1. النهايـــــــــات

❖ بعض نهايات الدوال المرجعية:

$\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$	$\bullet \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$	$\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$	$\bullet \lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$	$\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$
$\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$	$\bullet \lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$	$\bullet \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}=0$	$\bullet \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{x}=+\infty$	$\bullet \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \frac{1}{x}=-\infty$

❖العمليات على النهايات:

u و v دالتان ، a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ ، l و l' عددان حقيقيان ، $(l+)$ عدد حقيقي موجب تماما و $(l-)$ عدد حقيقي سالب تماما، نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

$\lim\limits_{x\to a} u(x)$	$\lim\limits_{x\to a} v(x)$	$\lim\limits_{x\to a}[u(x)+v(x)]$	$\lim\limits_{x\to a}[u(x)\times v(x)]$	$\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]$
l	l'	$l+l'$	$l\times l'$	$\frac{l}{l'}$ ، $l'\neq 0$
$l+$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$l-$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$l+$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$l-$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
0	$+\infty$	$+\infty$	ح.ع.ت	0
0	$-\infty$	$-\infty$	ح.ع.ت	0
$+\infty$	$l+$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$l-$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$l+$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$l-$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ح.ع.ت
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح.ع.ت
$+\infty$	$-\infty$	ح.ع.ت	$-\infty$	ح.ع.ت
0	0	0	0	ح.ع.ت

"ح ع ت" هي اختصار لـ "حالة عدم التعيين" و هي الحالات التي لا يمكن فيها استنتاج النهاية مباشرة وهي 4 حالات : $0\times\infty\,,+\infty-\infty,\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0}$.

❖حساب نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ و عند $-\infty$:

لحساب النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود نحسب نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ $(-\infty)$.

❖نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ و عند $-\infty$:

لحساب النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة نحسب نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ $(-\infty$).

❖نهاية دالة ناطقة عند عدد حقيقي a:

لحساب نهاية دالة ناطقة عند عدد حقيقي a نعوض قيمة a مباشرة في عبارة الدالة .

❖حساب نهاية دالة مركبة:

a ، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u ، v و f دوال حيث $f = v \circ u$ لحساب نهاية f عند a :

⇐ نحسب نهاية u عند a و لتكن b أي : $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$

⇐ نحسب نهاية v عند b و لتكن c أي : $\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$

⇐ نستنتج أخيرا أن : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

❖حساب النهايات بالمقارنة : f، u و v دوال و l عدد حقيقي.

⇐ إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = l$ و كان $v(x) \le f(x) \le u(x)$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

⇐ إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ و كان $f(x) \ge u(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

⇐ إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$ و كان $f(x) \le u(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

- تمدد هذه المبرهنات إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي.

السلــــــوك التقــــاربي

❖المستقيمات المقاربة :

⇦المستقيم المقارب الأفقي:

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = a$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = a$ فإن منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y = a$.

⇦المستقيم المقارب العمودي:

إذا كانت $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = -\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = +\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = -\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = +\infty$ فإن منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = a$.

⇦المستقيم المقارب المائل:

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0\right)$ فإن منحنى دالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = ax+b$ بجوار $+\infty$ $(-\infty)$.

❖دراسة الوضع النسبي لـمنحنى الدالة بالنسبة لمستقيم المقارب المائل:

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) منحنى الدالة f بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته من الشكل $y = ax+b$ ندرس إشارة : $[f(x)-(ax+b)]$

- إذا كان $[f(x)-(ax+b)] \prec 0$ فان (C_f) تحت (Δ) .
- إذا كان $[f(x)-(ax+b)] \succ 0$ فان (C_f) فوق (Δ) .
- إذا كان $[f(x)-(ax+b)] = 0$ فان (C_f) يقطع (Δ) .

❖المنحنيان المتقاربان:

إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ ($\lim_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=0$) فإن منحني الدالة f و منحني الدالة g متقاربان بجوار $+\infty$ ($-\infty$) .

⇦ دراسة الوضع النسبي لــمنحنيان:

لدراسة الوضع النسبي لــلمنحنيان (C_f) و(C_f) الممثلان للدالتين f و g على الترتيب ندرس إشارة : $[f(x)-g(x)]$

- إذا كان $[f(x)-g(x)]\prec 0$ فإن (C_f) تحت (C_g).
- إذا كان $[f(x)-g(x)]\succ 0$ فإن (C_f) فوق (C_g).
- إذا كان $[f(x)-g(x)]=0$ فإن (C_f) يقطع (C_g).

2. الاستمراريـــــــة و مبرهنة القيم المتوسطة :

⇦الاستمرارية على مجال:

- f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I.
- هندسيا **:** تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم .
- نقبل بأن كل الدوال المقررة في هذا المستوى مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

⇦مبرهنة القيم المتوسطة:

$\boxed{1\bullet}$ لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x)=k$ في مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

⇦نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a;b]$.

⇦نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

⇦إذا كانت الدالة f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$

$\boxed{2\bullet}$ لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x)=0$ في مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

⇦نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a;b]$.

⇦نتحقق من أن $f(a)\times f(b)\prec 0$.

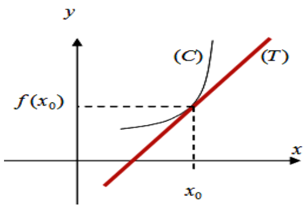
⇦إذا كانت الدالة f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$، فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.

3. الإشتقاقية

⇦العدد المشتق:

f دالة معرفة على مجال I من $\Re$. a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h\neq 0$.إذا كانت $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A$ حيث A عدد حقيقي فإن الدالة f تقبل الاشتقاق عند a . يسمى A العدد المشتق للدالة f عند a ونرمز له بـ$f'(a)$.

⇦ التفسير الهندسي (مماس منحنى دالة):



f دالة معرفة على مجال I من $\Re$ إذا قبلت f الاشتقاق عند x_0 فإن منحنيها يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(x_0)$

ومعادلته: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

❖المشتقات و العمليات:

⇦مشتقات دوال مألوفة:

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
الثابت الحقيقي a	0	$\Re$
x	1	$\Re$
ax	a	$\Re$
($n\geq 2$ و $n\in N$) x^n	nx^{n-1}	$\Re$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\Re$
$\cos x$	$-\sin x$	$\Re$

مشتقات دوال أخرى:

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\Re$:

$f(x)$	$f'(x)$	من اجل كل x من I ،
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u\succ 0$
$n\geq 2$ و $n\in N,\quad (u(x))^n$	$n\times u'\times u^{n-1}$	
$n\geq 2$ و $n\in N,\quad \frac{1}{(u(x))^n}$	$-\frac{n\times u'}{u^{n+1}}$	$u\neq 0$
$\sin(u(x))$	$u'\times\cos(u)$	
$\cos(u(x))$	$-u'\times\sin(u)$	

⇦المشتقات والعمليات على الدوال:

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\Re$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{u}{v},(v\neq 0)$
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'\times v+v'\times u$	$\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2},v\neq 0$

❖اشتقاق دالة مركبة: $(vou)'(x)=u'(x)\times v'(u(x))$

❖طـــــــــرق:

⇦لدراسة قابلية اشتقاق دالة f عند a نحسب $\lim_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}$ أو $(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a})$

إذا كان	فإن
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}=l$ (l عدد حقيقي)	f تقبل الاشتقاق عند a و المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا معامل توجيهه l .
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}=+\infty$ أو $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}=-\infty$	f لا تقبل الاشتقاق عند a و المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا موازيا لحامل محور التراتيب.
$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$ و $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=l'$ و كان $l\neq l'$	الدالة f تقبل الاشتقاق عند a من اليمين و من اليسار و لكنها غير قابلة للاشتقاق عند a. و المنحني الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a نصفي مماسين معاملا توجيههما l و l' .

⇦لإيجاد $f'(a)$ معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة a بيانيا نختار نقطتين من هذا المماس و لتكن مثلا A و B حيث $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ فيكون : $f'(a)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

☜ إذا كان المماس عند النقطة ذات الفاصلة a أفقيا فان $f'(a)=0$.

4. دراسة الـــــــــدوال

❖دراسة اتجاه التغير :

لدراسة اتجاه تغير الدالة f ، نحسب f' الدالة المشتقة للدالة f ثم ندرس اشارة $f'(x)$ و نستنتج اتجاه التغير .

❖ المماسات :

⇦كتابة معادلة المماس عند نقطة فاصلتها معطاة و لتكن x0 :

نقوم بحساب $f'(x_0)$ و $f(x_0)$ ثم نطبق الدستور التالي : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

⇦مماس معامل توجيهه معطى و ليكن a :

نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0)=a$. ثم نقوم بكتابة معادلة المماس عند x_0 كما في الطريقة الأولى .

⇦ مماس أفقي :

نبحث x_0 بحل المعادلة $f'(x_0)=0$. ثم نقوم بكتابة معادلة المماس عند x_0 كما في الطريقة الأولى

⇦ مماس موازي لمستقيم (Δ) معادلته من الشكل y=ax+b :

نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0)=a$. ثم نقوم بكتابة معادلة المماس عند x_0 كما في الطريقة الأولى .

