اختبار الفصل الأوّل

التمرين الأول: (04 نقاط)

$P(x)$ كثير حدود حيث : $P(x)=x^3+2x^2+(\alpha-3)x+3\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

1. عين قيمة α حتى يكون العدد 2 جذر لـ $P(x)$.
2. نضع $\alpha=-2$ ، عين الأعداد الحقيقية a , b و c بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$.
3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$ ، واستنتج حلول المعادلة $-6x^6-5x^4+2x^2+1=0$.
4. ادرس إشارة $P(x)$ ثم استنتج حلول المتراجحة $\dfrac{P(x)}{2-x}\geq 0$.

التمرين الثاني: (08نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-3,3]$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2+1}$.

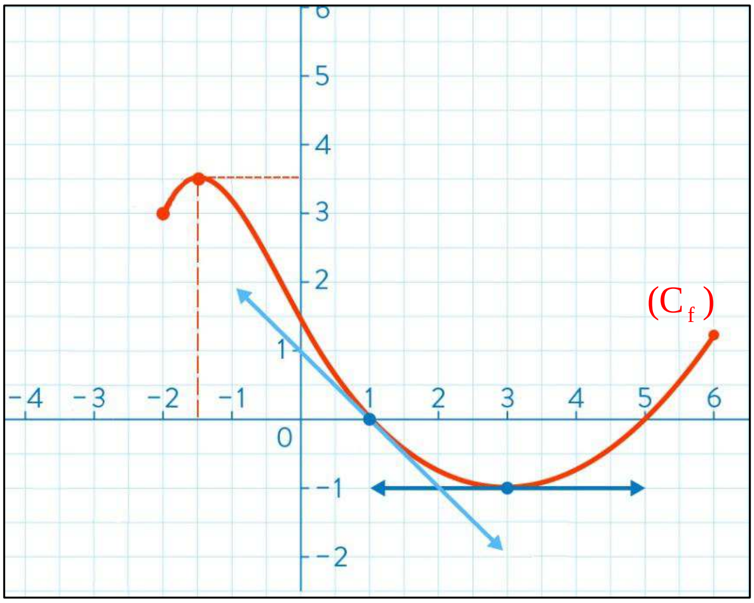
(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. عين العددين الحقيقين α و β بحيث (C_f) يقبل مماس عند النقطة $A(0,1)$ يوازي المستقيم ذو المعادلة $y=-2x-3$.
2. نضع $\alpha=-2$ و $\beta=1$ ، بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[-3,3]$ فإن $f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$
3. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $[-3,3]$.
4. اعط حصر للدالة f على المجال $[-1,1]$.
5. بين أن النقطة $A(0,1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).
6. احسب $f(1)$ ، $f(2)$ و $f(3)$ ثم استنتج $f(-1)$ ، $f(-2)$ و $f(-3)$ وارسم (C_f) على المجال $[-3,3]$.
7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الغير معدوم m عدد حلول المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{m}$.

التمرين الثالث:(08 نقاط)

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[-2,6]$ و f' دالتها المشتقة.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس. (انظر الشكل)



.I بالاستعانة بالبيان:

1. عين كلا من: $f(1)$ ، $f'(3)$ و $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.
2. اكتب معادلة مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
3. شكل جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج إشارة $f'(x)$.
4. حل بيانيا المعادلة $f(x)=0$.

.II نعتبر الدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ ، g' دالتها المشتقة.

1. فكك الدالة g إلى مركب دالتين، ثم عين مجموعة تعريفها.
2. ادرس اتجاه تغير الدالة g باستعمال "مبرهنة اتجاه تغير دالة مركبة".
3. اكتب عبارة $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.
4. ادرس إشارة $g'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة g وقارنها مع نتيجة -السؤال 2-.
5. شكل جدول تغيرات الدالة g .

