ثانوية: المجاهد صديقي نوري بالجلفة	# فرض الفصل الأول	الموسـم الدراسي: 2021 / 2022
المستوى: 2 ثانوي - شعبة رياضيات		الأستاذ: قويسم براهيم الخليل
يوم: 02 نوفمبر 2021	تنبيه: يمنع استعمال اللون الأحمر	المـــدة: 1 سا و 10 د

◆ التمرين 01: [06 نقاط]

نعتبر كثيري الحدود P و Q

$$P(x) = -2\alpha(x^4 - x^2 - 2) + 2x(x^4 - x^2 - 2) \quad ; \quad Q(x) = 2x^4 - 2x^2 - 4$$

حيث α عدد حقيقي

[1 ن] ❶ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x) = 0$

[2 ن] ❷ عيّن درجة كثير الحدود P، ثم بيّن أنّ α جذر لـ $P(x)$

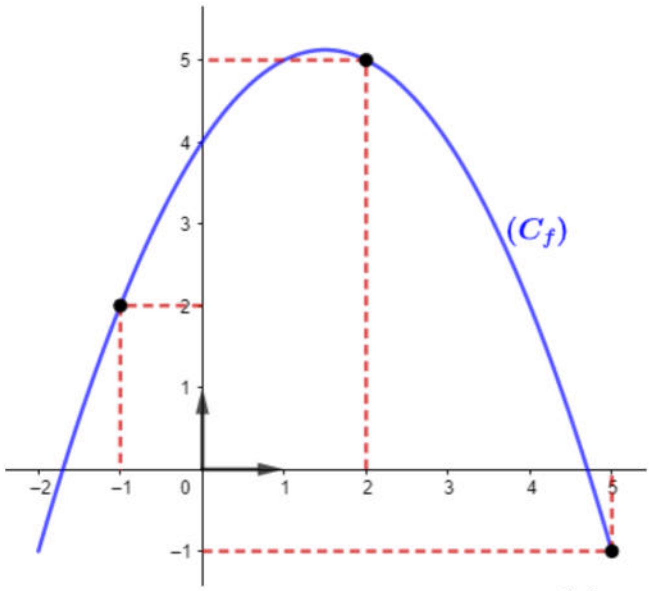
[2 ن] ❸ بيّن أنّ: $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ ، ثم استنتج حلول المعادلة $P(x) = 0$

[1 ن] ❹ استنتج حلول المعادلة $P(|x|+1) = 0$

◆ التمرين 02: [03 نقاط]

f دالة معرفة على المجال $[-2;5]$ بتمثيلها البياني (C_f)

(الشكل المقابل)



[1 ن] ❶ احسب $(f\circ f\circ f)(2)$، ثم استنتج $\left(\underbrace{f\circ f\circ \dots \circ f}_{\text{مرة } 2021}\right)(2)$

[2 ن] ❷ أنشئ (C_g) و (C_h) التمثيل البياني للدالتين g و f ، حيث:

$$g(x) = f(-|-x|)$$
$$h(x) = |-f(-x)|$$

◆ التمرين 03: [11 نقطة]

I) f و g دالتان عدديتان معرفتان كما يلي: $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ و $g(x) = x$

[1 ن] ❶ عيّن D_f و D_g مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g على الترتيب

[2 ن] ❷ تحقق أن $(f\circ f)(x) = g(x)$، ثم استنتج $(f\circ f\circ f)(2)$.

II) (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$:

[2 ن] ❶ من أجل كل $x \neq 1$، عين العددين الحقيقين a و b، بحيث:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1}$$

[2 ن] ❷ فكك الدالة f إلى مركب دالتين u و v بسيطتين، يطلب تعيين عبارتيهما.