❖شفعية دالة:

⇦تبيين أن الدالة f زوجية :

نبين انه من اجل x كل من D_f ، $(-x)\in D_f$ و $f(-x)=f(x)$.

⇦تبيين أن الدالة f فردية :

نبين انه من اجل x كل من D_f ، $(-x)\in D_f$ و $f(-x)=-f(x)$.

❖ مركز التناظر:

لتبيين أن النقطة $W(a;b)$ هي مركز تناظر لمنحنى الدالة f يكفي أن نبين انه من اجل كل x من D_f ،

$(2a-x)\in D_f$ و $f(2a-x)+f(x)=2b$.

❖ محور التناظر:

لتبيين أن النقطة المستقيم ذو المعادلة $x=a$ هو محور تناظر لمنحنى الدالة f يكفي أن نبين انه من اجل كل x من D_f , $(2a-x)\in D_f$ و $f(2a-x)=f(x)$.

❖ نقاط التقاطع مع المحورين :

⇦ مع حامل محور الفواصل (xx') :

لتعيين نقاط تقاطع (C_f) منحنى الدالة f مع حامل محور الفواصل (xx') نقوم بحل المعادلة $f(x)=0$. و تكون حلول المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل $(x'x)$ و التي تراتيبها معدومة .

⇦ مع حامل محور التراتيب (yy') :

f دالة معرفة على مجال يحوي القيمة 0 . لتعيين نقطة تقاطع (C_f) منحنى الدالة f مع حامل محور التراتيب (yy') نقوم بحساب $f(0)$

ليكن مثلا $f(0)=a$ حيث $a\in\Re$. ومنه a هي ترتيب نقطة تقاطع (C_f) مع (yy') و التي فاصلتها معدومة .

❖استنتاج تمثيل بياني لدالة انطلاقا من تمثيل بياني لدالة اخرى :

f دالة ،(C_f) تمثيلها البياني . (C_g) ، (C_h) ، (C_k) ، (C_u) ، (C_v) التمثيلات البيانية للدوال g ، h ، k ، u ، v على الترتيب :

عبارة الدالة	كيفية استنتاج تمثيلها انطلاقا من (Cf)
$g(x)=-f(x)$	(C_g) نظير (C_f) بالنسبة الى محور الفواصل
$h(x)=f(-x)$	(C_h) نظير (C_f) بالنسبة الى محور التراتيب .
$k(x)=\|f(x)\|$	(C_k)منطبق على (C_f) في المجالات التي يكون فيه(C_f) فوق محور الفواصل و مناظر لـ(C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل في المجالات التي يكون فيه(C_f) تحت محور الفواصل .
$u(x)=f(\|x\|)$	(C_u)منطبقا على (C_f) في المجال $[0;+\infty[$ و بما أن الدالة زوجية يكون الجزء من$]-\infty;0]$ مناظر للجزء الأول بالنسبة إلى محور التراتيب .
$v(x)=f(x+a)+b$	(C_v) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $-a\vec{i}+b\vec{j}$.

تماريـــــن محلولـــــة

التمرين -1-

x متغير حقيقي .احسب النهايات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية :

$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+2x^2+x+5\right)\bullet 1$	$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3+2x^2+x+5\right)\bullet 2$	$\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+3x+2\right)\bullet 3$
$\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+3x+2\right)\bullet 4$	$\lim_{x\to-\infty}\left(x^4+2x^2+x+5\right)\bullet 5$	$\lim_{x\to+\infty}\left(x^4+2x^2+x+5\right)\bullet 6$

التمرين -2-

x متغير حقيقي ، احسب النهايات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية :

$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+2x-1}{x^2+1}\bullet 1$	$\lim_{\substack{x\to1\\>}}\dfrac{2x^3+2x-1}{x-1}\bullet 2$	$\lim_{\lvert x\rvert\to+\infty}\dfrac{-2x-1}{x^2+1}\bullet 3$
$\lim_{\substack{x\to1\\<}}\dfrac{-2x-1}{1-x}\bullet 4$	$\lim_{\lvert x\rvert\to+\infty}\dfrac{-2x^2+5x-1}{3x^2+1}\bullet 5$	$\lim_{x\to-\infty}\left(x-3-\dfrac{1}{x-1}\right)\bullet 6$

التمرين -3-

x متغير حقيقي ، احسب النهايات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية :	$\lim_{x\to0}\dfrac{x^2+2x}{x}\bullet 1$	$\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}\bullet 2$

التمرين -4-

x متغير حقيقي ، احسب النهايات المطلوبة في كل حالة من الحالات التالية :

$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+\sqrt{x}+5\right)\bullet 1$	$\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}+2\right)\bullet 2$	$\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}+2\right)\bullet 3$	$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)\bullet 4$
$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-2x\right)\bullet 5$	$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-2x\right)\bullet 6$	$\lim_{\substack{x\to9\\>}}\left(\dfrac{x-5}{\sqrt{x}-3}\right)\bullet 7$	$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+1}\right)\bullet 8$

التمرين -5-

f الدالة المعرفة على $R-\{3\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-3}$: (C_f) تمثيل بيانها في م م إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1. عين الثوابت الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $R-\{3\}$ فإن :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$$

2. استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

3. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D)

التمرين -6-

f الدالة المعرفة على $\Re$ كما يلي: $f(x) = x^2 + 2x + 2 + \frac{x}{x^2+1}$. (C_f) تمثيل بيانها في م م إلى م المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

g الدالة المعرفة على المجموعة $\Re$ كما يلي : $g(x) = x^2 + 2x + 2$. (C_g) تمثيلها البياني في م م إلى المعلم المتعامد المتجانس .

1. احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - g(x)]$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - g(x)]$ ثم فسر النتيجتين هندسيا.
2. حدد الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

f الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - x$

التمرين -7-

(C_f) تمثيل بيانها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب: $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x]$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟
2. احسب: $\lim_{x\to-\infty}[f(x) + 3x]$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟
3. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ و بالنسبة إلى المستقيم (D') الذي معادلته $y = -3x$.

التمرين -8-

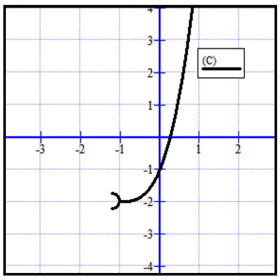
f هي الدالة المعرفة على $\Re$ بـ : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$

1) ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2) أحسب f' مشتقة الدالة f ثم ادرس تغيرات الدالة f.

3) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا على كل مجال من المجالات: $\left]-3;-\frac{5}{2}\right[$، $\left]-\frac{3}{2};-1\right[$، $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

التمرين -9- جزء من بكالوريا 2008 شعبة ع.ت



المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

1. بقراءة بيانية حدد $g(0)$ و إشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. علل وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]\frac{1}{2};0\right[$ يحقق : $g(\alpha) = 0$

التمرين -10-

في كل حالة من الحالات التالية, أدرس قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة على المجموعة D عند a مفسرا النتيجة بيانيا:

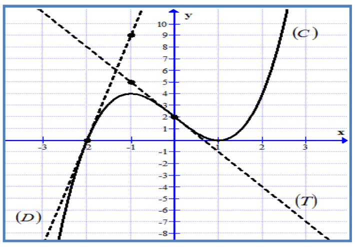
1• $f(x) = 3\sin(x)$	$D = \Re$	$a = \pi$
2• $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$	$D = [0;+\infty[$	$a = 0$
3• $f(x) = \lvert 1 - x\rvert + \frac{1}{x}$	$D = \Re^*$	$a=1$

التمرين -11- من بكالوريا 2009 شعبة ع.ت

f دالة معرفة على $R-\{-1\}$ بـ: $f(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$. و (C_f) تمثيلها البياني .

1. احسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ و $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟
2. أعط تفسيرا هندسيا للنتائج .
3. اكتب معادلتي المماسين (T) و (T') عند النقطة ذات الفاصلة 0.

التمرين -12-



الشكل الموالي هو التمثيل البياني (C) لدالة f معرفة على $\Re$ ، ومثلنا المماسات (T) و (D) للمنحنى (C) عند النقطتين A و B على الترتيب حيث $A(0;2)$ و $B(-2;0)$.

1. بقراءة بيانية عين $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(-1)$ ، $f(-2)$.
   - ⇦ عين $f'(0)$ ، $f'(1)$ ، $f'(-1)$ ، $f'(-2)$.
   - ⇦ خمن وجود نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .
   - ⇦ عين معادلتي كل من (T) و (D) مماسي المنحنى (C) عند النقطتين A و B على الترتيب .
2. علما أن الدالة f معرفة بالشكل $f(x)=ax^3+bx+c$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية .

التمرين -13-

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\Re$ كما يلي : $f(x)=-x^3+3x^2-4$
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلي المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f .
3. شكّل جدول تغيّرات الدالة f .
4. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يُطلب تعيين إحداثياتها.
5. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=(x+1)(-x^2+4x-4)$
6. حل في $\Re$ المعادلة : $f(x)=0$. ثمّ استنتج نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل
7. أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.
8. أنشئ المماس كلا من (D) و (C_f).
9. g الدالة المعرفة على $\Re$ بـــ $g(x)=-f(x)$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلي المعلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.
   اشرح كيفية رسم (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه في نفس المستوي السابق.