سؤال إضافي: (+1 نقطة إضافية)

f و g دالتان معرف $\mathbb{R}$ حيث $f(x)=x^2+2x$ و $16x^2 + 15x +$ ($\circ$).
علما أن الدالة g هي دالة تآلفية، عين العبارات الممكنة للدالة g .

إعداد: الأستاذ بن مسعود

مؤسّسة الرّجاء والتّفوق الخاصّة (بوزريعة)

السنة الدراسية: 2021-2022	تصحيح اختبار الفصل الأول	المادة: الرياضيات
المستوى: 2 ع ت	في مادة الرياضيات	الأستاذ: بن مسعود

التمرين	الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
التمرين الأول	1) لدينا 2 جذر لـ $P(x)$ معناه $P(2)=0$ $P(2)=2^3+2\times 2^2+(\alpha-3)2+3\times\alpha=0$ $10+5\alpha=0$ $\boxed{\alpha=\frac{-10}{5}=-2}$ ومنه: $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$	0,5	0,5
	2)تحليل $P(x)$: $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$ $P(x)=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$ $\boxed{P(x)=ax^3+(b-2a)x^2+(cx-2b)x-2c}$ بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=2 \\ c-2b=-5 \\ -2c=-6 \end{cases}$ ومنه: $\boxed{a=1}\ \boxed{b=4}\ \boxed{c=3}$ يكون $\boxed{P(x)=(x-2)(x^2+4x+3)}$	1	1
	3) حل المعادلة $P(x)=0$: $P(x)=0$ تكافئ $x-2=0$ أو $x^2+4x+3=0$ ومنه فإن: $S=\{-3,-1,2\}$	0,5	0,5

<table>
<tr>
<td>$0,5$</td>
<td>$0,5$</td>
<td>
• استنتاج حلول المعادلة $-6x^6-5x^4+2x^2+1=0 \;....(E)$
بما أن $x=0$ ليس حل للمعادلة (E) فإنها تكافئ :
$x^6(-6-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^6})=0$
بوضع $X=\frac{1}{x^2}$ يكون $\frac{1}{X^3}(-6-5X+2X^2+X^3)=0$
يصبح لدينا $\frac{1}{X^3}P(X)=0$ أي $X\in\{-3,-1,2\}$
معناه $\frac{1}{x^2}\in\{-3,-1,2\}$.
$\frac{1}{x^2}=-3$ مرفوض، $\frac{1}{x^2}=-1$ مرفوض.
$\frac{1}{x^2}=2$ تقبل حلين: $\boxed{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}$ و $\boxed{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>1</td>
<td>
4) دراسة إشارة $P(x)$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-3</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$x-2$</td><td></td><td>-</td><td>|</td><td>-</td><td>|</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>x^2+4x+3</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>|</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$P(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$0,5$</td>
<td>$0,5$</td>
<td>
• استنتاج حلول المتراجحة $\frac{P(x)}{2-x}\geq 0$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-3</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$P(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$2-x$</td><td></td><td>+</td><td>|</td><td>+</td><td>|</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{P(x)}{2-x}$</td><td></td><td>-</td><td>|</td><td>+</td><td>|</td><td>-</td><td>||</td><td>-</td><td></td></tr>
</table>
$\frac{P(x)}{2-x}\geq 0$ معناه $x\in[-3,-1]$.
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>$0,5\times 2$</td>
<td>
$f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2+1}$ و $D_f=[-3,3]$
1) تعيين α و β :
• (C_f) يشمل النقطة $A(0,1)$ معناه $f(0)=1$
$f(0)=\frac{0^2+\alpha 0+\beta}{0^2+1}=\frac{\beta}{1}=\beta$
</td>
<td>التمرين الثاني</td>
</tr>
</table>

