مؤسسة التربية و التعليم الخاصة
أوبينياتر
ابتدائي متوسط ثانوي اقامة
Email: saitameur3@gmail.com 023 71 54 67 :فاكس 023 71 54 63 / 0550 47 22 35 :رقم الهاتف

المستوى: الثانية ثانوي رياضيات	ماي 2022
اختبار الفصل الثالث في مادة الرياضيات	/ المدة :ساعتين

التمرين 1

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \end{cases}$$

(v_n) و (w_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \text{ و } v_n = u_{n+1} - u_n$$

اجب بصحيح او خطأ مع التبرير :

1) المتتالية (v_n) هندسية .

2) المتتالية (w_n) ثابتة.

3) من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$

4) المتتالية (u_n) متباعدة.

التمرين 2

لتكن الدالة f المعرفة على $]-2; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

(الشكل في الوثيقة المرفقة)

I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1) مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ،u_2 و u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء) .

2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(II نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

1) برهن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ماذا تستنتج ؟

4) احسب المجموع S_n بدلالة n: $S_n = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + \cdots + \frac{1}{u_n - 1}$

التمرين 3

(I (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 2 \end{cases}$$

حيث من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n \geq 3$.

1) احسب u_1 ،u_2 و u_3 ماذا تخمن بالنسبة لإتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{3}(u_n - 3)$

3) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(II نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

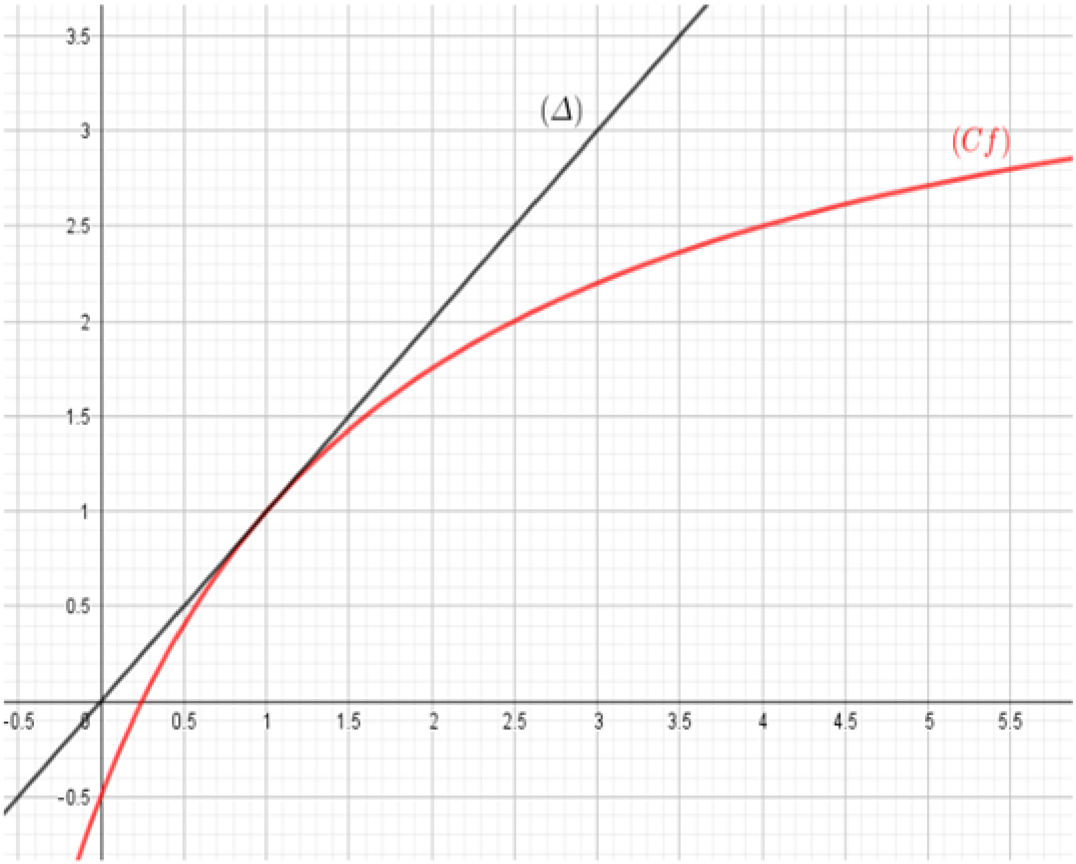
1) عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2) نضع $\alpha = -3$

ا) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ب) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. ماذا تستنتج ؟