التمرين -14-

f الدالة العددية المعرفة على $\Re-\{3\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{6-4x}{x-3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}f(x)$ فسر النتائج هندسيا .
2. احسب $f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. عين نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات .

4. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 2 .

5. من اجل $x \neq 3$ بين أن : $f(x) = a + \frac{b}{x-3}$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

6. بين أن النقطة $W(3;-4)$ هي مركز تناظر لــ (C_f).

7. أنشئ (T) و (C_f) .

8. ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $6-4x-m(x-3)=0$.

التمرين -15-

نعتبر الدالة f المعرفة على $D_f = \mathfrak{R} - \{-1;1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.استنتج المستقيمات المقاربة العمودية .

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أكتب معادلة (T)مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4. بين أنه من أجل كل x من D_f، $f(x) = x+3+\frac{x}{x^2-1}$

5. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+3$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب. أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

6. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها α و β و γ حيث :

$-2.6 \prec \alpha \prec -2.5$ و $-1.4 \prec \beta \prec -1.3$ و $0.8 \prec \gamma \prec 0.9$.

7. بين أن النقطة $\Omega(0;3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

8. أرسم المستقيمات المقاربة و المماس المنحنى (C_f).

التمرين -16-

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathfrak{R}$ بـ $g(x) = x^3+3x+4$.

1. احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2. أدرس تغيرات الدالة g.

3. احسب $g(-1)$ ثم استنتج، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathfrak{R}$ بـ $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2+1}$ و ليكن (C_f) البياني في م المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2. بين أنه من اجل كل x من $\mathfrak{R}$، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

3. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4. عين معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5.أ. احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]$ ثم استنتج أن (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل لــ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب. ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لــ (Δ).

6. هل توجد مماسات لها نفس معامل توجيه المستقيم (Δ)؟

7. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $1.2 \prec \alpha \prec 1.3$

8. ارسم المستقيم (Δ) و المنحني (C_f).

التمرين -17-

الجزء الأول :

g دالة معرفة على المجموعة R كما يلي : $g(x)=x^3-3x-3$.

1. احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
2. أدرس تغيرات الدالة g. ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في R ؛ حلا وحيدا α. تحقق من أن : $2.1 \prec \alpha \prec 2.2$.
4. استنتج إشارة $g(x)$ على R .
5. بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{-1;1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$ و (C_f) البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب نهايات f عند حدود مجالات تعريفها . استنتج المستقيمات المقاربة العمودية .

2. أ. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $R-\{-1;1\}$ ؛ يكون : $f'(x)=\dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

ب. ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. عين ؛ دون حساب ؛ $\lim_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$. فسر النتيجة بيانيا .

4. بين أن: $f(\alpha)=3\alpha$. استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5. أ. بين أن المستقيم (Δ) الذي $y=2x$ معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

6. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $-1.2 \prec \beta \prec -1.1$. فير النتيجة هندسيا.

7. أنشئ كلا من (Δ) المنحنى (C_f) .

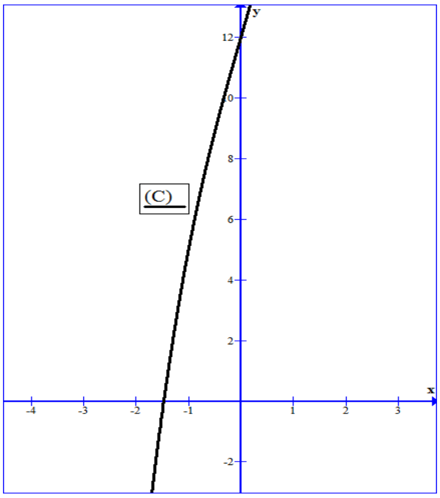
8. نعتبر الدالة h المعرفة على $R-\{-1;1\}$ بـــ $h(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}+1$ و (C_h) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$. -

استنتج كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f).

9. ناقش ؛ حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة الآتية حيث x هو المجهول : $f(x)=|m|$

التمرين -18-

الجزء الأول :



المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني

للدالة g المعرفة على R كما يلي:

$g(x)=x^3+6x+12$.

1. بقراءة بيانية :

⇦ حدد إشارة $g(-2)$ و $g(-1)$.

⇦ برر وجود عدد حقيقي α من المجال $]-2;-1[$ يحقق أن المعادلة $g(\alpha)=0$.

2. تحقق حسابيا أن $\alpha\in]-1.48;-1.47[$.

3. استنتج إشارة $g(x)$ على R .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-4}{x^2+2}$ و (C_f) البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب نهايات f عند حدود مجالات تعريفها .

2. أ. تحقق من أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من R ؛ يكون : $f(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$.

ب. ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ. بين أن المستقيم (Δ) الذي $y=x+1$ معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4. بين أن (C_f) يقبل مماسين موازيين لـــ(Δ). (لا يطلب تعيين معادلتيهما)

5. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $1.3\prec\beta\prec1.4$.فسر النتيجة هندسيا.

6. أنشئ (Δ) المنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha)=-1.2$)

التمرين -19-

الجزء الأول :

g دالة معرفة على المجموعة R كما يلي : $g(x)=-x^3+3x^2-3x+2$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2. أدرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

3. بين أن احسب $g(2)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ و إشارة $g(-x)$ على R .

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{-1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^3+6x^2+6x+1}{(x+1)^2}$ و (C_f) البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب نهايات f عند حدود مجالات تعريفها ، استنتج المستقيمات المقاربة العمودية .

2. أ. تحقق أنه ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من $R-\{1\}$ ؛ $f'(x)=\dfrac{2g(-x)}{(x+1)^3}$.

ب. ادرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $R-\{1\}$: $f(x)=2x+2-\frac{1}{(x+1)^2}$

ب. بين أن المستقيم (Δ) الذي $y=2x+2$ معادلة له مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

ج. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.3 \prec \alpha \prec -0.2$

ثم فسر النتيجة هندسيا.

5. أنشئ (Δ) المنحنى (C_f) .

6. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m ؛ عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x)=2x+m$

حلــــــــــــول التماريـــــــــــــن

حل التمرين -1-

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ • 2	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ • 1
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+3x+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x^3=-\infty$ • 4	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+3x+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}-x^3=+\infty$ • 3
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4=+\infty$ • 6	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+2x^2+x+5\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=+\infty$ • 5

حل التمرين -2-

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\dfrac{2x^3+2x-1}{x-1}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$ • 2	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+2x-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$ • 1
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\dfrac{-2x-1}{1-x}=\dfrac{-3}{0^+}=-\infty$ • 4	$\lim\limits_{\lvert x\rvert\to+\infty}\dfrac{-2x-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{x}=0$ • 3
$\lim\limits_{x\to-\infty}x-3-\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ • 6	$\lim\limits_{\lvert x\rvert\to+\infty}\dfrac{-2x^2+5x-1}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2}{3x^2}=\dfrac{-2}{3}$ • 5

حل التمرين -3-

1• $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{x^2+2x}{x}\right]$ حالة عدم التعيين من الشكل $0/0$ ، لإزالتها نقوم بتحليل البسط إلى جداء عاملين ثم نختزل .

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+2)}{x}=\lim_{x\to0}(x+2)=2$$

2• $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ حالة عدم التعيين من الشكل $0/0$ ، لإزالتها نقوم بالاختزال .

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)}=\lim_{x\to1}(x+3)=4$$

حل التمرين -4-

1• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\sqrt{x}+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\right)=+\infty$

2• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}+2\right)=\dfrac{1}{0^+}+2=+\infty$

3• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\underbrace{x}_{0}}+\underbrace{\sqrt{x}+2}_{+\infty}\right)=+\infty$

4• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x+1}}_{+\infty}-\underbrace{\sqrt{x-2}}_{-\infty}\right)$: هي ح.ع.ت من الشكل $+\infty-\infty$ (نزيلها باستعمال المرافق).

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)-(x-2)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)}=0$$

5• $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-2x\right)=+\infty$

6• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+2x+2}}_{+\infty}\underbrace{-2x}_{-\infty}\right)$ هي ح.ع.ت من الشكل $+\infty-\infty$ و نزيلها باستعمال التحليل.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})}-2\right)=\lim_{x\to+\infty}x(-1)=-\infty .$$

$$\lim_{\substack{x\to 9\\>}}\left(\frac{x-5}{\sqrt{x}-3}\right)=\frac{4}{0^+}=+\infty$$ • 7

• 8 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$ ح.ع.ت من الشكل $\infty-\infty+$ و نزيلها باستعمال المرافق.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+2-x^2-1}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

ح.ع.ت من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ و نزيلها باستعمال التحليل :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=\frac{2}{2}=1$$

حل التمرين -5-

1. تعيين الثوابت الحقيقية a و b و c :

$$ax+b+\frac{c}{x-3}=\frac{(ax+b)(x-3)+c}{x-3}=\frac{ax^2-3ax+bx-3b+c}{x-3}=\frac{ax^2-(3a-b)x-3b+c}{x-3}$$

و بالمطابقة مع عبارة الدالة f نجد : $\begin{cases}a=1\\3a-b=5\\-3b+c=7\end{cases}$ و منه $\begin{cases}a=1\\3-b=5\\-3b+c=7\end{cases}$ و منه $\begin{cases}a=1\\b=-2\\6+c=7\end{cases}$ إذن $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=1\end{cases}$

2. استنتج أن المنحنى (Cf) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D):

حسب السؤال السابق فانه من أجل كل عدد حقيقي x من $R-\{3\}$ فإن :

$$f(x)=x-2+\frac{1}{x-3}$$

لدينا: $f(x)=x-2+g(x)$: مع $g(x)=\frac{1}{x-3}$. و بما أن :

$$\lim_{|x|\to+\infty}g(x)=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{1}{x-3}\right)=0$$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

3. دراسة وضعية المنحنى (Cf) بالنسبة إلى المستقيم (D):

ندرس إشارة $f(x)-y$ أي إشارة $\frac{1}{x-3}$. ، نلخص إشارة $f(x)-y$ و الوضع النسبي في الجدول التالي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
إشارة $f(x)-y$	-	‖	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (D)	‖	(C_f) فوق (D)

حل التمرين -6-

1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2+2x+2+\frac{x}{x^2+1}-(x^2+2x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

نستنتج أن (C_f) و(C_g) متقاربان بجوار $+\infty$.

حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2+2x+2+\frac{x}{x^2+1}-(x^2+2x+2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

نستنتج أن (C_f) و(C_g) متقاربان بجوار $-\infty$.

2. دراسة وضعية المنحنى (Cf) بالنسبة إلى المستقيم (D):

ندرس إشارة $f(x)-g(x)$ أي إشارة $\frac{x}{x^2+1}$.

-إشارة $\frac{x}{x^2+1}$ من إشارة x لأن $x^2+1\succ 0$ من اجل كل x من $\Re$.

نلخص إشارة $y-f(x)$ و الوضع النسبي في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		-	0	+	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (C_g)	(C_f) و (C_g) يتقاطعان في النقطة $A(0,2)$	(C_f) فوق (C_g)	

حل التمرين -7-

1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^2+1}-x-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^2+1}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2(\sqrt{x^2+1}-x)\right)$$ حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty-\infty$

، نستعمل المرافق :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2(\sqrt{x^2+1}-x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{x^2+1-x^2}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\right)=0$$

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة : $y=x$ مقارب مائل (C_f) .

2. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+3x)$:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+3x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2\sqrt{x^2+1}-x+3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2\sqrt{x^2+1}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2(\sqrt{x^2+1}+x)\right)$$

حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty-\infty$ ، نستعمل المرافق :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2(\sqrt{x^2+1}+x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}-x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(2\frac{x^2+1-x^2}{(\sqrt{x^2+1}-x)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}-x)}\right)=0$$

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة : $y=-3x$ مقارب مائل (C_f) .

3. دراسة وضعية (Cf) بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته $y=x$

ندرس إشارة $f(x)-y$ أي إشارة $\left(2\sqrt{x^2+1}-2x\right)$

لدينا $2\sqrt{x^2+1}-2x=2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ ومنه إشارة $f(x)-y$ من إشارة $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

من أجل $x\le 0$: $-x\ge 0$ مما يؤدي إلى $\sqrt{x^2+1}-x\succ 0$.

من أجل $x\succ 0$: لدينا $x^2+1\succ x^2$. بجذر الطرفين ينتج : $\sqrt{x^2+1}\succ x$ أي $\sqrt{x^2+1}-x\succ 0$

إذن من أجل x من R : $\sqrt{x^2+1}-x\succ 0$. نستنتج أن (C_f) فوق : (D) .

دراسة وضعية (Cf) بالنسبة إلى (D') الذي معادلته $y=-3x$:

ندرس إشارة $f(x)-y$ أي إشارة $\left(2\sqrt{x^2+1}+2x\right)$

لدينا $2\sqrt{x^2+1}+2x=2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ ومنه إشارة $f(x)-y$ من إشارة $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$:

من أجل $x\ge 0$: يكون $\sqrt{x^2+1}+x\succ 0$.

من أجل $x\prec 0$: لدينا $x^2+1\succ x^2$. بجذر الطرفين ينتج : $\sqrt{x^2+1}\succ -x$ أي $\sqrt{x^2+1}+x\succ 0$

إذن من أجل x من R : $\sqrt{x^2+1}+x\succ 0$.

نستنتج أن (C_f) يقع فوق (D') .

حل التمرين -8-

1. دراسة نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+3x^2-3\right)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3+3x^2-3\right)=\lim_{x\to-\infty} x^3=+\infty$$

2. حساب f' مشتقة الدالة f ثم دراسة تغيرات الدالة f:

$f'(x)=3x^2+6x$ ، إشارة $f'(x)$: $3x^2+6x=0$ ، $x=0$ أو $x=-2$.

إشارة $f'(x)$ ملخصة في الجدول التالي :

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-2]$ و $[0;+\infty[$ متناقصة تماما على المجال $[-2;0]$.

3. تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا على كل مجال من المجالات التالية:

$\left[-3;-\frac{5}{2}\right]$ ، $\left[-\frac{3}{2};-1\right]$ ، $\left[\frac{1}{2};1\right]$:

- لدينا مما سبق الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $]-\infty;-2]$ و من ثم على $\left[-3;\frac{-5}{2}\right]$. و لدينا: $f(-3)=-3$ و $f(-\frac{5}{2})=0.125$ و منه : $f(-3)\times f(-\frac{5}{2})\prec 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[-3;\frac{-5}{2}\right]$.

و f مستمرة و متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و من ثم على $\left[\frac{1}{2};1\right]$. و لدينا: $f(\frac{1}{2})=-2.125$ و $f(1)=1$ أي :

$f(\frac{1}{2})\times f(1)\prec 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

و f مستمرة و متناقصة تماما على $[-2;0]$ و من ثم على $\left[-\frac{3}{2};-1\right]$. و لدينا: $f(\frac{-3}{2})=0.375$ و $f(-1)=-1$ ومنه :

$f(\frac{-3}{2})\times f(-1)\prec 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[-\frac{3}{2};-1\right]$.

حل التمرين -9-

1. تحديد $g(0)$ و اشارة $g(\frac{1}{2})$:

$g(0)=-1$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)\succ 0$

2. تعليل وجود عدد حقيقيa من المجال]0;1/2[يحقق g(a)=0:

من التمثيل البياني : g مستمرة و متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و من ثم على $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. و لدينا $g(\frac{1}{2})\times g(0)\prec 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فانه يوجد عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق: $g(\alpha)=0$.

حل التمرين -10-

1) $f(x)=3\sin(x)$ ، $D=\Re$ ، $a=\pi$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\sin(\pi+h)-\overbrace{3\sin(\pi)}^{0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-3\sin(h)}{h}=-3$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند π و لدينا $f'(\pi)=-3$.

المنحني الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة π مماسا معامل توجيهه -3 .

2) $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$ ، $D=[0;+\infty[$ ، $a=0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+1+\sqrt{h^2+4h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+\sqrt{h^2+4h}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{h}{h}+\frac{\sqrt{h^2+4h}}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\left[1+\frac{h+4}{\sqrt{h^2+4h}}\right]=1+\frac{4}{0^+}=+\infty$$

الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0 . و المنحني الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا موازيا لحامل محور التراتيب.

3) $f(x)=|1-x|+\frac{1}{x}$ ، $D=\Re^*$ ، $a=1$

$$f(x)=|1-x|+\frac{1}{x}=\begin{cases}1-x+\frac{1}{x}; x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;1\right]\\ x-1+\frac{1}{x}; x\in[1;+\infty[\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{1-(1+h)+\frac{1}{1+h}-1}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{-1-h+\frac{1}{1+h}}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{-h^2-2h-1+1}{h(h+1)}=\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{-h-2}{h+1}=-2$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{h+1-1+\frac{1}{1+h}-1}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{h-1+\frac{1}{1+h}}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{h^2-1+1}{h(h+1)}=\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{h}{h+1}=0$$

الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 من اليمين و من اليسار و عددها المشتق من اليمين عند 1 هو -2 و عددها المشتق من اليسار عند 1 هو 0 و بما أنهما مختلفان فهي غير قابلة للاشتقاق عند 1.

هندسيا : المنحني الممثل للدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 نصفي مماسين معاملا توجيههما 2- و 0 .

حل التمرين -11-

1. حساب $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ **و** $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ **:**

لدينا:
$$f(x)=|x|+\frac{4}{x+1}=\begin{cases}-x+\frac{4}{x+1}; x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;0\right] \\ x+\frac{4}{x+1}; x\in\left[0;+\infty\right[\end{cases}$$

$$\bullet \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h}=\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{-h^2-h+4-4h-4}{h(h+1)}=\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{-h^2-5h}{h(h+1)}=\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{-h-5}{h+1}=-5$$

نستنتج أن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار و عددها المشتق من اليسار هو $f_1'(0)=-5$.

$$\bullet \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h}=\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{h^2+h+4-4h-4}{h(h+1)}=\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{h^2-3h}{h(h+1)}=\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{h-3}{h+1}=-3$$

نستنتج ان f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين و عددها المشتق من اليمين هو $f_2'(0)=-3$.

لكن العدد المشتق من اليمين و اليسار غير متساويان أي : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(h)-f(0)}{h} \neq \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ إذن f لا تقبل الاشتقاق عند 0 .