		لدينا $f(0)=1$ و $f(0)=\beta$ ومنه فإن $\boxed{\beta=1}$. • (C_f) يقبل مماس عند النقطة $A(0,1)$ يوازي المستقيم ذو المعادلة $y=-2x-3$ معناه $f'(0)=-2$ لدينا f قابلة للاشتقاق على المجال $[-3,3]$ $f'(x)=\frac{(2x+\alpha)(x^2+1)-(x^2+\alpha x+\beta)(2x)}{(x^2+1)^2}$ $f'(x)=\frac{\cancel{2x^3}+2x+\alpha x^2+\alpha\cancel{-2x^3}-2\alpha x^2-2\beta x}{(x^2+1)^2}$ $\boxed{f'(x)=\frac{-\alpha x^2+(2-2\beta)x+\alpha}{(x^2+1)^2}}$ $f'(0)=\frac{-\alpha 0^2+(2-2\beta)0+\alpha}{(0^2+1)^2}$ $f'(0)=\frac{\alpha}{1}=\alpha$ لدينا $f'(0)=\alpha$ و $f'(0)=-2$ ومنه فإن $\boxed{\alpha=-2}$. فتكون $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$	
1	1	2) حساب الدالة المشتقة/ لدينا f قابلة للاشتقاق على المجال $[-3,3]$ $f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2+1)-(x^2-2x+1)(2x)}{(x^2+1)^2}$ $f'(x)=\frac{\cancel{2x^3}\cancel{+2x}-2x^2-2\cancel{-2x^3}+4x^2\cancel{-2x}}{(x^2+1)^2}$ $f'(x)=\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$ $\boxed{f'(x)=\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}}$	

المجموع	مجزأة	عناصر الإجابة
1,5	0,5×3	3) دراسة إشارة $f'(x)$

- إشارة $f'(x)$ من إشارة (x^2-1) لأن المقام موجب

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

- استنتاج التغيرات:

f' موجبة على المجالين $]-\infty,-1]$ و $[1,+\infty[$ ومنه f متزايدة عليهما.

f' سالبة على المجال $[-1,1]$ ومنه f متناقصة عليه.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	-3		-1		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1,6	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	0,4

المجموع	مجزأة	عناصر الإجابة
0,5	0,5	4) حصر الدالة f على المجال $[-1,1]$.

f متناقصة على المجال $[-1,1]$ ومنه فإن

$$f(1) \leq f(x) \leq f(-1)$$

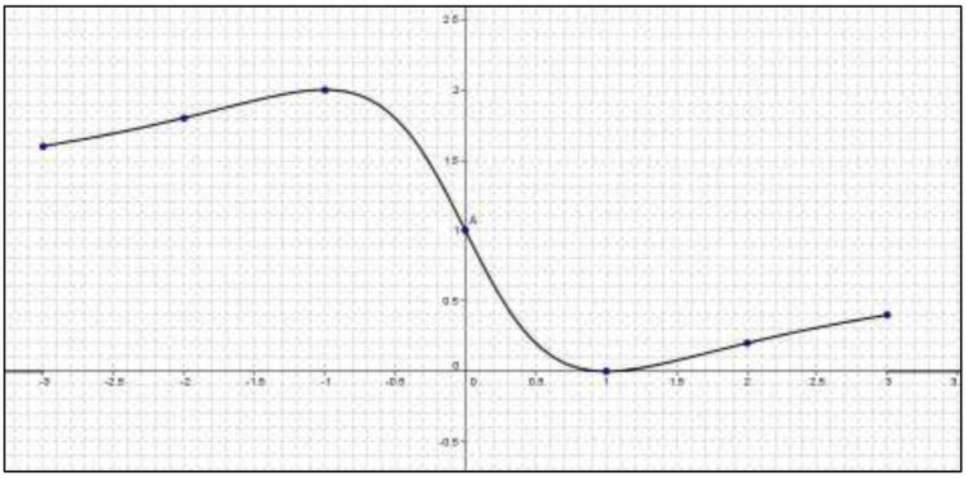
$$\boxed{0 \leq f(x) \leq 2}$$

المجموع	مجزأة	عناصر الإجابة
1	1	5) تبيان أن النقطة $A(0,1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

