الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية المسيلة — ثانوية الشهيد حميدي عيسى

المستوى: ثانية ثانوي — الشعبة: تقني رياضي

الخميس 17 مارس 2022 — المدة: ساعتان

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

⚠ تجنب الشطب واستعمال المصحح.

☆ التمرين الأول: (06 نقاط)

I) يحتوي كيس على 7 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها ثلاث كريات بيضاء B_1 ، B_2 و B_3 وأربع كريات خضراء V_1 ، V_2 ، V_3 و V_4.

نسحب كريتين من الكيس على التوالي بحيث نعيد الكرية الأولى قبل السحب الثاني.

① مثل النتائج بمخطط (أو شجرة)، ثم عين مجموعة الإمكانيات Ω.

② احسب إحتمال الأحداث التالية: الحدث A "سحب كريتين مختلفتين في اللون".

الحدث B "سحب كريتين من نفس اللون".

الحدث C "سحب كرية بيضاء على الأكثر".

II) نقترح اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب αDA (α عدد طبيعي) ، فإذا سحب كريتين بيضاوين يتحصل على $100DA$ وإذا سحب كريتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50DA$ وإذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه.

وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة العدد الطبيعي α.

① عين القيم المتغير العشوائي X، ثم عرف قانون إحتماله.

② أ - بين أن الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X بدلالة α يعطي بـ: $E(X) = \frac{300}{7} - \alpha$.

ب - أوجد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

☆ التمرين الثاني: (06 نقاط)

✍ المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر النقط $A(1;2)$ ، $B(-8;-1)$ و $C(3;4)$.

و H نقطة معرفة كما يلي: $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

① بين أن النقطة H هي مرجح النقطتين A و C، المرفقتين على الترتيب بمعاملين يطلب تعينهما.

② لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;-1);(C;-3)\}$.

أ - احسب إحداثيي النقطة G.

ب - بين أن النقط B ، H و G في استقامية.

③ لتكن (Γ_1) مجموعة النقط M من المتسوي حيث: $||\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}||=3(k+1)^2$ مع $k\in\mathbb{R}$.

أ - عبر عن الشعاع $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MG}$.

ب - عين قيم k حتى تكون (Γ_1) دائرة نصف قطرها 1 يطلب تعيين مركزها.

④ عين، ثم أنشئ (Γ_2) مجموعة النقط M من المتسوي حيث: $||\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MC}||=3||\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}||2$.

☆ التمرين الثالث: (08 نقاط)

✍ لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

① عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2\}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$.

② احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

③ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-2\}$: $f'(x)=\dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$.

④ استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

⑤ أ - بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين إحدهما المستقيم (Δ) ذو المعادلته $y=x+1$.

ب - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

⑥ تحقق أن النقطة $A(-2;-1)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين، ثم بين أنها مركز تناظر للمنحنى (C_f).

⑦ ارسم المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f).

☆ انتهى الإختبار ☆

اذ أنت لم تزرع وأبصرت حاصدا ☆☆ ندمت على التفريط في زمن البذر

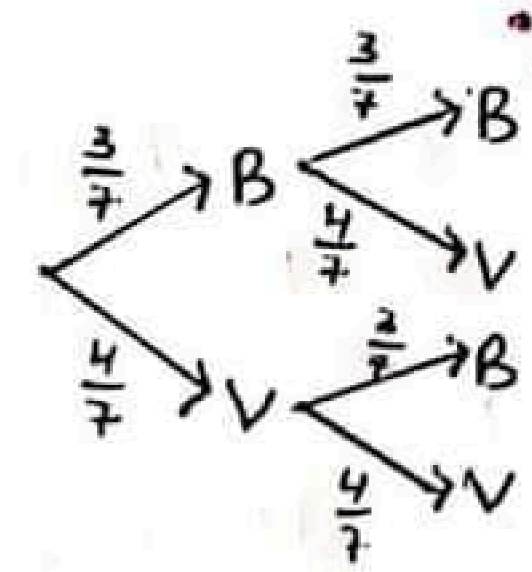
أستاذ المادة: فراحتية المحفوظ

العلامة	الإجابة

- حل التمرين الأول:

I. ① تمثيل النتائج بمخطط:

(1)



BB
BV
VB
VV

• مجموعة الإمكانيات:

$\Omega = \{BB, BV, VB, VV\}$

② حساب احتمال الحوادث:

(1.5) $P(A) = P(\{BV, VB\}) = \frac{3}{7}\times\frac{4}{7} + \frac{4}{7}\times\frac{3}{7}$

$= \frac{12}{49} + \frac{12}{49} = \frac{24}{49}$

$P(B) = P(\{BB, VV\}) = \frac{3}{7}\times\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\times\frac{4}{7}$

$= \frac{9}{49} + \frac{16}{49} = \frac{25}{49}$ (أو $P(B) = 1 - P(A)$)

$P(C) = P(\{BV, VB, VV\})$

$= \frac{3}{7}\times\frac{4}{7} + \frac{4}{7}\times\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\times\frac{4}{7}$

$= \frac{12}{49} + \frac{12}{49} + \frac{16}{49} = \frac{40}{49}$

II. ① تعيين قيم المتغير العشوائي X:

(0.5) لدينا في حالة الحصول على BB نجد $X = 100-\alpha$

في حالة الحصول على BV أو VB نجد

$X = 50-\alpha$

في حالة الحصول على VV نجد $X = -\alpha$

إذن $X = \{100-\alpha ; 50-\alpha ; -\alpha\}$

العلامة	الإجابة

(6) - قانون احتمال المتغير العشوائي X:

(1) $P(X = 100-\alpha) = P(\{BB\}) = \frac{3}{7}\times\frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

$P(X = 50-\alpha) = P(\{BV, VB\}) = P(A)$

$= \frac{3}{7}\times\frac{4}{7} + \frac{4}{7}\times\frac{3}{7} = \frac{24}{49}$

$P(X = -\alpha) = P(\{VV\}) = \frac{4}{7}\times\frac{4}{7} = \frac{16}{49}$

$X = x_i$	$100-\alpha$	$50-\alpha$	$-\alpha$
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{49}$	$\frac{24}{49}$	$\frac{16}{49}$

(1) ② تبيين أن: $E(X) = \frac{300}{7} - \alpha$

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

$= (100-\alpha)\times\frac{9}{49} + (50-\alpha)\times\frac{24}{49} - \alpha\times\frac{16}{49}$

$= \frac{900 - 9\alpha + 1200 - 24\alpha - 16\alpha}{49}$

$= \frac{2100 - 49\alpha}{49} = \frac{2100}{49} - \frac{49}{49}\alpha$

$E(X) = \frac{300}{7} - \alpha$

(1) ③ تعيين أكبر قيمة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب:

اللعبة في صالح اللاعب معناه $E(X) > 0$

معناه $\frac{300}{7} - \alpha > 0$ معناه $\frac{300}{7} > \alpha$

إذن أكبر قيمة لـ α حتى تكون اللعبة

في صالح اللاعب هي $\alpha = 42$

(لأن $\frac{300}{7} \simeq 42,86$)

(6)

- حل التمرين الثاني :

①. تبيين أن H مرجح النقطتين A و B :

(1) لدينا $\vec{AH} = \frac{3}{2}\vec{AC}$ معناه $2\vec{AH} = 3\vec{AC}$

معناه $2\vec{AH} - 3\vec{AC} = \vec{0}$

معناه $2\vec{AH} - 3\vec{AH} - 3\vec{HC} = \vec{0}$

معناه $-\vec{AH} - 3\vec{HC} = \vec{0}$

معناه $\vec{HA} - 3\vec{HC} = \vec{0}$

ومنه $1-3=-2\neq 0$ إذن H مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 1 و -3 على الترتيب

②. أ- حساب إحداثيات النقطة G :

(1) $x_G = \frac{1\times1+(-1)(-8)+(-3)(3)}{1-1-3} = \frac{9-9}{-3} = \frac{0}{-3} = 0$

$y_G = \frac{1\times2+(-1)(-1)+(-3)(4)}{1-1-3} = \frac{-9}{-3} = 3$

ومنه إحداثيي G هي $G(0,3)$

ب. تبيين أن النقط B ، H و G في استقامية :

لدينا G مرجح الجملة $\{(A,1);(B;-1);(C,-3)\}$

(0,5) و H مرجح الجملة $\{(A;1);(1;-3)\}$

حسب خاصية التجميع فإن G مرجح الجملة $\{(H,1-3),(B,1)\}$

إذن النقط B ، H و G على استقامية .