2. التفسير الهندسي للنتائج :

منحنى الدالة f يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 0 معاملا توجيههما 5- و 3-

3. كتابة معادلتي نصفي المماسين :

معادلة المماس (T) : $y=f_1'(0)(x-0)+f(0)=-5x+4$

معادلة المماس (T') : $y=f_2'(0)(x-0)+f(0)=-3x+4$

حل التمرين -12-

1. ⇦ **تعيين** $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(-1)$ ، $f(-2)$. **:**

$f(0)=2$ ، $f(1)=0$ ، $f(-1)=4$ ، $f(-2)=0$

⇦ **تعيين** $f'(0)$ ، $f'(1)$ ، $f'(-1)$ ، $f'(-2)$. **:**

⇦ $f'(1)$ هو العدد المشتق عند 1 و بيانيا هو معامل توجيه مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

المماس عند هذه النقطة هو مماس أفقي أي معامل توجيهه يساوي 0 . إذن : $f'(1)=0$.

⇦ $f'(-1)$ هو العدد المشتق عند 1- و بيانيا هو معامل توجيه مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1-.

المماس عند هذه النقطة هو مماس أفقي أي معامل توجيهه يساوي 0 . إذن : $f'(-1)=0$

⇦ $f'(0)$ هو العدد المشتق عند 0 و بيانيا هو معامل توجيه مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

المماس عند هذه النقطة هو المستقيم (T) الذي يشمل النقطتين $A(0;2)$ و $B(1;-1)$. إذن :

$$f'(0)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-1-2}{1-0}=-3 \ .$$

⇦ $f'(-2)$ هو العدد المشتق عند 2- و بيانيا هو معامل توجيه مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2- .

المماس عند هذه النقطة هو المستقيم (D) الذي يشمل النقطتين $A'(-2;0)$ و $B'(-1;9)$. إذن :

$$f'(0)=\frac{y_{B'}-y_{A'}}{x_{B'}-x_{A'}}=\frac{9-0}{-1-(-2)}=9$$

⇦ تعيين معادلتي مماسي المنحنى عند كل من النقطتين A و B:

⇦ معامل توجيه المماس (T) هو 3- و منه معادلة (T) من الشكل $y=-3x+b$ حيث b عدد حقيقي .

و لدينا (T) يشمل $A(0;2)$ أي $y_A=-3(x_A)+b \leftarrow 2=-3(0)+b \leftarrow b=2$.

إذن معادلة (T) هي : $y=-3x+2$.

⇦ معامل توجيه المماس (D) هو 9 و منه معادلة (D) من الشكل $y=9x+b'$ حيث b' عدد حقيقي .

و لدينا (D) يشمل $A'(-2;0)$ أي $y_{A'}=3(x_{A'})+b' \leftarrow 0=9(-2)+b' \leftarrow b'=18$.

إذن معادلة (D) هي : $y=9x+18$.

2. علما أن الدالة f معرفة بالشكل $f(x)=ax^3+bx+c$:

⇦حساب الدالة المشتقة بدلالة a و b:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\Re$ و لدينا : $f'(x)=3ax^2+b$

⇦ تعيين a و b و c باستعمال النتائج السابقة:

لدينا $\begin{cases} f(0)=2 \\ f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} c=2 \\ a+b+c=0 \\ 3a+b=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} c=2......(1) \\ a+b=-2.....(2) \\ 3a+b=0......(3) \end{cases}$. نضرب المعادلة (2) في 1- ثم نجمع (2) و

(3) ينتج : $2a=2$ و منه $a=1$. نعوض قيمة a في المعادلة (2) نجد $b=-3$. إذن: $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=2 \end{cases}$

حل التمرين -13-

f دالة معرفة على $\Re$ بـ: $f(x)=-x^3+3x^2-4$

1. حساب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+3x^2-4\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+3x^2-4\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$$

2. اتجاه تغير الدالة f:

f قابلة للاشتقاق على $\Re$ ولدينا من اجل كل x من $\Re$: $f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$ تعني $-3x(x-2)=0$ ومنه $x=0$ أو $x=2$.

نلخص إشارة في الجدول أدناه :

x	$-\infty$ **0** **2** $+\infty$
$-3x$	+ **0** - -
$x-2$	- - **0** +
$f'(x)$	- **0** + **0** -

f متزايدة تماما على $[0;2]$ و متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$

3. تشكّيل جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4. تبيّن أنّ المنحنى يقبل نقطة انعطاف A يُطلب تعيين إحداثياتها:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f''(x)=-6x+6$

$f''(x)>0$ من أجل $x \prec 1$ و $f''(x)<0$ من أجل $x \succ 1$ و $f(1)=-2$

f'' تنعدم عند 1 مغيرة إشارتها إذن $A(1;-2)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

5. تبيين أن: $f(x)=(x+1)(-x^2+4x-4)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $(x+1)(-x^2+4x-4)=-x^3+4x^2-4x-x^2+4x-4=-x^3+3x^2-4=f(x)$

6. حل في R المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ معناه $(x+1)(-x^2+4x-4)=0$ أي $x=-1$ أو $-x^2+4x-4=0$

$\Delta=0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو $x=\dfrac{-4}{-2}=2$

استنتاج نقط تقاطع المنحنى مع حامل محور الفواصل :

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين هما 1- و 2 .إذن (C_f) يتقاطع مع $(x'x)$ في نقطتين هما $B(-1;0)$ و $C(2;0)$.

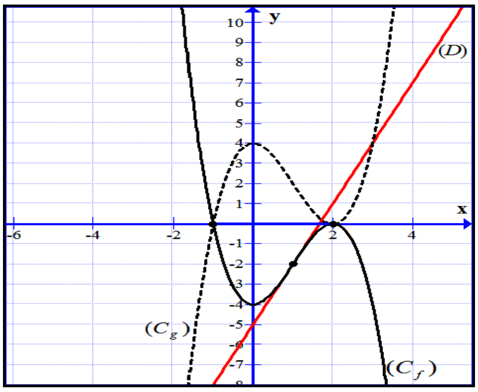
7. كتابة معادلة المماس في النقطة ذات الفاصلة 1:

معادلة (D) هي: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و لدينا $f(1)=-2$ و $f'(1)=3$

و منه $y=3(x-1)-2$. و بالتالي معادلة المماس (D) هي : $y=3x-5$

9. إنشاء المماس (D) والمنحنى (Cf):

$f(0)=-4$



9. شرح كيفية رسم التمثيل البياني لـ(Cg) انطلاقا من (Cf) :

(C_g) هو نظير لـ(C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل .

حل التمرين -14-

f دالة معرفة على $\Re-\{3\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{6-4x}{x-3}$

1. حساب النهايات و تفسير النتائج بيانيا:

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6-4x}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x}{x}=-4 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6-4x}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x}{x}=-4 \end{cases}$ المستقيم ذو المعادلة $y=-4$ مستقيم مقارب أفقي لـ(C_f).

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{6-4x}{x-3}=\dfrac{-6}{0^-}=+\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\dfrac{6-4x}{x-3}=\dfrac{-6}{0^+}=-\infty \end{cases}$ المستقيم ذو المعادلة $x=3$ مستقيم مقارب عمودي لـ(C_f).

2. حساب $f'(x)$ و تشكيل جدول التغيرات:

f قابلة للاشتقاق على $\Re-\{3\}$ ولدينا : $f'(x)=\dfrac{-4(x-3)-(6-4x)}{(x-3)^2}=\dfrac{6}{(x-3)^2}$

من أجل كل x من $\Re-\{3\}$ ، $f'(x)\succ 0$. إذن f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;3[$ و $]3;+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	-4 ↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗ -4

3. تعيين نقط تقاطع المنحني مع محوري الإحداثيات :

مع حامل محور الفواصل:

$f(x)=0$ يكافئ $\dfrac{6-4x}{x-3}=0$ ومنه $6-4x=0$ ومنه $x=\dfrac{3}{2}$ إذن النقطة $A(1.5;0)$ نقطة تقاطع (C_f) مع (xx').

مع حامل محور التراتيب:

$f(0)=-2$. إذن النقطة $B(0;-2)$ هي نقطة تقاطع (C_f) مع (xx') .