بتغيير المعلم من $(O,\vec{i},\vec{j})$ إلى $(A,\vec{i},\vec{j})$ يكون:

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y+1 \end{cases}$$

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
$$y=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$$
$$Y+1=\frac{X^2-2X+1}{X^2+1}$$
$$Y=\frac{X^2-2X+1}{X^2+1}-1$$
$$Y=\frac{\cancel{X^2}-2X\cancel{+1}\cancel{-X^2}\cancel{-1}}{X^2+1}$$
$$Y=\frac{-2X}{X^2+1}$$
نضع $g(x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}$
من أجل كل $x\in D_g$ فإن $-x\in D_g$
$$g(-x)=\frac{-2(-x)}{(-x)^2+1}$$
$$g(-x)=\frac{2x}{x^2+1}$$
$$g(-x)=-\frac{-2x}{x^2+1}$$
$$g(-x)=-g(x)$$
أي أن g دالة فردية .
ومن هذا نستنتج أن النقطة $A(0,1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>1</td>
<td>
6) حساب $f(1)$ ، $f(2)$ و $f(3)$:
$$f(1)=\frac{1^2-2\times1+1}{1^2+1}=\frac{0}{2}=0$$
$$f(2)=\frac{2^2-2\times2+1}{2^2+1}=\frac{1}{5}=0,2$$
$$f(3)=\frac{3^2-2\times3+1}{3^2+1}=\frac{4}{10}=0,4$$
نعلم أن $A(0,1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)
ومنه فإن $f(0-x)+f(0+x)=2(1)$
أي أن $f(-x)+f(x)=2$ نجد $f(x)=2-f(-x)$
$$f(-1)=2-f(1)=2-0=2$$
$$f(-1)=2-f(2)=2-0,2=1,8$$
$$f(-3)=2-f(3)=2-0,4=1,6$$
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

1	1	• رسم المنحنى (C_f) 	
1	1	7) المناقشة البيانية $f(x)=\frac{1}{m}$: بوضع $M=\frac{1}{m}$ تصبح $f(x)=M$ مع $M\in\mathbb{R}^*$ ▪ من أجل $M<0$ أي $\frac{1}{m}<0$ يكون $m<0$ المعادلة لا تقبل حلول. ▪ من أجل $0<M\leq 0,4$ أي $0<\frac{1}{m}\leq 0,4$ يكون $0<m\leq 2,5$ المعادلة تقبل حلين. ▪ من أجل $0,4<M<1,6$ أي $0,4<\frac{1}{m}<1,6$ يكون $0,625<m<2,5$ المعادلة تقبل حل وحيد. ▪ من أجل $1,6\leq M<2$ أي $1,6\leq\frac{1}{m}<2$ يكون $0,5<m\leq 0,625$ المعادلة تقبل حلين. ▪ من أجل $M=2$ أي $\frac{1}{m}=2$ يكون $m=\frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حل وحيد. ▪ من أجل $M>2$ أي $\frac{1}{m}>2$ يكون $0<m<0,5$ المعادلة لا تقبل حلول.	
1	1	I. 1) بقراءة بيانية نجد: $f(1)=0$ ، $f'(3)=0$ ، $f'(1)=\frac{1-0}{0-1}=-1$.	التمرين الثالث
0,75	0,75	2) معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ $y=-1(x-1)+0$ $\boxed{y=-x+1}$	

3) جدول تغيرات الدالة f :

x	-2		$-1,5$		3		6
$f(x)$	3	↗	3,5	↘	-1	↗	1,25

• استنتاج إشارة $f'(x)$:

x	-2		$-1,5$		3		6
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

1 — $0,5\times 2$

4) حل بيانيا المعادلة $f(x)=0$:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل، نجد $x=1$ و $x=5$.

0,5 — 0,5

II. $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

1) تفكيك الدالة g :

نضع $v(x)=f(x)$ و $u(x)=\dfrac{1}{x}$ تكون $g(x)=u\circ v(x)$.