[1 ن] ❸ باستعمال اتجاه تغير مركب دالتين، بيّن أن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$

[1 ن] ❹ من أجل $(2-x) \in \mathbb{R}^*$، تحقق من أن النقطة $\omega(1;1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

[2 ن] ❺ استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من دالة مرجعية، ثم أنشئه

يقول أحمد شوقي:

وما أخذ العلم بالتمني

ولكن تؤخذ الدنيا غلابا

◆ التمرين 01: [06 نقاط]

❶ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x)=0$:

لدينا: $2x^4-2x^2-4=0$

نضع: $x^2=t$ 0.5

نجد: $2t^2-2t-4=0$

باستعمال المميز المختصر لدينا:

$$\begin{aligned}\Delta &= b'-ac\\ &=(-1)^2-(2)(-4)\\ &=9\end{aligned}$$

لدينا:

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta}}{a}$$

ومنه:

$$x=\frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2}=2 \quad \text{أو} \quad x=\frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2}=-1$$

لدينا: $x^2=t$

ومنه: $x^2=-1$ (مرفوض) أو $x^2=2$ (مقبول)

ومنه: $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}=$

إذن: $s=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ 0.5

❷ تعيين درجة كثير الحدود P:

$$\begin{aligned}P(x)&=-2\alpha(x^4-x^2-2)+2x(x^4-x^2-2)\\ &=-2\alpha(x^4-x^2-2)+2x^5-2x^3-4x\end{aligned}$$

إذن درجة $P(x)$ هي 5 ١

• تبيين أنّ α جذر لـ $P(x)$:

$$\begin{aligned}P(\alpha)&=-2\alpha(\alpha^4-x^2-2)+2\alpha(\alpha^4-\alpha^2-2)\\ &=0\end{aligned}$$ ١

❸ تبيين أنّ: $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$:

لدينا: α جذر لـ $P(x)$ و $P(x)$ من الدرجة 5 ومنه:

$$P(x)=(x-\alpha)(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}P(x)&=-2\alpha(x^4-x^2-2)+2x(x^4-x^2-2)\\ &=-2\alpha x^4+2\alpha x^2+4\alpha+2x^5-2x^3-4x\\ &=2x^5-2\alpha x^4-2x^3+2\alpha x^2-4x+4\alpha\end{aligned}$$ 0.5

باستعمال التحليل او المطابقة أو القسمة الاقليدية أو جدول هورنر:

لدينا:

	2	-2α	-2	2α	-4	4α
α	0	2α	0	-2α	0	-4α
	2	0	-2	0	-4	0

نجد: $P(x)=(x-\alpha)(2x^4-2x^2-4)$ 0.5

إذن: $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$

• استنتاج حلول المعادلة $P(x)=0$:

لدينا: $P(x)=0$

معناه: $(x-\alpha)Q(x)=0$

ومنه: $x-\alpha=0$ أو $Q(x)=0$

إذن: $s=\{\alpha;-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ ١

❹ استنتج حلول المعادلة $P(|x|-1)=0$

لدينا: $P(|x|+1)=0$

معناه:

$$|x|+1=\begin{cases}\alpha\\ -\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{cases}$$ 0.5

ومنه:

$$|x|=\begin{cases}\alpha-1\\ -\sqrt{2}-1 & \text{(مرفوض)}\\ \sqrt{2}-1\end{cases}$$

ومنه:

$$x=\begin{cases}\alpha-1\\ -\alpha+1\\ \sqrt{2}-1\\ 1-\sqrt{2}\end{cases}$$

0.5

إذن: $s=\{(1-\sqrt{2});(\sqrt{2}-1);(\alpha-1);(1-\alpha)\}$

◆ التمرين 02: [03 نقاط]

❶ حساب $(f\circ f\circ f)(2)$:

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ f)(2)&=(f\circ f)(f(2))\\ &=(f\circ f)(5)\\ &=f(f(5))\\ &=f(-1)\\ &=2\end{aligned}$$ 0.5