4. كتابة معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها 2 :

معادلة (T) هي: $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ لدينا $f(2)=2$ و $f'(2)=6$

و بالتالي معادلة للمماس (T) هي : $y=6(x-2)+2=6x-10$. إذن $(T): y=6x-10$

5. ايجاد a و b:

لدينا $\dfrac{ax-3a+b}{x-3}=a+\dfrac{b}{x-3}$ بالمطابقة مع $f(x)$ نجد : $\begin{cases} a=-4 \\ -3a+b=6 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} a=-4 \\ b=-6 \end{cases}$

إذن من اجل كل x من $\Re-\{3\}$ ، $f(x)=-4-\dfrac{6}{x-3}$

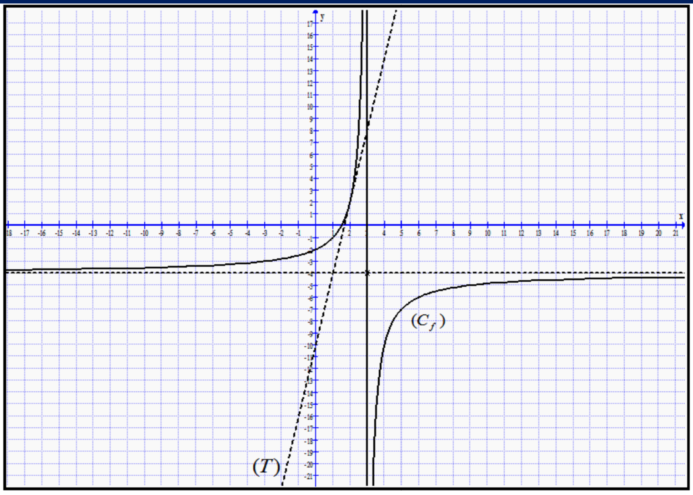
6. تبيين أن النقطة W(3 ;-4) هي مركز تناظر :

من أجل $x\in\Re-\{3\}$ ، $(-x)\in\Re-\{-3\}$ و منه $(6-x)\in\Re-\{3\}$ أي $(6-x)\in D_f$

و: $f(6-x)+f(x)=-4-\dfrac{6}{(6-x)-3}-4-\dfrac{6}{x-3}=-8-\dfrac{6}{3-x}-\dfrac{6}{x-3}=-8+\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{6}{x-3}=-8=2(-4)$

إذن النقطة $W(3;-4)$ هي مركز التناظر لـــ(C_f).

7. إنشاء كل من (T) و(Cf) :



8. المناقشة البيانية لحلول المعادلة :

المعادلة $6-4x-m(x-3)=0$ تكافئ $\frac{6-4x}{x-3}=m$ أي $f(x)=m$ (المناقشة أفقية) ⇦ إذا كان $m\in]-\infty;-3[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا.

⇦ إذا كان $m=3$ المعادلة لا تقبل حلولا .

⇦ إذا كان $m\in]-3;-2[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا.

⇦ إذا كان $m=-2$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما.

⇦ إذا كان $m\in]-2;+\infty[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا.

حل التمرين -15-

نعتبر الدالة f المعرفة على $D_f=\Re-\{-1;1\}$ بـِ $f(x)=\frac{x^3+2}{x^2-1}$

1. حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$. • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$. • $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\frac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$. • $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

استنتاج المستقيمات المقاربة العمودية :

لدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=+\infty\end{cases}$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ م.م عمودي لــ(C_f).

ولدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=+\infty\end{cases}$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ م.م عمودي لــ(C_f).

2. دراسة اتجاه تغيرات f و تشكيل جدول تغيراتها:

من أجل كل x من D_f لدينا ،

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x)(x^2-1)-2x(x^3+3x^2-3)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من x^2-3. المعادلة $x^2-3=0$ تقبل حلين هما $x=\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$ و عليه إشارة $f'(x)$ نلخصها في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-\sqrt{3}]$ و $[\sqrt{3};+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالات $]1;\sqrt{3}]$ و $[-\sqrt{3};-1[$ و $]-1;1[$.

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0.4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5.6	↗	$+\infty$

3.كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

معادلة (T) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و لدينا $f(0)=3$ و $f'(0)=0$

و بالتالي معادلة (T) هي : $y=3$.

4. تبيين أنه من أجل كل x من Df، $f(x)=x+3+\frac{x}{x^2-1}$:

من أجل كل x من D_f، $x+3+\frac{x}{x^2-1}=\frac{(x+3)(x^2-1)+x}{x^2-1}=\frac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=f(x)$

5.أ. تبيين أن (Δ) ذو المعادلة $y=x+3$ مستقيم مقارب مائل:

$$\lim_{|x|\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{|x|\to-\infty}\left[x+3+\frac{x}{x^2-1}-(x+3)\right]=\lim_{|x|\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{|x|\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+3$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ):

ندرس إشارة $f(x)-y$ أي إشارة $\frac{x}{x^2-1}$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)	

6. تبيين أن (Cf) يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقط: $-2.6\prec\alpha\prec-2.5$ و $-1.4\prec\beta\prec-1.3$ و $0.9\prec\gamma\prec0.8$.

$\Leftarrow f$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-\sqrt{3}]$ و من ثم على المجال $[-2.6;-2.5]$، و لدينا :

$\begin{cases}f(-2.6)=-0.05\prec0\\f(-2.5)=0.02\succ0\end{cases}$ أي $f(-2.6)\times f(-2.5)\prec0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-2.6\prec\alpha\prec-2.5$.

$\Leftarrow f$ مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[-\sqrt{3};-1[$ و من ثم على المجال $[-1.4;-1.3]$ و: لدينا : $f(-1.4)=0.14\succ0$ و $f(-1.3)=-0.18\prec0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $-1.4 \prec \beta \prec -1.3$.

$\Leftarrow$ f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-1;1[$ و من ثم على المجال $[0.8;0.9]$:

و لدينا : $f(0.8)=1.57 \succ 0$ و $f(0.9)=-0.83 \prec 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا γ حيث $0.9 \prec \gamma \prec 0.8$.

إذن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها α و β و γ حيث :

$-2.5 \prec \alpha \prec -2.6$ و $-1.4 \prec \beta \prec -1.3$ و $0.9 \prec \gamma \prec 0.8$.

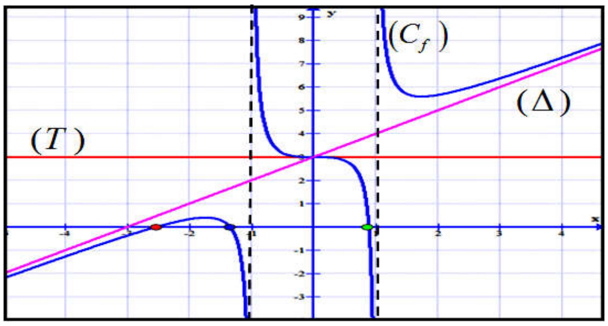
7. تبيين أن النقطة $\Omega(0;3)$ مركز تناظر للمنحنى :

من أجل $x \in \Re - \{-1;1\}$ ، $(-x) \in \Re - \{-1;1\}$ و منه $(-x) \in D_f$

و $f(-x)+f(x) = -x+3+\dfrac{-x}{x^2-1}+x+3+\dfrac{x}{x^2-1} = 6 = 2(3)$.

إذن النقطة $\Omega(0;3)$ هي مركز التناظر لــ(C_f).

8. رسم المستقيمات المقاربة و المماس و المنحنى.



حل التمرين -16-

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\Re$ بـ $g(x)=x^3+3x+4$.

1. حساب النهايات:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[x^3+3x+4] = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}[x^3+3x+4] = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

2. دراسة تغيرات الدالة g:

من اجل كل x من $\Re$ ، $g'(x)=3x^2+3$ ، $g'(x) \succ 0$ إذن متزايدة تماما على $\Re$.

3. حساب g(-1) و استنتاج إشارة g(x):

$g(-1)=0$. g متزايدة تماما على $\Re$ وتنعدم من اجل $x=-1$ إذن إشارتها كالتالي :

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$g(x)$	- 0 +

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بـ $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x^2+1}$

1. حساب النهايات:

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

2. تبيين أنه من اجل كل x من R ، $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$:

من اجل كل x من $\Re$، $f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3-2)}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4+4x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2+4x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{x(x^3+3x+4)}{(x^2+1)^2}=\frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

3. استنتاج اتجاه تغير الدالة f و جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط .نلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	|	+	
x		-	|	-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[-1;0]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{3}{2}$	↘	-2	↗	$+\infty$

4.تعيين معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

معادلة (T) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، لدينا $f(0)=-2$ و $f'(0)=0$ و بالتالي معادلة المماس (T) هي :

$y=-2$.

5.أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-2}{x^2+1}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-2-x^3-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-2}{x^2+1}-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-2-x^3-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}=0$

الاستنتاج:

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل لــ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم (Δ):

ندرس إشارة $[f(x)-x]$ أي إشارة $\frac{-2-x}{x^2+1}$. إشارة $\frac{-2-x}{x^2+1}$ من إشارة البسط :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)-y$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

6. هل توجد مماسات لها نفس معامل توجيه المستقيم (Δ) ؟:

$f'(x_0)=1$ تكافئ $\frac{x_0^4+3x_0^2+4x_0}{(x_0^2+1)^2}=1$ ومنه $x_0^4+3x_0^2+4x_0=(x_0^2+1)^2$ ومنه $x_0^2+2=0$. هذه المعادلة لا تقبل حلول

إذن لا توجد مماسات موازية لــ(Δ).

7. تبيين أن (Cf) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها a:

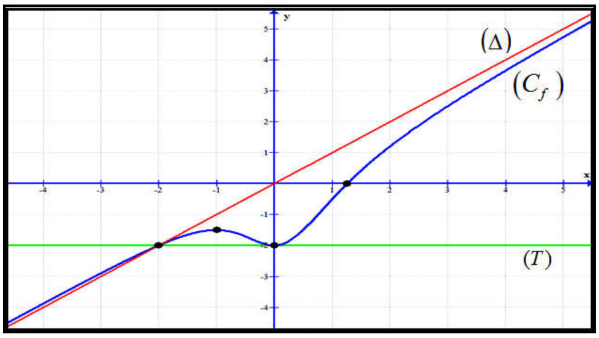
لا توجد حلول للمعادلة $f(x)=0$ في المجالين $]-\infty;-1]$ و $[-1;0]$.

f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و من ثم على $[1.2;1.3]$ و لدينا : $\begin{cases} f(1.2)=-0.111 \\ f(1.3)=0.073 \end{cases}$ أي $f(1.2)\times f(1.3)\prec 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1.2;1.3[$ حلا وحيدا α.