③. أ. التعبير عن الشعاع بدلالة الشعاع $\vec{MG}$:

لدينا G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,-1),(C,-3)\}$

(1) فإنه من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا

$\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MC} = (1-1-3)\vec{MG}$
$= -3\vec{MG}$

ب. تعيين قيم k حتى تكون (Γ_1) دائرة نصف قطرها 1 :

لدينا $\|\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = 3(k+1)^2$

معناه $\|-3\vec{MG}\| = 3(k+1)^2$

معناه $3MG = 3(k+1)^2$

$MG = (k+1)^2$

(1) ومنه (Γ_1) دائرة مركزها النقطة G ونصف قطرها $(k+1)^2$

إذن $(k+1)^2 = 1$

أي $k+1 = 1$ أو $-k-1 = 1$

أي $k = 0$ أو $k = -2$

إذن قيم k هي 0 و -2 . $k = \{0, -2\}$

④. تعيين (Γ_2) مجموعة النقط M :

(1) لدينا $2\|\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = 3\|\vec{MA} - 3\vec{MC}\|$

ولدينا H مرجح الجملة $\{(A;1);(C;-3)\}$

ومنه من أجل كل النقطة M لدينا

$\vec{MA} - 3\vec{MC} = (1-3)\vec{MH} = -2\vec{MH}$

إذن $2\|-3\vec{MG}\| = 3\|-2\vec{MH}\|$

$2\times3\times MG = 3\times$

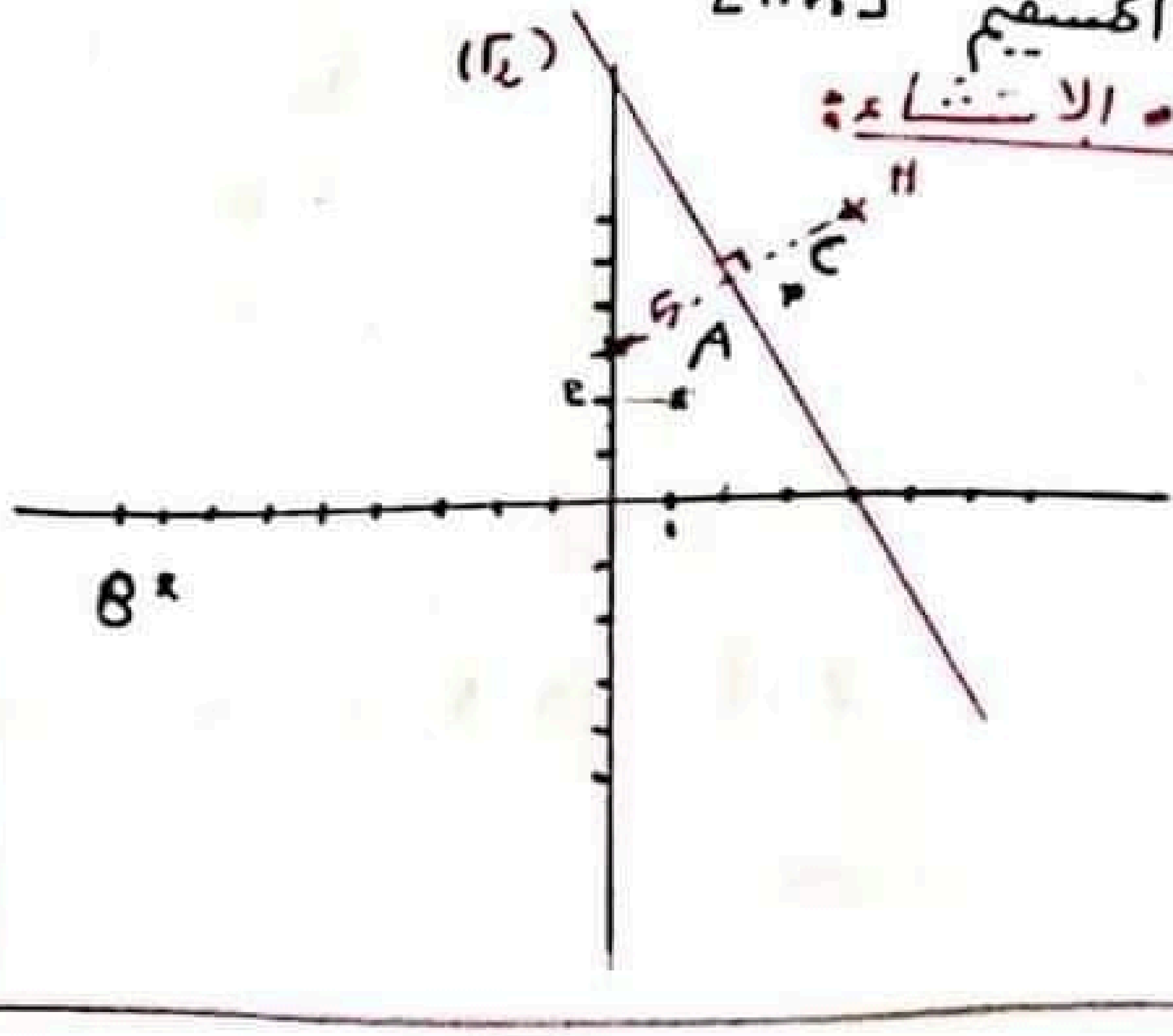
$6MG = 6MH$

$MG = MH$

ومنه المجموعة (Γ_2) هي محور قطعة المستقيم $[HG]$

- الانشاء :

(0,5)



(08)

- حل التمرين الثالث :

$$f(x)=\frac{x^2+3x+6}{x+2}$$

① - تعيين الأعداد الحقيقية a ، b ، c حيث : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$

(0,5) لدينا من أجل $x\neq -2$

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$$
$$=\frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2}$$
$$=\frac{ax^2+(b+2a)x+2b+c}{x+2}$$

بالمطابقة نجد $\begin{cases} a=1 \\ b+2a=3 \\ 2b+c=6 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=4 \end{cases}$

أي $f(x)=x+1+\frac{4}{x+2}$

② - حساب نهايات الدالة f :

(2)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

لدينا

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
$x+2$	$-$ 0 $+$

$\lim_{x\overset{<}{\to}-2} f(x)=-\infty$

لأن لما $x\to-2$ فإن $x^2+3x+6\to4$

و $x+2\overset{<}{\to}0$

$\lim_{x\overset{>}{\to}-2} f(x)=+\infty$