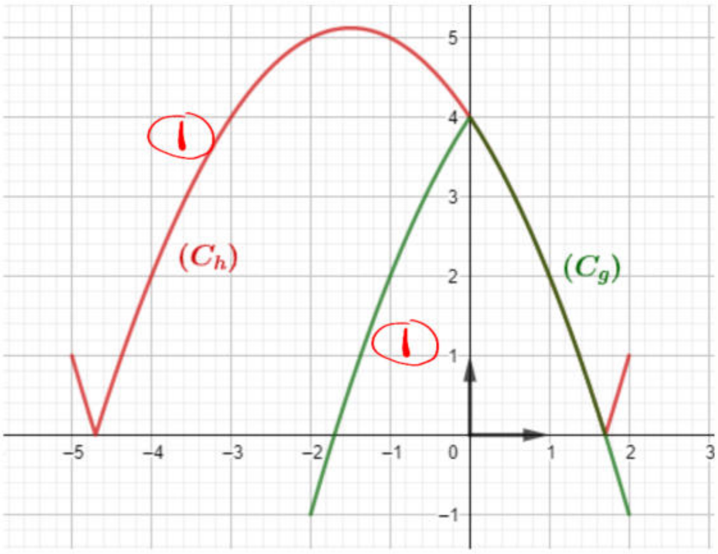
• استنتاج $\Big(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{مرة } 2021}\Big)(2)$:

لدينا: $2021=2+\underbrace{673\times 3}_{2019}$

إذن:

$$\begin{aligned}\Big(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{مرة } 2021}\Big)(2)&=\Big(\underbrace{f\circ f}_{\text{مرة } 2}\circ\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{مرة } 2019}\Big)(2)\\ &=(f\circ f)(2)\\ &=f(f(2))\\ &=f(5)\\ &=-1\end{aligned}$$ 0.5

❷ إنشاء (C_g) و (C_h):



◆ التمرين 03: [11 نقطة]

I)

❶ تعيين D_f و D_g:

الدالة f معرفة لما $x-1\neq 0$

ومنه $x\neq 1$

إذن: $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ 0.5

ولدينا الدالة g دالة تآلفية

إذن: $D_g=\mathbb{R}$ 0.5

❷ التحقق أن $(f\circ f)(x)=g(x)$:

$$(f\circ f)(x)=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}}$$
$$=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}=\frac{x}{x-1}\times\frac{x-1}{1}=x$$
1

- استنتاج $(f\circ f\circ f)(2)$:

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ f)(2)&=(f\circ f)\big(f(2)\big)\\&=g(2)\\&=2\end{aligned}$$
1

II)

❶ تعيين العددين الحقيقين a و b:

$$\begin{aligned}f(x)&=a+\frac{b}{x-1}\\&=\frac{ax-a+b}{x-1}\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\-a+b=0\end{cases}$ 1

ومنه: $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ 1

إذن: $f(x)=1+\frac{1}{x-1}$

❷ تفكيك الدالة f إلى مركب دالتين u و v :

نضع: $f(x)=(u\circ v)(x)$ 1

حيث: $\begin{cases}u(x)=1+\frac{1}{x}\\v(x)=x-1\end{cases}$ 1

❸ تبيين أن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$

لدينا:

- الدالة u متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$ لأنها عبارة عن دالة مرجعية (الدالة مقلوب) زائد 1
- الدالة v متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ لأنها دالة تآلفية معامل توجيها موجب 1

بما أن الدالة u و v متعاكستين في اتجاه التغير

فإن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$.

❹ التحقق من أن النقطة $\omega(1;1)$ مركز تناظر لـ (C_f):

لدينا $(2-x)\in\mathbb{R}^*$

ولدينا:

$$\begin{aligned}f(2-x)+f(x)&=1+\frac{1}{2-x-1}+1+\frac{1}{x-1}\\&=2+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x-1}\\&=2-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\\&=2\end{aligned}$$
1

إذن ω مركز تناظر لـ (C_f).

❺ استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من دالة مرجعية:

نضع:

$$h(x)=\frac{1}{x}$$

لدينا:

$$f(x)=1+\frac{1}{x-1}=h(x-1)+1$$
1

إذن (C_f) هو صورة منحنى الدالة جذر بانسحاب شعاعه $\vec{w}\binom{1}{1}$