h(1,84)$. (تُعطى النّتيجة مدوّرة إلى 10^{-2})

2) استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II. نعتبر الدّالّة العدديّة g المعرّفة على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ بـ $g(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}+\ln(x^2-1)$.

1) أحسُب نهايات الدّالّة g بجوار أطراف مجموعة تعريفها.

2) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $g'(x)=\dfrac{2}{(x^2-1)^2}h(x)$، استنتج اتجاه تغيّر الدّالّة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها. (تُعطى $g(1,84)\simeq 2,41$)

3) أثبت أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-2,11\leq\alpha\leq-2,10$.

4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

III. نعتبر الدّالّة العدديّة f المعرّفة على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ بــ $f(x)=e^x\ln(x^2-1)$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة على محور الفواصل: $1\,\mathrm{cm}$، الوحدة على محور التّراتيب: $6\,\mathrm{cm}$).

1) أحسُب نهايات الدّالّة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. فسّر هندسيّاً النّتائج.

2) أثبت أنّ $f'(x)$ من إشارة $g(x)$، واستنتج اتجاه تغيّر الدّالّة f.

3) شكّل جدول تغيّرات الدّالّة f.

4) أثبت أنّ $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha e^\alpha}{1-\alpha^2}$ ثمّ عيّن حصراً لـ $f(\alpha)$.

5) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين β و λ حيث $-1,42\leq\beta\leq-1,41$ و $1,41\leq\lambda\leq1,42$.

6) أرسم المنحنى (C_f).

أستاذ المادّة: عماد عقوني

التصحيح النموذجي

التّمرين الأوّل:

1) أ) لدينا (E) تكافئ $11x = 7y + 5$ ومنه $11x \equiv 5[7]$ ومنه $4x \equiv 5[7]$ ومنه $4x \equiv 12[7]$ ومنه $x \equiv 3[7]$ (لأنّ pgcd(4,12) أوّلي مع 7) ومنه $x = 7k + 3$ حيث k عدد صحيح نسبي، وبالتّعويض عن قيمة x في المعادلة (E) نجد أنّ $y = 11k + 4$، ومنه حلول المعادلة (E) هي الثنائيّات $(7k + 3, 11k + 4)$.

ب) لدينا $0 \leq x \leq 50$ ومنه $0 \leq 7k + 3 \leq 50$ ومنه $-0,43 \leq k \leq 6,71$ إذن $k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$، كذلك $0 \leq y \leq 70$ ومنه $0 \leq 11k + 4 \leq 70$ ومنه $-0,36 \leq k \leq 6$ إذن $k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$، ومنه عدد نقاط المستقيم (D) التي تنتمي إلى (Δ) هو 7 نقاط.

2) أ) إذا كانت الثنائيّة (x,y) حلاً للمعادلة (F) فإنّ $11x^2 - 7y^2 = 5$ ومنه $11x^2 = 7y^2 + 5$ ومنه $x^2 \equiv 2y^2[5]$.

ب) لدينا الجدولان:

y	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
$2y^2$	0	2	3	3	2	$\equiv [5]$

x	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
x^2	0	1	4	4	1	$\equiv [5]$

ج) لدينا $x^2 \equiv 2y^2[5]$ تكافئ $x^2 - 2y^2 \equiv 0[5]$، وعليه يكون لدينا الجدول الآتي

			بواقي قسمة $2y^2$ على 5						
			y	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
			$2y^2$	0	2	3	3	2	$\equiv [5]$
	x	x^2							
بواقي قسمة x^2 على 5	0	0		$\boxed{0}$	3	2	2	3	$\equiv [5]$
	1	1		1	4	3	3	4	$\equiv [5]$
	2	4		4	2	1	1	2	$\equiv [5]$
	3	4		4	2	1	1	2	$\equiv [5]$
	4	1		1	4	3	3	4	$\equiv [5]$
	$\equiv [5]$	$\equiv [5]$							

من خلال الجدول نجد أنّ $x \equiv 0[5]$ و $y \equiv 0[5]$، وعليه يكون كل من x و y مضاعف للعدد 5.

3) نفرض أنّ كل من x و y مضاعف للعدد 5، أي أنّه يوجد عددان صحيحان α و β حيث $x = 5\alpha$ و $y = 5\beta$، ومنه بالتعويض في المعادلة (F) نجد أنّ $5(11\alpha^2 - 7\beta^2) = 1$ وهي معادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$، إذن الثنائيّة (x,y) ليست حلاً للمعادلة (F) عندما يكون كل من x و y مضاعف للعدد 5.