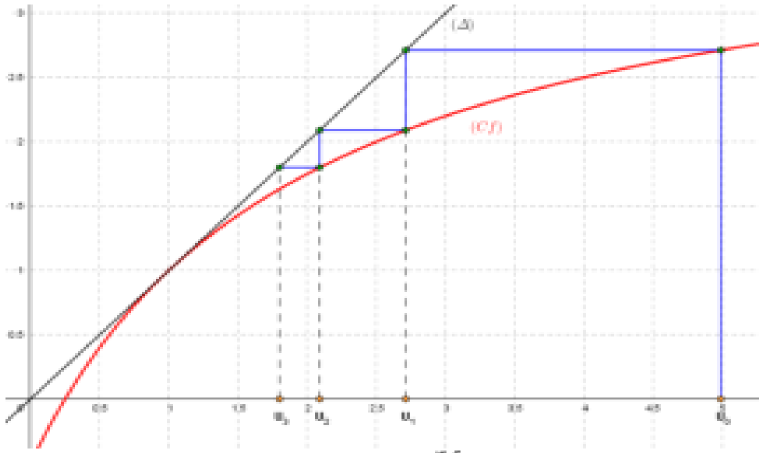
ج) احسب الجداء: $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$



-الوثيقة المرفقة-

التصحيح النموذجي

<table>
<tr><th>رقم التمرين</th><th>الحل</th><th>التنقيط</th></tr>
<tr><td>التمرين الأول</td><td>
1) المتتالية (V_n) هندسية. صحيح
التبرير:
$$V_{n+1}=U_{n+2}-U_{n+1}=\frac{1}{3}U_{n+1}+\frac{2}{3}U_n-U_{n+1}=-\frac{2}{3}U_{n+1}+\frac{2}{3}U_n=-\frac{2}{3}(U_{n+1}-U_n)=-\frac{2}{3}V_n$$
ومنه المتتالية (V_n) هندسية أساسها $q=-\frac{2}{3}$.
2) المتتالية (W_n) ثابتة. صحيح
التبرير:
$$W_{n+1}=U_{n+2}+\frac{2}{3}U_{n+1}=\frac{1}{3}U_{n+1}+\frac{2}{3}U_n+\frac{2}{3}U_{n+1}=U_{n+1}+\frac{2}{3}U_n=W_n$$
3) من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن: $U_n=\frac{3}{5}(W_n-V_n)$. صحيح
التبرير:
لدينا: $W_n-V_n=U_{n+1}+\frac{2}{3}U_n-(U_{n+1}-U_n)=\frac{5}{3}U_n$ ومنه $U_n=\frac{3}{5}(W_n-V_n)$.
4) المتتالية (U_n) متباعدة. خطأ
التبرير:
المتتالية (V_n) هندسية معناه $V_n=\underbrace{V_0}_{U_1-U_0=1}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ و (W_n) متتالية ثابتة: $W_n=W_0=U_1+\frac{2}{3}U_0=1$
ومنه: $U_n=\frac{3}{5}(W_n-V_n)=\frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$ وعليه $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{5}\left(1-\cancelto{0}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\right)=\frac{3}{5}$ ومنه المتتالية (U_n) متقاربة.
</td><td></td></tr>
</table>

التمرين الثاني	1) أ) الإنشاء :  ب) التخمين : نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متناقصة و تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ) . 1) (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 1/3$ و حدها الاول 1/4 ب) *) عبارة v_n بدلالة n : $v_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}$. *) عبارة u_n بدلالة n : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ ، أي : $u_n - 1 = \frac{1}{v_n}$ ، أي : $u_n = \frac{1}{v_n} + 1$. و منه : $u_n = \frac{1}{\frac{1}{3}n + \frac{1}{4}} + 1$. ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) : $$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{\frac{1}{3}n + \frac{1}{4}} + 1 \right] = 1$$ 4) حساب المجموع S_1 بدلالة n: $S_1 = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + \cdots + \frac{1}{u_n - 1}$ $S_1 = \frac{n(n+1)}{6} + \frac{n+1}{4}$	

1. حساب u_1، u_2 و u_3.

$u_1=\frac{1}{3}u_0+2=\frac{1}{3}\times6+2=4$ ، $u_2=\frac{1}{3}u_1+2=\frac{1}{3}\times4+2=\frac{10}{3}$ ، $u_3=\frac{1}{3}u_2+2=\frac{1}{3}\times\frac{10}{3}+2=\frac{28}{9}$.

التخمين بالنسبة لاتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

لدينا $u_0>u_1>u_2>u_3$ يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة.

2) التحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\frac{-2}{3}(u_n-3)$

3) اتجاه تغير المتتالية (u_n): متناقصة

التمرين 3

1) عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

$$v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha=\frac{1}{3}u_n+2+\alpha$$
$$=\frac{1}{3}(v_n-\alpha)+2+\alpha$$
$$=\frac{1}{3}v_n+2+\frac{2}{3}\alpha$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ إذا وفقط إذا كان $2+\frac{2}{3}\alpha=0$ أي $\alpha=-3$.

فيكون حدها الأول $v_0=u_0-3=6-3=3$.

ب ـ كتابة v_n بدلالة n،

$$v_n=v_0\left(\frac{1}{3}\right)^n=3\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

استنتاج كتابة u_n بدلالة n .

$$u_n=v_n+3=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3.$$

أُحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$

لدينا $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3\right)=3$.

	و منه المتتالية متقاربة . ج) حساب الجداء: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ $P_n = 3^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$	