

## الفرض الأول للفصل الثالث في الرياضيات

المدة: ⌚ ساعة  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 3n}{2n^2 + 2019}$

المستوى: 02 رياضيات

مجموعة محوطة الرياضيات للتعليم بالجزائر

التمرين الأول:

تكن  $(u_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $u_1$  وأساسها  $q = 3$  حيث :  $u_1 \times 2u_2 \times u_3 = 432$

1. تأكد أن  $6^3 = 216$  ثم أحسب  $u_2$  ، إستنتج قيمة  $u_1$

2. أكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $u_1$

3. أحسب  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$   $T_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

4.  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم كمايلي :  

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n \end{cases}$$

• أحسب  $v_2$  ،  $v_3$  ،  $v_4$

5. نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم  $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

• بين أن  $(w_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها  $q$  وحدها الأول  $w_1$

• أكتب  $w_n$  بدلالة  $n$  ثم إستنتج  $v_n$  بدلالة  $n$

التمرين الثاني:

نعتبر  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  معلم متعامد و متجانس للمستوي

تكن  $(C)$  مجموعة النقط  $M(x, y)$  من المستوي بحيث :  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 13 - \alpha^2 = 0$  مع  $(\alpha \in \mathbb{R})$

• أدرس حسب قيم  $\alpha$  مجموعة النقط  $(C)$

• نضع  $\alpha = 4$

1. عين مركز  $\Omega$  و نصف قطر للدائرة  $(C)$

2. أدرس وضعية المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -x + 7$  بالنسبة للدائرة  $(C)$

3. عين إحداثيي النقطة  $B$  المسقط العمودي للنقطة  $\Omega$  على المستقيم  $(\Delta)$

4. تحقق أن  $d(\Omega; (\Delta)) = \Omega B$

5. أكتب معادلة المماس  $(T)$  للدائرة  $(C)$  عند النقطة  $A(-1; 4)$

الهدية : أوجد معادلة الدائرة تمر بالنقطتين  $A(0, 2)$  و  $B(-1, 0)$  و المستقيم ذو المعادلة  $x + y - 7 = 0$  مماس لها .

## تصحيح الفرض الأول للفصل الثالث في مادة الرياضيات

حل التمرين 1

لكن  $(u_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $u_1$  وأساسها  $q = 3$  حيث :  $u_1 \times 2u_2 \times u_3 = 432$

1 • حساب  $u_2$

لدينا:  $u_1 \times 2u_2 \times u_3 = 432$  تكافئ  $u_1 \times u_2 \times u_3 = 216$  تكافئ  $u_2^3 = 216$  ومنه  $u_2 = 6$

• حساب  $u_1$  :  $u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{3} = 2$

2 • كتابة عبارة حد العام لـ  $u_n$  :  $u_n = u_p \times q^{n-p} = u_1 \times q^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$

3 • حساب المجموع  $S_n$  والجداء  $T_n$

حساب  $S_n$  :  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = 2 \times \frac{1-3^{n+1}}{-2}$  تكافئ  $S_n = 3^n - 1$

حساب  $T_n$  :  $T_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = (u_1) \times (u_1 \times q) \times (u_1 \times q^2) \times \dots \times (u_1 \times q^{n-1})$

تكافئ  $T_n = \underbrace{(u_1 \times u_1 \times \dots \times u_1)}_{n \text{ مرة}} \times (q \times q^2 \times \dots \times q^{n-1})$

تكافئ  $T_n = u_1^n \times q^{1+2+\dots+n-1}$  تكافئ  $T_n = u_1^n \times q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4 • متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم كالتالي :  $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n \end{cases}$

• حساب  $v_2$  ،  $v_3$  ،  $v_4$

$$\bullet v_4 = \frac{3}{2}v_3 + u_3 = \frac{3}{2} \times \frac{27}{2} + 18 = \frac{153}{4}$$

$$\bullet v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{3}{2} \times 5 + 6 = \frac{27}{2}$$

$$\bullet v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = \frac{3}{2} \times 2 + 2 = 5$$

5 • نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم  $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

• تبين أن  $(w_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  وحدها الأول  $w_1$

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} \text{ تكافئ } w_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{\frac{3}{2}u_n} - \frac{2}{3} \text{ تكافئ } w_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3 \times u_n} - \frac{2}{3} \text{ تكافئ } w_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \right)$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n \text{ ومنه } w_n \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = \frac{2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

• كتابة  $w_n$  بدلالة  $n$

$$w_n = w_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

• إستنتاج  $v_n$  بدلالة  $n$

$$v_n = w_n \times u_n + \frac{2}{3} = \left( \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) (2 \times 3^{n-1}) + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \left( \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1} + 1 \right)$$

نعتبر  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  معلم متعامد و متجانس للمستوي  
تكن  $(C)$  مجموعة النقط  $M(x, y)$  من المستوي بحيث :  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 13 - \alpha^2 = 0$  مع  $(\alpha \in \mathbb{R})$

• دراسة حسب قيم  $\alpha$  مجموعة النقط  $(C)$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 13 - \alpha^2 = 0 \text{ تكافئ } (x-1)^2 + (y-2)^2 = \alpha^2 - 8$$