لأن لما $x\to-2$ فإن $x^2+3x+6\to4$

و $x+2\overset{>}{\to}0$

③ - تبين أنه من أجل $x\neq-2$: $f'(x)=\frac{x(x+4)}{x+2}$:

(0,5) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-2\}$ حيث

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x+2)-(x^2+3x+6)}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{2x^2+4x+3x+6-x^2-3x-6}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{x^2+4x}{(x+1)^2}=\frac{x(x+4)}{(x+1)^2}$$

④ - استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

(0,5) لدينا $f'(x)=0$ معناه $x(x+4)=0$

معناه $x=0$ أو $x=-4$

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty,-4]$ والمجال $[0,+\infty[$

(0,5) ومتناقصة تماما على مجال $[-4,-2[$ والمجال $]-2,0]$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

⑤ أ- تبين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين :

(0,5) وجدنا سابقا $\lim_{x\overset{<}{\to}-2} f(x)=-\infty$

و $\lim_{x\overset{>}{\to}-2} f(x)=+\infty$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=-2$

$$\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-y)=\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-(x+1))$$ ولدينا

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{4}{x+2}=0$$

(0,5) ومنه المستقيم (Δ) ذو معادلة $y=x+1$
مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و بجوار $-\infty$.

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

- ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y$

$$f(x)-y=x+1+\frac{4}{x+2}-(x+1)=\frac{4}{x+2}$$

ومنه اشارة الفرق من اشارة $x+2$

(1)

x	$-\infty$ -2 $+\infty$	
$x+2$	$-$	$+$
$f(x)-y$	$-$	$+$
وضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

6- التحقق أن $A(-2,-1)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين:

لدينا معادلة المستقيم المقارب العمودي هي $x=-2$

(0,5) ومعادلة المستقيم المائل $y=x+1$

نجد $x=-2$ و $y=-2+1=-1$

اذن نقطة تقاطع المستقيمين هي $A(-2,-1)$

ونبين أن $A(-2,-1)$ مركز تناظر لـ (C_f):

