

إختبار الثلاثي الثالث في مادة الرياضيات

09 نشاط

التمرين الأول

كل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، التمثيل البياني للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ ، والمستقيم ذي المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل (الوثيقة المرفقة).

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n}$

1- مثل بيانيا على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها)

2- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

3- بين أن: $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) إذا علمت أن: $u_n > 1$

4- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 1 ثم احسب حدها الأول v_0

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n = \frac{1}{n+1} + 1$ ، استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ج- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

11 تخطيط

التمرين الثاني

كل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، نعتبر النقط $A(3, -1)$ ، $B(2, -4)$ و $C(1, 0)$

و (C) مجموعة النقط $M(x, y)$ حيث: $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ والمستقيم $(D): 2x + y - \alpha = 0$

1- بين أن (C) دائرة يطلب تعيين مركزها ω و نصف قطرها r

2- جد قيمة α حتى تكون المسافة بين المستقيم (D) و مركز الدائرة هي $d(\omega, (D)) = 2\sqrt{5}$ ثم استنتج وضعية (D) بالنسبة إلى (C)

3- نضع $(\alpha = 5)$

أ- جد معادلة للمستقيم (T) مماس الدائرة (C) في النقطة B

ب- بين أن المستقيمين (T) و (D) متعامدان

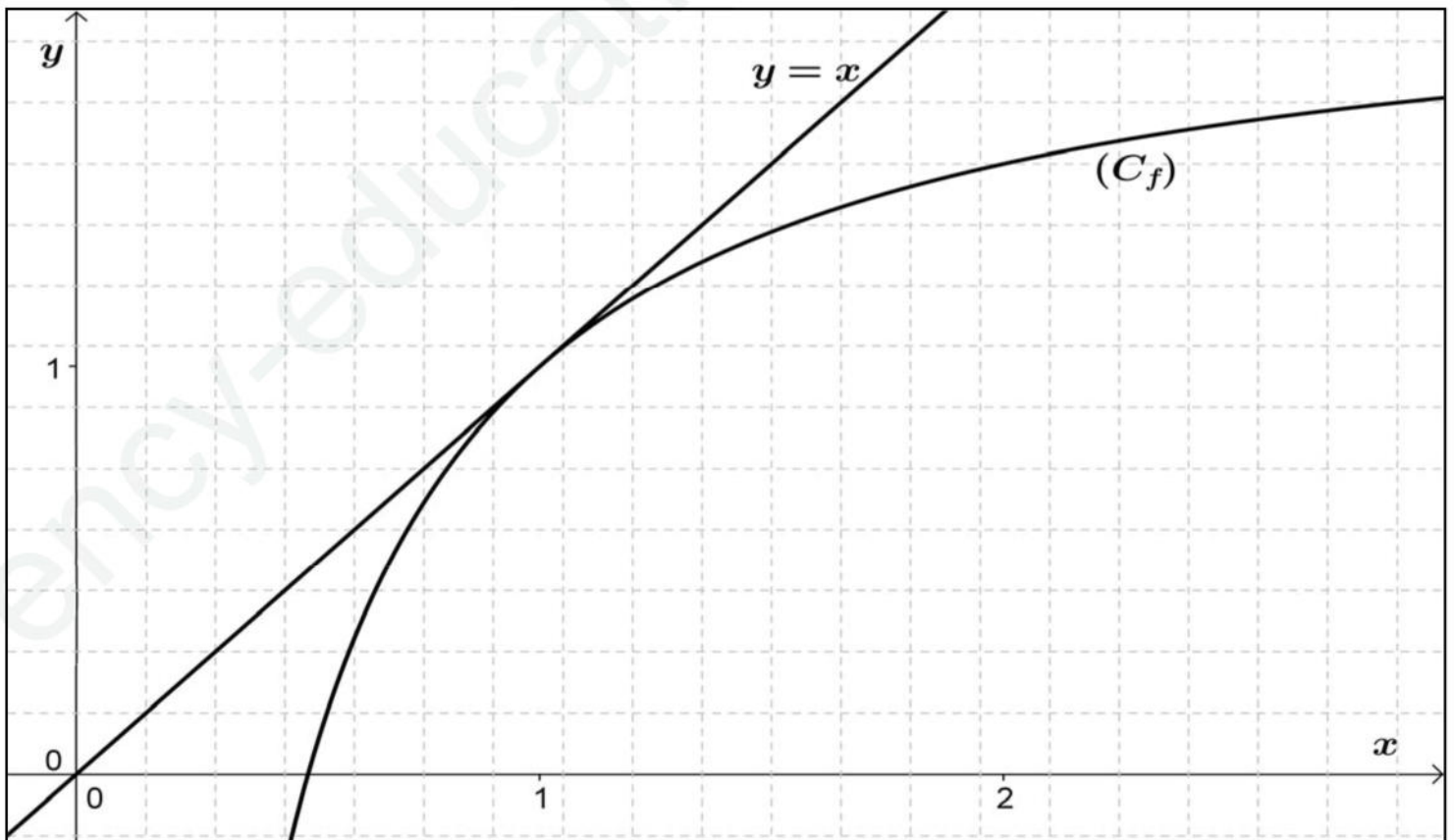
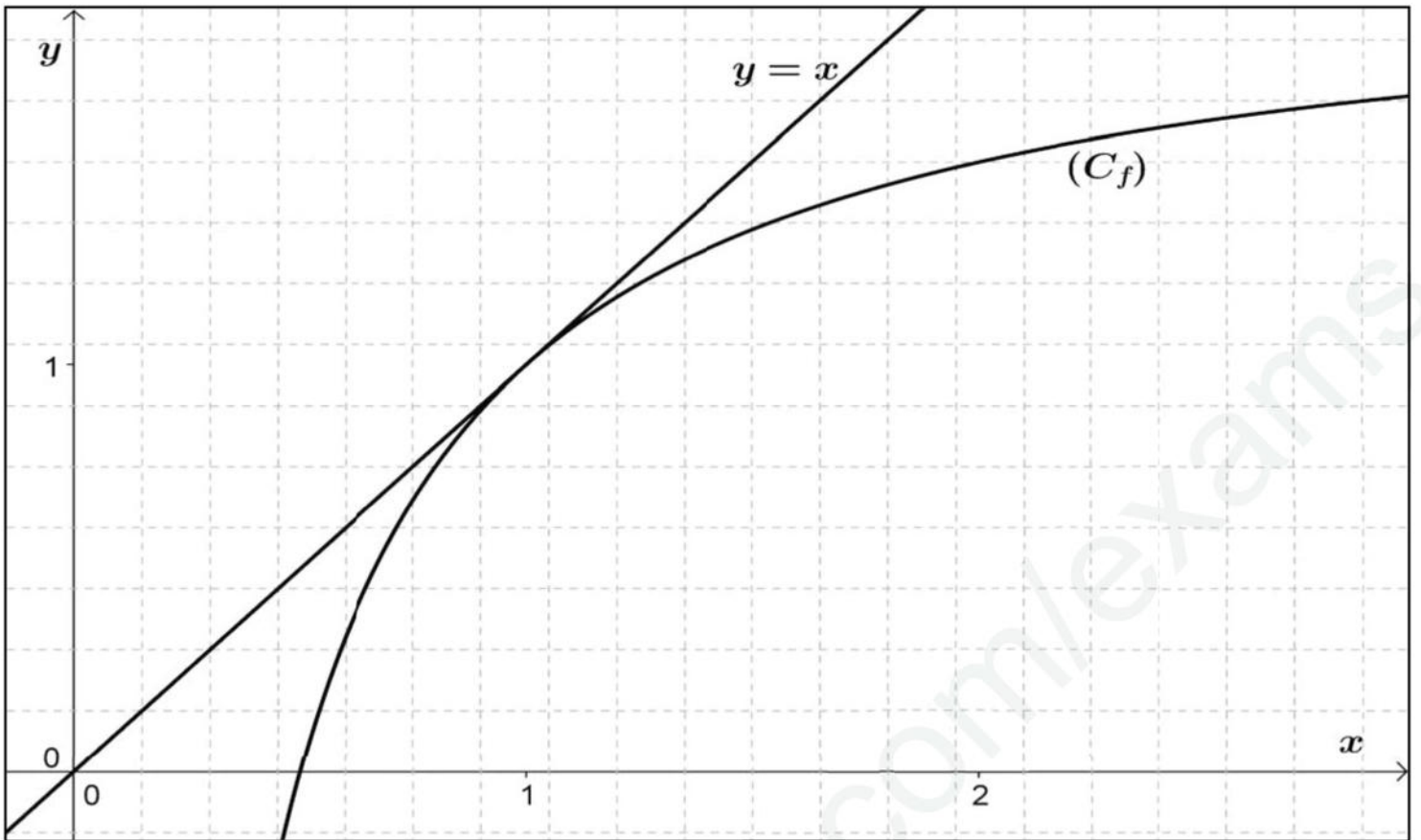
ج- بين أن $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 6$ ثم استنتج قياس الزاوية \widehat{BAC}