إذن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $1.2\prec\alpha\prec1.3$.

8. رسم كل من (Δ) و المنحنى (Cf) :



حل التمرين -17-

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\Re$ بـ $g(x)=x^3-3x-3$.

1. حساب النهايات:

- $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^3-3x-3\right]=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3-3x-3\right]=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

2. دراسة تغيرات الدالة g:

من اجل كل x من $\Re$ ، $g'(x)=3x^2-3$.

المعادلة $g'(x)=0$ تقبل حلين هما $x=1$ و $x=-1$. و إشارة $g(x)$ كما هو موضح في الجدول أدناه :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	

الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$. و متناقصة تماما على $[-1;1]$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

3. تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في R حلا وحيدا :

لا توجد حلول للمعادلة $g(x)=0$ في المجال $]-\infty;1]$.

f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و لدينا : $\begin{cases} g(1)=-5 \\ \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \end{cases}$

نلاحظ أن $0 \in]-5;+\infty[$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\Re$ حلا وحيدا α.

التحقق من أن $2.1 \prec \alpha \prec 2.2$:

$g(2.1)=-0.039$ و $g(2.2)=1.048$ و منه $g(2.1)\times g(2.2)\prec 0$ إذن $2.1 \prec \alpha \prec 2.2$.

4. و استنتاج إشارة $g(x)$:

$g(x)\prec 0$ في المجال $]-\infty;1]$.

في المجال $[1;+\infty[$ ، g مستمرة و متزايدة تماما و تنعدم من اجل $x=\alpha$. وعليه إشارة $g(x)$ كالتالي :

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g(x)$	- 0 +

5. تبيين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f''(x)=6x$

f'' تنعدم عند 0 مغيرة إشارتها أي $f''(x)>0$ من أجل $x\succ 0$ و $f''(x)<0$ من أجل $x\prec 1$ و $f(1)=-3$.إذن $A(0;-3)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C).

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{-1;1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$

1. حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}}\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}}\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}=\dfrac{5}{0^+}=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}}\dfrac{x^3+3}{x^2-1}=\dfrac{5}{0^-}=-\infty$.

استنتاج المستقيمات المقاربة العمودية :

المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ م.م عمودي لــ(C_f) والمستقيم ذو المعادلة $x=1$ م.م عمودي لــ(C_f).

2.أ. التحقق أن: $f'(x)=\dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$:

من أجل كل x من $R-\{-1;1\}$ لدينا ،

$$f'(x)=\frac{(6x^2)(x^2-1)-2x(2x^3+3)}{(x^2-1)^2}=\frac{6x^4-6x^2-4x^4-6x}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{2x^4-6x^2-6x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x(x^3-3x-3)}{(x^2-1)^2}=\frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

ب. استنتاج اتجاه تغيرات f و تشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $xg(x)$ ، نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول أدناه :

x	$-\infty$ -1	0	1	α $+\infty$
$g(x)$	-	-	-	- 0 +
x	-	- 0 +	+	+
$f'(x)$	+	+ 0 -		- 0 +

f متزايدة تماما على المجالات $]-\infty;-1[$ و $]-1;0]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالين $[0;1[$ و $]1;\alpha]$

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. تعيين دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\frac{2\alpha\times g(\alpha)}{(\alpha^2-1)^2}=0$$

تفسير النتيجة بيانيا : منحنى الدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة α مماسا أفقيا .

4. تبيين أن $f(\alpha)=3\alpha$:

لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $\alpha^3-3\alpha-3=0$ ومنه $\alpha^3-3\alpha=3$ ، من جهة أخرى : $f(\alpha)=\frac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1}$ بتعويض 3 بــ $\alpha^3-3\alpha$ ينتج :

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha^3+\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2-1}=\frac{3\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2-1}=\frac{3\alpha(\alpha^2-1)}{\alpha^2-1}=3\alpha$$

استنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا $2.1\prec\alpha\prec2.2$ ومنه $6.3\prec3\alpha\prec6.6$ أي $6.3\prec f(\alpha)\prec6.6$.

5.أ. تبيين أن (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ مستقيم مقارب مائل :

$$\lim_{|x|\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{|x|\to-\infty}\left[\frac{2x^3+3}{x^2-1}-2x\right]=\lim_{|x|\to-\infty}\frac{2x^3+3-2x^3+2x}{x^2-1}=\lim_{|x|\to-\infty}\frac{2x+3}{x^2-1}=\lim_{|x|\to-\infty}\frac{2}{x}=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ):

ندرس إشارة $f(x)-y$ أي إشارة $\frac{2x+3}{x^2-1}$. نلخص إشارة $f(x)-y$ و الوضع النسبي في الجدول أدناه:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$2x+3$	-	0	+		+		+	
x^2-1	+		+	0	-	0	+	
$f(x)-y$	-	0	+	‖	-	‖	+	
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	

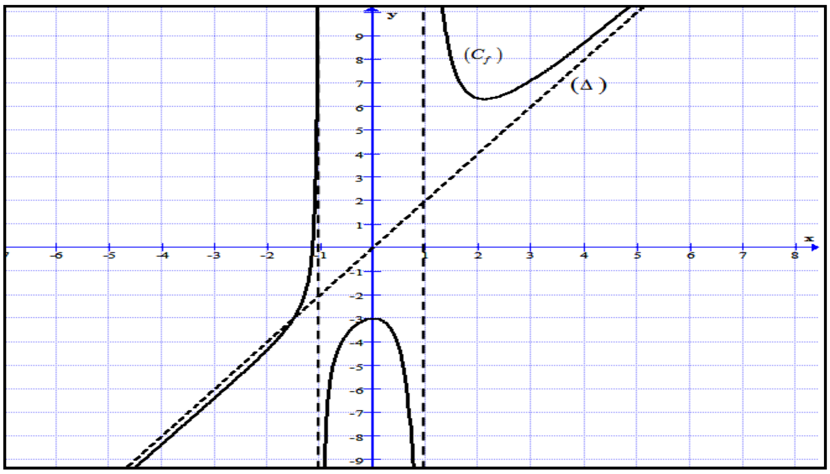
6. تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا :

- f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$ و من ثم على المجال $[-1.2;-1.1]$: و لدينا : $f(-1.2)=-1.03\prec0$ و $f(-1.1)=1.609\succ0$. حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-1.2;-1.1[$ حلا وحيدا β.

تفسير النتيجة هندسيا : β هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

7. انشاء (Δ) و المنحنى:

$f(0)=-3$



8. شرح كيفية رسم (Ch) انطلاقا من (Cf) :

لدينا $h(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}+1=f(x)+1$. (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{j}$.

9. المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة f(x)=ImI

حلول المعادلة $f(x)=|m|$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=|m|$.$(|m|\geq 0)$

⇦إذا كان $|m|\in[0;f(\alpha)[$ أي أن $m\in]-f(\alpha);f(\alpha)[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .

⇦إذا كان $|m|=f(\alpha)$ أي أن $m=f(\alpha)$ أو $m=-f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا و حلا سالبا.

⇦ إذا كان $|m|\in]f(\alpha);+\infty[$ أي أن $m=]-\infty;-f(\alpha)[\cup]f(\alpha);+\infty[$ المعادلة تقبل حلين موجبين و حلا سالبا .

حل التمرين -18-

الجزء الأول :

1. $g(-2)\prec 0$ و $g(-1)\succ 0$

تعليل وجود عدد حقيقي a من المجال] -2;-1[يحقق $g(a)=0$:

من التمثيل البياني : g مستمرة و متزايدة تماما على $\Re$ و من ثم على $[-2;-1]$. و لدينا $g(-2)\times g(-1)\prec 0$.

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فانه يوجد عدد حقيقي α وحيد من المجال $]-2;-1[$ يحقق: $g(\alpha)=0$.

2.التحقق حسابيا أن: $-1.48<a<-1.47$.

$g(-1.48)=-0.12$ و $g(-1.47)=0.0035$. نلاحظ ان 0 محصور بين -0.12 و 0.0035 . إذن : $\alpha\in]-1.48;-1.47[$.

3. استنتاج إشارة $g(x)$:

g مستمرة و متزايدة تماما على $\Re$ و تنعدم من اجل $x=\alpha$. وعليه إشارة $g(x)$ كالتالي :

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g(x)$	- 0 +

الجزء الثاني : f الدالة المعرفة على المجموعة R كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-4}{x^2+2}$. معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2-4}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2-4}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

2.أ التحقق أن $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$:

من أجل كل x من R لدينا ،

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2x)(x^2+2)-2x(x^3+x^2-4)}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^4+6x^2+2x^3+4x-2x^4-2x^3+8x}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4+6x^2+12x}{(x^2+2)^2} = \frac{x(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

ب.استنتاج اتجاه تغير الدالة f و جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $xg(x)$. نلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	|	+	
x		-	|	-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;0]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	2	↗	$+\infty$

3.أ-تبيين أن (Δ) ذو المعادلة y=x+1 م م م لـ (Cf) عند $+\infty$ و $-\infty$:-

• $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3+x^2-4}{x^2+2}-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2-4-x^3-x^2-2x-2}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x-6}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{x} = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+x^2-4}{x^2+2}-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-4-x^3-x^2-2x-2}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x-6}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x} = 0$

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x+1$ مستقيم مقارب مائل لـــ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم (Δ):

ندرس إشارة $[f(x)-x]$ أي إشارة $\frac{-2x-6}{x^2+2}$, إشارة $\frac{-2x-6}{x^2+2}$ من إشارة البسط .