لدينا من أجل $-2-x\neq-2$ و $-2+x\neq-2$

(0,5) $f(-2+x)+f(-2-x)=$

$$=-2+x+1+\frac{4}{-2+x+2}-2-x+1+\frac{4}{-2-x+2}$$

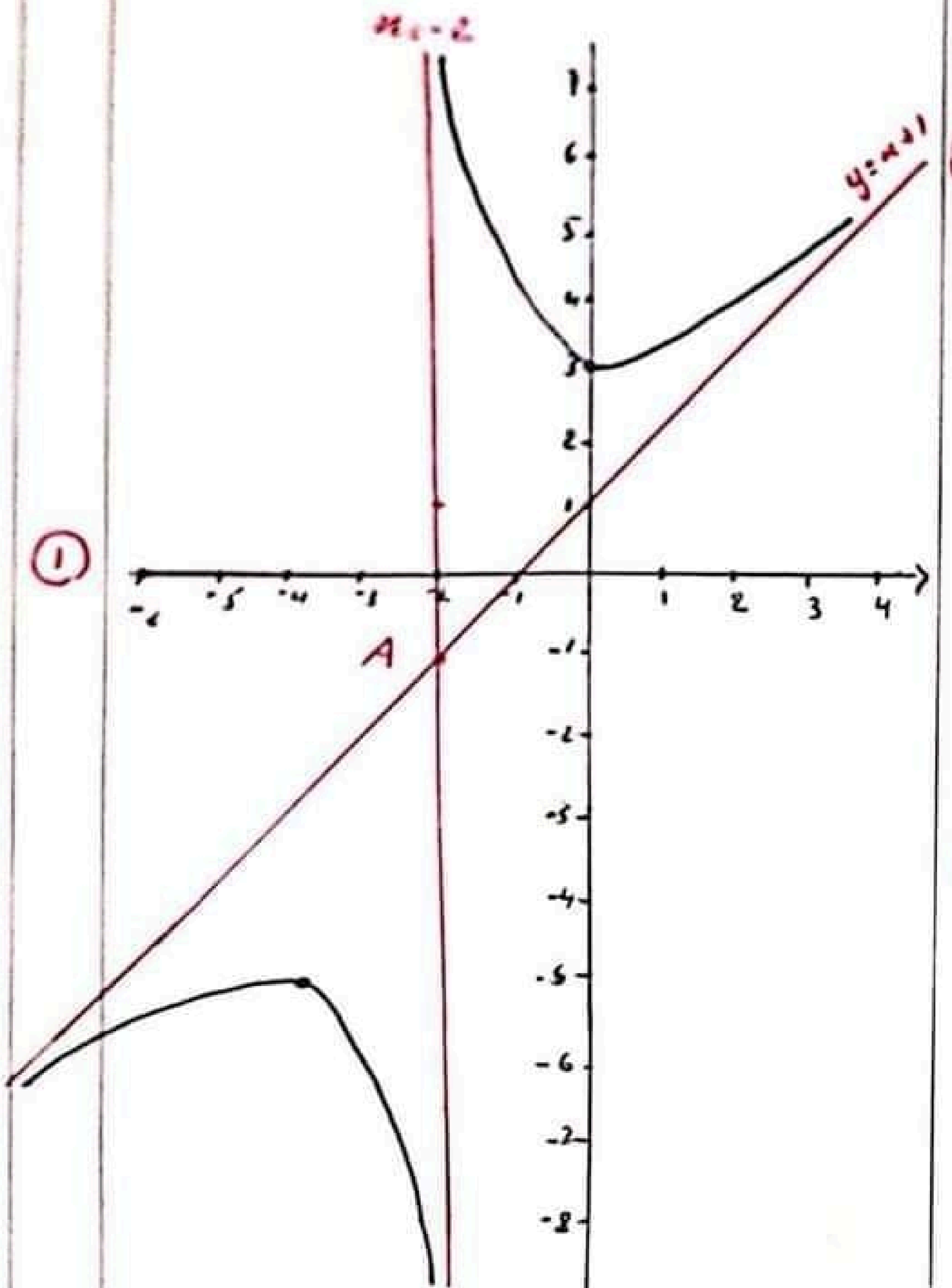
$$=-2+\frac{4}{x}-\frac{4}{x}$$

$$=-4+2=-2=2(-1)$$

ومنه النقطة $A(-2,-1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

7- رسم المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f):

(1)



انتهى