د- أحسب مساحة المثلث ABC

4- لتكن N نقطة من المستوي حيث: $\overline{AC} + 2\overline{NA} = \vec{0}$

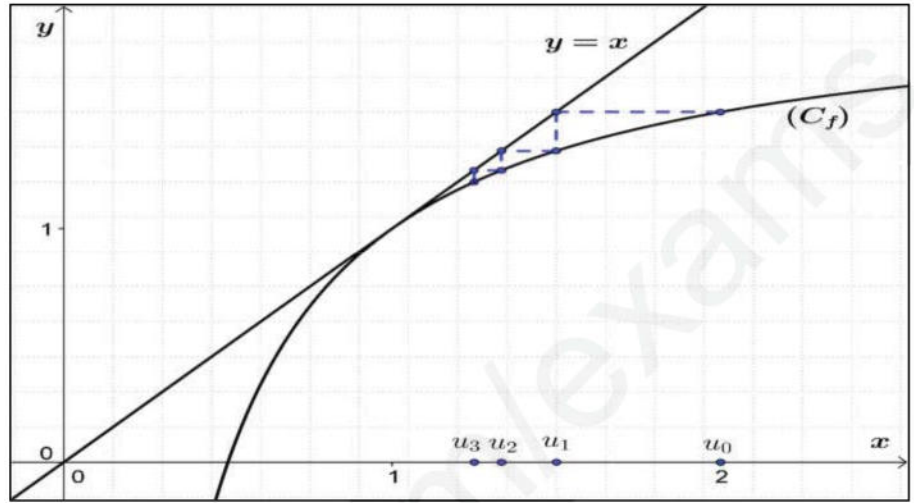
أ- جد نسبة التحاكي h الذي مركزه N ويحول A إلى C ؟ ماذا تستنتج

ب- عين مجموعة النقط M التي تحقق: $MA^2 + MC^2 = 3$



التمرين الأول

1- مثل بيانيا على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها)



2- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

من التمثيل البياني نلاحظ أن $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما. نلاحظ أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

3- بين أن: $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - 1}{u_n} - u_n = \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{u_n} = \frac{-(u_n^2 - 2u_n + 1)}{u_n} = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n}$$

لدينا $u_n > 1$ و $-(u_n - 1)^2 < 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة.

4- بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$$v_{n+1} - v_n = 3 + \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \left(3 + \frac{1}{u_n - 1}\right) = \cancel{3} + \frac{1}{u_n - 1} - \cancel{3} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = 1$$

ومنه (v_n) ممتتالية حسابية أساسها $r = 1$ وحدها الأول $v_0 = 4$ أي $v_0 = 3 + \frac{1}{u_0 - 1} = 3 + \frac{1}{2 - 1}$

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{n+1} + 1$ ، استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$v_n = 4 + n \text{ أي } v_n = v_0 + rn \quad *$$

$$* \text{ لدينا } v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1} \text{ أي } v_n - 3 = \frac{1}{u_n - 1} \text{ أي } u_n - 1 = \frac{1}{v_n - 3} \text{ أي } u_n = \frac{1}{v_n - 3} + 1$$

$$\text{أي } u_n = \frac{1}{(4+n) - 3} + 1 \text{ ومنه } u_n = \frac{1}{n+1} + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{+\infty} + 1 = 1 \quad *$$