نلخص إشارة $[f(x)-x]$ و الوضع النسبي في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)-y$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

4. تبيين ان المنحنى يقبل مماسان موازيين لـ (Δ) :

المعادلة $f'(x)=1$ تكافئ $\frac{x^4+6x^2+12x}{(x^2+2)^2}=1$ ومنه $x^4+6x^2+12x=(x^2+2)^2$

ومنه $x^4+6x^2+12x=x^4+4x^2+4$ ومنه $x^2+6x-2=0$ ، $\Delta=44\succ0$

المعادلة $f'(x)=1$ تقبل حلين متمايزين إذن يوجد مماسان موازيين لــ(Δ).

5. تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا:

f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و من ثم على المجال $[1.3;1.4]$:

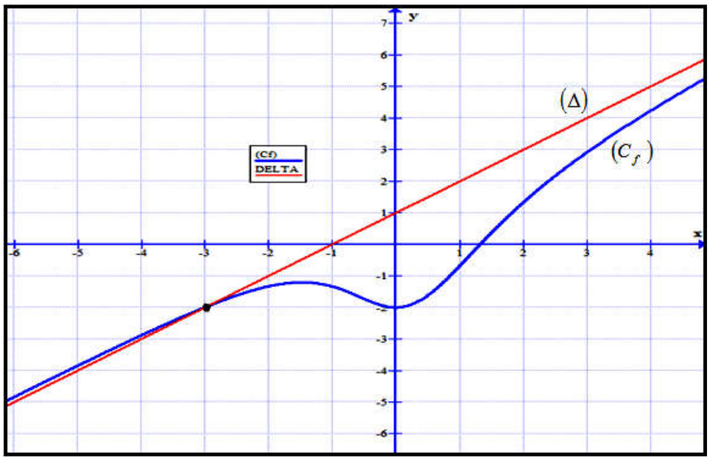
و لدينا : $\begin{cases} f(1.3)=-0.03\prec0 \\ f(1.4)=0.17\succ0 \end{cases}$ أي $f(1.4)\times f(1.3)\prec0$. حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1.3;1.4[$ حلا وحيدا β .

تفسير النتيجة هندسيا :

β هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

6. إنشاء (Δ) والمنحنى (Cf)

$f(\alpha)=-1.2$, $f(0)=-2$



حل التمرين -19-

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\Re$ بـ $g(x)=-x^3+3x^2-3x+2$.

1. حساب النهايات:

• $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-x^3+3x^2-3x+2\right]=\lim_{x\to+\infty}-x^3=-\infty$ • $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x^3+3x^2-3x+2\right]=\lim_{x\to-\infty}-x^3=+\infty$

2. دراسة تغيرات الدالة g:

من اجل كل x من $\Re$ ، $g'(x)=-3x^2+6x-3$.

$-3x^2+6x-3=0$ ، $\Delta=0$ ، و المعادلة حلا مضاعفا هو $x=1$.

و منه $g'(x)\leq0$ من اجل كل x من $\Re$ و بالتالي g متناقصة تماما على $\Re$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3. حساب $g(-2)$ و استنتاج إشارة $g(x)$: $g(2)=0$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$g(x)$	+ 0 -

إشارة $g(-x)$:

لدينا مما سبق $g(x)=0$ لما $x=2$ و منه $g(-x)=0$ لما $-x=2$ أي $x=-2$.

و $g(x)\succ 0$ لما $x\prec 2$ و منه $g(-x)\succ 0$ لما $-x\prec 2$ أي $x\succ -2$..

و $g(x)\prec 0$ لما $x\succ 2$ و منه $g(-x)\prec 0$ لما $-x\succ 2$ أي $x\prec -2$.

نلخص إشارة $g(x)$ في الجدول أدناه :

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
$g(-x)$	- 0 +

الجزء الثاني :

f الدالة المعرفة على المجموعة $R-\{-1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x^3+6x^2+6x+1}{(x+1)^2}$

1. حساب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty.$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=\dfrac{15}{0^+}=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}=\dfrac{15}{0^+}=+\infty$

استنتاج المستقيمات المقاربة العمودية :

المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f).

2.أ. التحقق أن: $f'(x)=\dfrac{2g(-x)}{(x+1)^3}$:

من أجل كل x من $R-\{-1\}$ لدينا ،

$$f'(x)=\frac{(6x^2+14x+8)(x+1)^2-2(x+1)(2x^3+7x^2+8x+2+3)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)\left[(6x^2+14x+8)(x+1)-2(2x^3+7x^2+8x+2+3)\right]}{(x+1)(x+1)^3}$$

$$=\frac{2x^3+6x^2+6x+4}{(x+1)^3}=\frac{2((-x)^3+3(-x)^2+3(-x)+2)}{(x+1)^3}=\frac{2g(-x)}{(x+1)^3}$$

ب. استنتاج اتجاه تغيرات f و تشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط و المقام . نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول أدناه :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$g(-x)$		-	0	+	|	+	
$(x+1)^3$		-		-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	▮	+	

f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-2]$ و $]-1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[-2;-1[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘ ∞	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3.أ. تبيين أن $f(x)=2x+2-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ **:**

$$2x+2-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(2x+2)(x^2+2x+1)-1}{(x+1)^2}=\frac{2x^3+6x^2+6x+1}{(x+1)^2}=f(x)$$

ب. تبيين أن (Δ) **ذو المعادلة y=2x+2 م م م لـ (Cf):**

$$\lim_{|x|\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{|x|\to-\infty}\left[2x+2-\frac{1}{(x+1)^2}-(2x+2)\right]=\lim_{|x|\to-\infty}-\frac{1}{(x+1)^2}=0$$ إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة

$y=2x+2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$.

ج. دراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ)**:**

ندرس إشارة $f(x)-y$ أي إشارة $\dfrac{-1}{(x+1)^2}$. لدينا من اجل كل x من $R-\{-1\}$

، $\dfrac{-1}{(x+1)^2}\prec 0$ إذن (C_f) تحت (Δ) في كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;+\infty[$.

4. تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا :

- f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ و من ثم على المجال $[-0.3;-0.2]$:

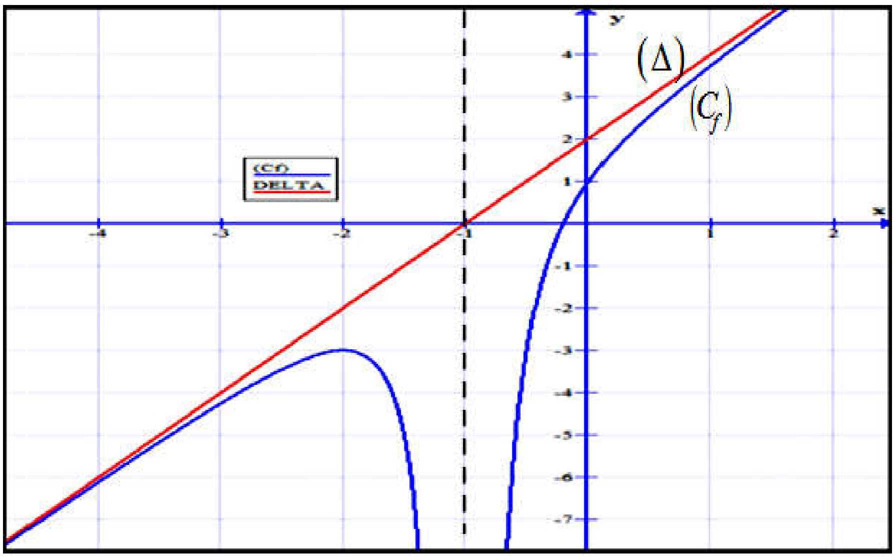
و لدينا : $\begin{cases} f(-0.2)=0.0375\succ 0 \\ f(-0.3)=-0.64\prec 0 \end{cases}$ أي : $f(-0.3)=-0.64\prec 0$. حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة

$f(x)=0$ تقبل في المجال $]-0.3;-0.2[$ حلا وحيدا α.

تفسير النتيجة هندسيا :

α هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

5. إنشاء والمنحنى: $f(\alpha)=0$ ، $f(0)=1$



6. المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة f(x)=2x+m:

حلول المعادلة $f(x)=2x+m$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=2x+m$

(مناقشة مائلة)

⇦ إذا كان $m\in]-\infty;1[$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين .

⇦ إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تقبل حلا معدوما و حلا سالبا.

⇦ إذا كان $m\in]1;2[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

⇦ إذا كان $m\in[2;+\infty[$ المعادلة لا تقبل حلولا.