جدول إشارة  $\alpha^2 - 8$

$\alpha$	$-\infty$	$-\sqrt{8}$	$\sqrt{8}$	$+\infty$		
$\alpha^2 - 8$		+	0	-	0	+

- من أجل  $\alpha = \{-\sqrt{8}, \sqrt{8}\}$  مجموعة النقط  $(C)$  هي النقطة  $\Omega(1; 2)$
  - من أجل  $\alpha \in ]-\infty; -\sqrt{8}[ \cup ]\sqrt{8}; +\infty[$  مجموعة النقط  $(C)$  هي الدائرة التي مركزها  $\Omega(1; 2)$  ونصف قطرها  $r = \sqrt{\alpha^2 - 8}$
  - من أجل  $\alpha \in ]-\sqrt{8}; \sqrt{8}[$  مجموعة النقط  $(C)$  هي مجموع خالية
- نضع  $\alpha = 4$

$$(C) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{8}$$

1  $(C)$  هي الدائرة التي مركزها  $\Omega(1; 2)$  ونصف قطرها  $r = \sqrt{4^2 - 8} = \sqrt{8}$

2 دراسة وضعية المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -x + 7$  بالنسبة للدائرة  $(C)$

$$d(\Omega, \Delta) = \frac{|1+2-7|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{8} = r$$

3 تعيين إحداثيي النقطة  $B(x_B, y_B)$  المسقط العمودي للنقطة  $\Omega$  على المستقيم  $(\Delta)$

$$x_B + y_B - 7 = 0 \text{ ومنه } (\Delta)$$

$$\vec{\Omega B} \cdot \vec{u} = 0 \text{ حيث } \vec{u}(1, -1) \text{ شعاع توجيه ل } (\Delta), \text{ إذن } (x_B - 1) - (y_B - 2) = 0$$

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} x_B + y_B - 7 = 0 \\ x_B - y_B + 1 = 0 \end{cases} \text{ نجد } x = 3 \text{ و } y = 4 \text{ ومنه } B(3, 4)$$

4 التحقق أن  $d(\Omega; (\Delta)) = \Omega B$  :  $d(\Omega; (\Delta)) = \Omega B = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = d(\Omega; (\Delta))$

5 كتابة معادلة المماس  $(T)$  للدائرة  $(C)$  عند النقطة  $A(-1; 4)$

معادلة مماس  $(T)$  من شكل  $ax + by + c = 0$  حيث  $\vec{\Omega A}(-2, 2)$  شعاع ناظمي له إذن :  $(T) : -2x + 2y + c = 0$

$$(T) : -2x + 2y - 10 = 0 \text{ إذن } c = -10 \text{ ومنه } 2 + 8 + c = 0$$

إيجاد معادلة الدائرة تمر بالنقطتين  $E(-1,0)$  و  $A(0,2)$  والمستقيم ذو المعادلة  $x+y-7=0$  مماس لها .

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 4y_0 + 4 = r^2 & (1) \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 + 1 = r^2 & (2) \\ \frac{|x_0 + y_0 - 7|}{\sqrt{2}} = r \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} (x_0 - 0)^2 + (y_0 - 2)^2 = r^2 \\ (x_0 + 1)^2 + (y_0 - 0)^2 = r^2 \\ \frac{|x_0 + y_0 - 7|}{\sqrt{2}} = r \end{cases}$$

ليكن  $E(x_0, y_0)$  مركز الدائرة ومنه

$$(2) - (1) \quad \text{تكافئ} \quad 2x_0 + 4y_0 - 3 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad x_0 = -2y_0 + \frac{3}{2}$$

$$(-2y_0 + \frac{3}{2})^2 + y_0^2 - 4y_0 + 4 = \frac{(-2y_0 + \frac{3}{2} + y_0 - 7)^2}{2} \quad \text{في (1) نجد} \quad \frac{|x_0 + y_0 - 7|}{\sqrt{2}} = r \quad \text{و} \quad x_0 = -2y_0 + \frac{3}{2}$$

$$10y_0^2 - 20y_0 + \frac{25}{2} = y_0^2 + 11y_0 + \frac{121}{4} \quad \text{تكافئ} \quad 4y_0^2 + \frac{9}{4} - 6y_0 + y_0^2 - 4y_0 + 4 = \left(\frac{11}{2} + y_0\right)^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 40 \quad \Delta = 31^2 - 4 \times \frac{-71}{4} \times 9 = 1600 > 0 \quad \text{تكافئ} \quad 9y_0^2 - 31y_0 - \frac{71}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{115}{18}\right)^2 + \left(y - \frac{71}{18}\right)^2 = \left(\frac{170}{18\sqrt{2}}\right)^2 \quad r_1 = \frac{\left|\frac{71}{18} - \frac{115}{18} - 7\right|}{\sqrt{2}} = \frac{170}{18\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad x_0 = -\frac{71}{9} + \frac{3}{2} = \frac{-115}{18} \quad \text{و} \quad y_0 = \frac{31 + 40}{18} = \frac{71}{18}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \quad r_2 = \frac{\left|\frac{5}{2} - \frac{1}{2} - 7\right|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad x_0 = \frac{5}{2} \quad \text{و} \quad y_0 = \frac{31 - 40}{18} = -\frac{1}{2}$$