ج- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$S_n = \frac{(n+1)}{2}(v_0 + 4 + n) = \frac{(n+1)(n+6)}{2}$$

التمرين الثاني

1- بين أن (C) دائرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها r

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \text{ أي } (C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \text{ ومنه } (C) \text{ دائرة مركزها } \omega(1, -2) \text{ ونصف قطرها } r = \sqrt{5}$$

2- جد قيمة α ثم استنتج وضعية (D) بالنسبة إلى (C)

$$\alpha = 10 \text{ ومنه } |\alpha| = 10 \text{ أي } \frac{|2(1) + (-2) - \alpha|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} = 2\sqrt{5} \text{ أي } d(\omega, (D)) = \frac{|2x_\omega + y_\omega - \alpha|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} = 2\sqrt{5} \quad *$$

$$d(\omega, (D)) = 2\sqrt{5} > r = \sqrt{5} \text{ بما أن } (D) \text{ فإن المستقيم } (D) \text{ يقع خارج الدائرة } (C) \quad *$$

3- أ- جد معادلة للمستقيم (T) مماس الدائرة (C) في النقطة B

$$(T) \text{ مماس الدائرة } (C) \text{ في النقطة } B \text{ معناه } \overline{\omega B} \perp (T) \text{ هو شعاع ناظمي للمستقيم } (T) \text{ أي } (T): x - 2y + c = 0$$

$$\text{بما أن } B \in (T) \text{ فإن } x_B - 2y_B + c = 0 \text{ أي } c = -10 \text{ ومنه } (T): x - 2y - 10 = 0$$

ب- بين أن المستقيمين (T) و (D) متعامدان

$$(T) \text{ و } (D) \text{ متعامدان معناه شعاع توجيههما } \vec{u}_T(2, 1) \text{ و } \vec{u}_D(-1, 2) \text{ متعامدان أي } (-1)(2) + (1)(2) = 0$$

ج- بين أن $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 6$ ثم استنتج قياس الزاوية $(\overline{CA}; \overline{CB})$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = (1)(2) + (-4)(-1) = 6 \text{ أي } \overline{CB}(1, -4) \text{ و } \overline{CA}(2, -1) \text{ لدينا } *$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \|\overline{CA}\| \times \|\overline{CB}\| \times \cos(\overline{CA}; \overline{CB}) = 6 \text{ أي } \cos(\overline{CA}; \overline{CB}) = \frac{6}{\sqrt{5} \times \sqrt{17}} \approx 0.65 \quad *$$

$$\text{أي } (\overline{CA}; \overline{CB}) = 49.4^\circ$$

د- أحسب مساحة المثلث ABC

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CA \times CB \times \sin \hat{C} \text{ أي } S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{5} \times \sqrt{17} \times \sin(49.4^\circ) \text{ ومنه } S_{ABC} = 3.5$$

4- أ- جد نسبة التحاكي h الذي مركزه N ويحول A إلى C

$$\overline{AC} + 2\overline{NA} = \overline{0} \text{ أي } (\overline{AN} + \overline{NC}) + 2\overline{NA} = \overline{0} \text{ أي } \overline{NC} = -\overline{NA} \text{ ومنه } C \text{ صورة } A \text{ بالتحاكي } h \text{ الذي مركزه } N$$

$$\text{ونسبته } k = -1 \text{ ومنه نستنتج ان } N \text{ منتصف } [AC]$$

ب- عين مجموعة النقط M التي تحقق: $MA^2 + MC^2 = 3$

$$\text{بما أن } N \text{ منتصف } [AC] \text{ فإنه حسب مبرهنة المتوسط } MA^2 + MC^2 = 2MN^2 + \frac{1}{2}AC^2 = 3 \text{ أي } MN^2 = \frac{1}{4} \text{ أي } MN = \frac{1}{2}$$

$$\text{ومنه مجموعة النقط } M \text{ هي دائرة مركزها } N \text{ ونصف قطرها } r = \frac{1}{2}$$