أستاذ المادّة: عماد عقوني

التّمرين الثاني:

I. 1) لدينا $h(1,84)=0$.

2) إشارة $h(x)$ موضّحة في الجدول

x	$-\infty$		$1,84$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

II. 1) نهاية الدّالّة g بجوار $-\infty$ هي $+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2-1}+\ln(x^2-1)=+\infty$.

نهاية الدّالّة g بجوار $+\infty$ هي $+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2-1}+\ln(x^2-1)=+\infty$.

نهاية الدّالّة g بجوار -1 هي $-\infty$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\dfrac{2x+(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2-1}=-\infty$.

نهاية الدّالّة g بجوار 1 هي $+\infty$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\dfrac{2x+(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2-1}=+\infty$.

2) الدّالّة g قابلة للإشتقاق على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ ودالّتها المشتقّة $g'(x)=\dfrac{2(x^2-1)-2x(2x)}{(x^2-1)^2}+\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{2(x^3-x^2-x-1)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2}{(x^2-1)^2}h(x)$ ، وبما أنّ $\dfrac{2}{(x^2-1)^2}>0$ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 و -1 فإنّ إشارة $g'(x)$ من إشارة $h(x)$، ومنه الدّالّة g متزايدة تماماً على $]1,82;+\infty[$ وتناقصة تماماً على $]-\infty,-1[\cup]1;1,82[$ ، وجدول تغيّراتها هو

x	$-\infty$		-1		1		$1,82$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	//////	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖	//////	‖ $+\infty$	↘	$2,41$	↗	$+\infty$

3) الدّالّة g مستمرّة ورتيبة تماماً على $[-2,11;-2,10]$ و $g(-2,10)\times g(-2,11)<0$ ، إذن، حسب مبرهنة القيم المتوسّطة، المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-2,11\leq\alpha\leq-2,10$.

4) إشارة $g(x)$ موضّحة في الجدول

x	$-\infty$		α		-1		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	‖	//////	‖	$+$	

III. 1) نهاية الدّالّة f بجوار $-\infty$ هي 0 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\ln(x^2-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-1)e^x\times\dfrac{\ln(x^2-1)}{x^2-1}=0$.

أستاذ المادّة: عماد عقوني

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $-\infty$.

نهاية الدّالّة f بجوار $+\infty$ هي $+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\ln(x^2-1)=+\infty$.

نهاية الدّالّة f بجوار -1 هي $-\infty$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} e^x\ln(x^2-1)=-\infty$.

المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى $\left(C_f\right)$.

نهاية الدّالّة f بجوار 1 هي $-\infty$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} e^x\ln(x^2-1)=-\infty$.

المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى $\left(C_f\right)$.

2) الدّالّة f قابلة للإشتقاق على $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ ودالّتها المشتقة هي $f'(x)=g(x)\times e^x$. بما أنّ $e^x>0$ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 و -1 فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$، أي أنّ الدّالّة f متزايدة تماماً على $\left]-\infty,\alpha\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ ومتناقصة تماماً على $\left]\alpha,-1\right[$،

3) جدول تغيّرات الدّالّة f هو

x	-2		α		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $\ln(x^2-1)=\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ ومنه $f(\alpha)=e^\alpha\ln(\alpha^2-1)=\dfrac{2\alpha e^\alpha}{1-\alpha^2}$.

لدينا، من جهة $-2{,}11\le\alpha\le-2{,}10$ ومنه $-4{,}22\le 2\alpha\le-4{,}20$ وكذلك $0{,}121\le e^\alpha\le 0{,}122$ $-0{,}508\le 2\alpha e^\alpha\le-0{,}514$ ومن جهة أخرى لدينا $-2{,}11\le\alpha\le-2{,}10$ ومنه $4{,}41\le\alpha^2\le 4{,}45$ ومنه $-3{,}45\le 1-\alpha^2\le-3{,}41$ ومنه $-0{,}293\le\dfrac{1}{1-\alpha^2}\le-0{,}289$، وعليه نجد أنّ $0{,}146\le\dfrac{2\alpha e^\alpha}{1-\alpha^2}\le 0{,}151$