• مجموعة تعريف الدالة g :

$$D_g=\{x/x\in D_v, v(x)\in D_u\}$$

$$D_g=\{x/x\in[-2,6], v(x)\in\mathbb{R}^*\}$$

$$D_g=\{x/x\in[-2,6], f(x)\neq 0\}$$

$$D_g=\{x/x\in[-2,6], x\neq 1, x\neq 5\}$$

$$\boxed{D_g=[-2,1[\cup]1,5[\cup]5,6]}$$

1 — $0,5\times 2$

1	1	2) دراسة اتجاه تغير الدالة g : الجدول التالي يمثل تغيرات الدالة g على كل مجال من مجموعة تعريفها	
0,5	0,5	3) كتابة عبارة $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$: g دالة قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها $$g'(x)=\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$	
1,5	$0,5\times 3$	4) دراسة إشارة $g'(x)$ و استنتاج تغيرات الدالة g :	

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الجدول التالي يمثل تغيرات الدالة g على كل مجال من مجموعة تعريفها

على المجال	الدالة f	الدالة مقلوب	الدالة g
$[-2,-1,5]$	متزايدة	متناقصة على مجال تعريفها	متناقصة
$[-1,5,1[$	متناقصة		متزايدة
$]1,3]$	متناقصة		متزايدة
$[3,5[$	متزايدة		متناقصة
$]5,6]$	متزايدة		متناقصة

3) كتابة عبارة $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$:

g دالة قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها

$$g'(x)=\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$

4) دراسة إشارة $g'(x)$ و استنتاج تغيرات الدالة g :

- لدينا $g'(x)=\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$ إشارة $g'(x)$ من إشارة $-f'(x)$

x	-2		$-1,5$		1		3		5		6
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+		+	
$g'(x)$		-	0	+	‖	+	0	-	‖	-	

- استنتاج تغيرات الدالة g :

على المجالات $[-2,-1,5]$ ، $[3,5[$ و $]5,6]$ $g'(x)$ سالبة ومنه g متناقصة.

وعلى المجالين $[-1,5,1[$ و $]1,3]$ $g'(x)$ موجبة ومنه g متزايدة.

- النتيجة المتحصلة عليها متطابقة مع نتيجة السؤال 2 .

5) جدول تغيرات الدالة g :

x	-2		$-1,5$		1		3		5	6
$g'(x)$		-	0	+	||	+	0	-	||	-
$g(x)$		↘	0,29	↗	||	↗	-1	↘	||	↘ 0,8

0,75 — 0,75

سؤال إضافي — 1 — 1

لدينا $f(x)=x^2+2x$ و $(f\circ g)(x)=4x^2+16x+15$.

g دالة تآلفية معناه $g(x)=ax+b$ (مع $a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R}$)

يكون:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

$$(f\circ g)(x)=g(x)^2+2g(x)$$

$$(f\circ g)(x)=(ax+b)^2+2(ax+b)$$

$$(f\circ g)(x)=a^2x^2+b^2+2axb+2ax+2b$$

$$(f\circ g)(x)=a^2x^2+2axb+2ax+b^2+2b$$

$$(f\circ g)(x)=a^2x^2+(2ab+2a)x+(b^2+2b)$$

بالمطابقة مع $(f\circ g)(x)=4x^2+16x+15$ نجد :

$$\begin{cases} a^2=4 \ldots\ldots (1) \\ 2ab+2a=16 \ldots\ldots (2) \\ b^2+2b=15 \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

من (1) نجد $a=2$ أو $a=-2$

نعوض $a=2$ في (2) نجد $b=3$ ، نعوض $a=-2$ في (2) نجد $b=-5$.

من (3) نجد أيضا $b=3$ و $b=-5$.

ومنه إما $\boxed{g(x)=2x+3}$ أو $\boxed{g(x)=-2x-5}$