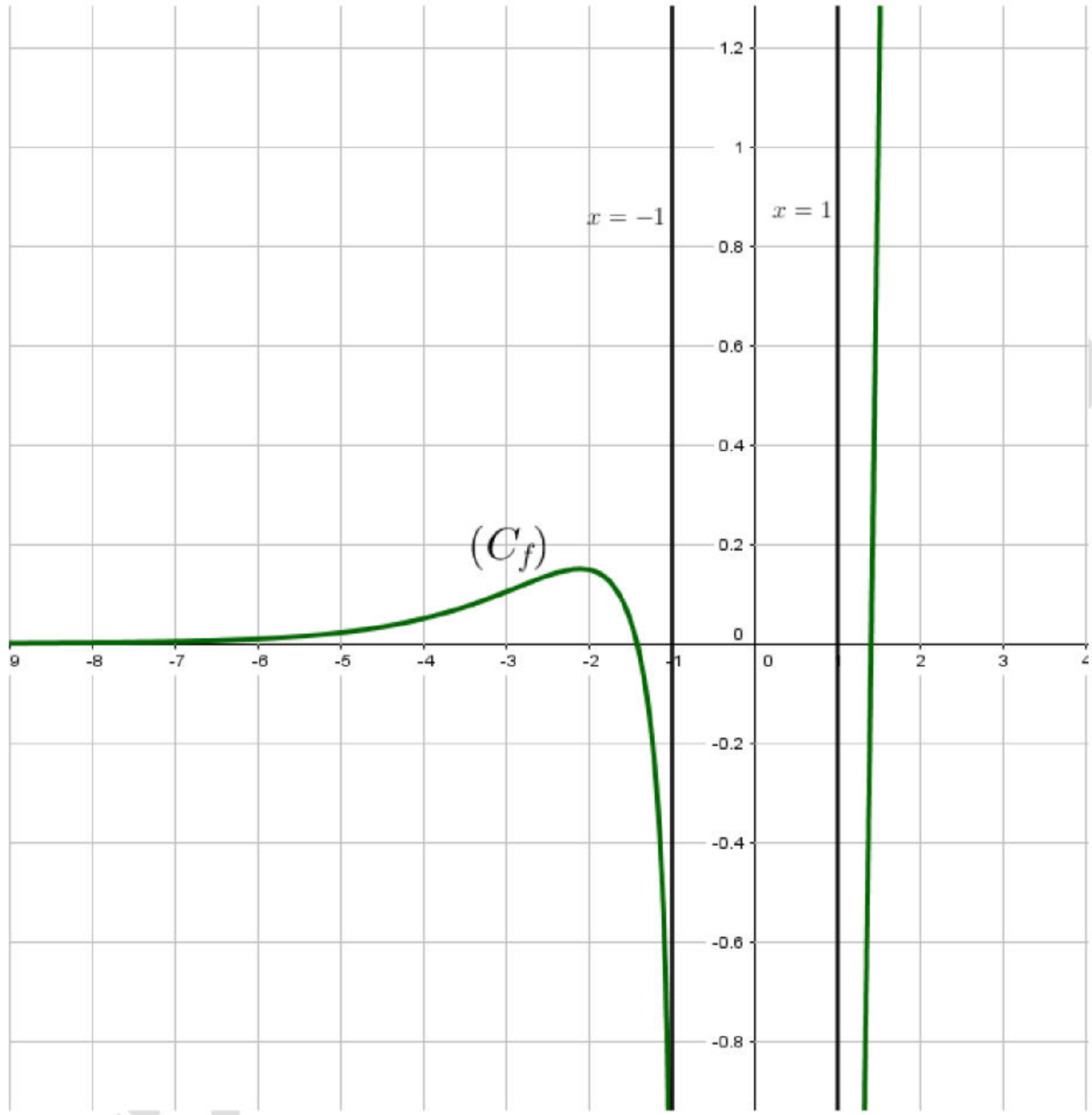
ومنه $0{,}146\le f(\alpha)\le 0{,}151$.

5) الدّالّة f مستمرّة ورتيبة تماماً على المجال $\left[-1{,}42;-1{,}41\right]$ و $f(-1{,}42)\times f(-1{,}41)<0$، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسّطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً β ينتمي إلى المجال $\left]-1{,}42;-1{,}41\right[$.

الدّالّة f مستمرّة ورتيبة تماماً على المجال $\left[1{,}41;1{,}42\right]$ و ($f(1{,}42)\times f(1{,}41)<$، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسّطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً λ ينتمي إلى المجال $\left]1{,}41;1{,}42\right[$.

6) التّمثيل البياني للدّالّة f موضح في الرّسم المرفق

أستاذ المادّة: عماد عقوني



أستاذ المادّة: عماد عقوني