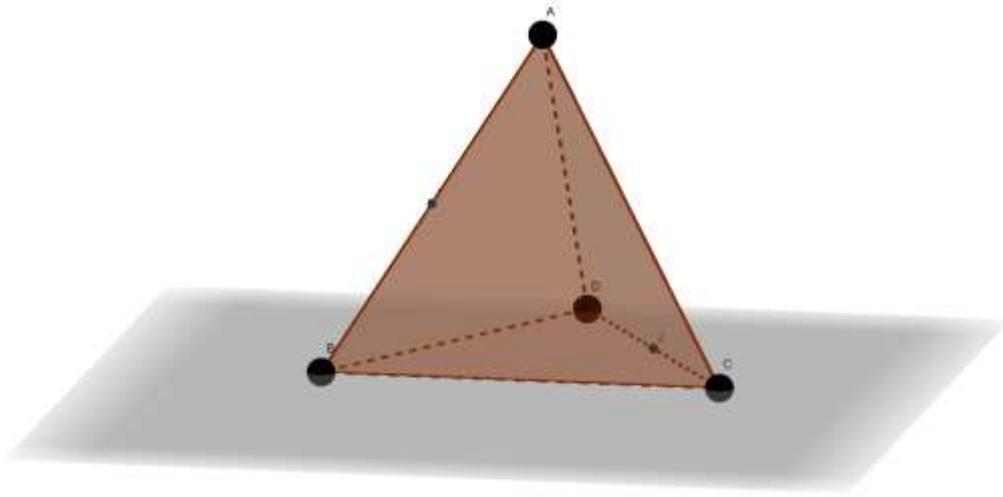


اختبار الثلاثي الثالث في مادة الرياضيات**التمرين الأول: (07 نقاط)**

أجب فقط على أحد الجزئين (I) أو (II) :

(I) نعتبر، في الفضاء، رباعي الوجوه المنتظم $ABCD$ كما هو موضح في الشكل أسفله.لتكن النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ و النقطة J منتصف القطعة $[CD]$. لتكن النقطتان E و F حيث يكون كلا من الرباعيين $IACE$ و $IBDF$ متوازي أضلاع.(1) باعتبار الفضاء مزودا بالمعلم $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BA})$ عين إحداثيات كلا من النقط I, J, E, F ثم تحقق أن النقطة J هي منتصف القطعة المستقيمة $[EF]$.(2) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}$ و \overrightarrow{CE} من نفس المستوي.

(3) تحقق من صحة النتائج السابقة دون توظيف المعلم السابق، أي بالاعتماد على قواعد الحساب الشعاعي في الفضاء.

(II) لتكن النقط $A(7;7;3)$ ، $B(-5;-1;11)$ ، $C(1;-7;-5)$ ، $D(1;4;3-5\sqrt{3})$ و $E(2;6;14)$ في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.(1) أحسب إحداثيات كلا من الأشعة \overrightarrow{AB} ، \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{BC} . هل الأشعة \overrightarrow{AB} ، \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{BC} من نفس المستوي؟(2) تحقق أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى سطح الكرة (S) التي مركزها $\Omega(1;-1;3)$ و نصف قطرها R يطلب حسابه.

- (3) أستنتج معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) .
 (4) أكتب معادلات المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة E و $\vec{u} = \overline{AB} + \overline{AC}$ شعاع توجيه له، أو تمثيلا وسيطيا له.

التمرين الثاني: (09 نقاط)

المستوي مزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. تعطى الوحدة بال: cm و لدينا: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

لتكن $A(2;1)$ ، $B(5;-1)$ و $C(8;3)$ ثلاثة نقط من المستوي و لتكن النقطة H منتصف القطعة المستقيمة [AC] .

1 - علم النقط A ، B ، C و H ثم أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و $\vec{v}(3;-2)$ شعاع ناظمي له.

2 - لتكن (γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث: $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$

(أ) أثبت أن (γ) هي دائرة مركزها B و نصف قطرها r يطلب حسابه.

(ب) أرسم المستقيم (Δ) و الدائرة (γ) .

(ت) تحقق حسابيا أن $A \in (\gamma)$ ثم حدد بدقة قيمة $d(B, (\Delta))$ المسافة بين النقطة B و المستقيم (Δ) .

(ث) استنتج الوضعية النسبية لكل من المستقيم (Δ) والدائرة (γ) .

3 - أحسب الجداء السلمي $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$ بطريقتين و استنتج قيمة مقربة بالدرجات لقيس الزاوية \widehat{ABC} .

4 - أحسب الطول BH بطريقتين مختلفتين .

5 - حدد طبيعة و عناصر مجموعة النقط N من المستوي و التي تحقق: $NA^2 + NC^2 = 21$

6 - حدد طبيعة و عناصر مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\overline{MA} \cdot \overline{MC} = 0$ و أكتب معادلة ديكارتية لها.

7 - ليكن h التحاكي الذي مركزه $O(0;0)$ و نسبته $-\frac{1}{2}$. نسمي (γ') و (Δ') صورتا (γ) و (Δ) على الترتيب بالتحاكي h .

(أ) عين احداثي كل نقطة من النقط A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتحاكي h .

(ب) استنتج معادلة ديكارتية لكل من الدائرة (γ') و المستقيم (Δ') .

(ت) استنتج طول محيط و مساحة كل من الدائرة (γ') و المثلث A'B'C' .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} المعادلة: $x^2 - 3x + 2 = 0$ ثم استنتج حلول المعادلة: $\cos(2\theta) - 6\cos\theta + 5 = 0$

علما أن: θ عدد حقيقي من المجال $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

(2) إذا علمت أن: $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ أحسب: $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ بطريقتين.

الأستاذ: مراحي لزهر

عطلة سعيدة لأبنائنا الأعزاء، رمضان كريم و بالتوفيق للجميع.

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
07		التمرين الأول: (07 نقاط)
		(I)
	02	1) تعيين إحداثيات كلا من النقط I, J, E و F في المعلم $(B; \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BA})$
		$F(0; 1; \frac{1}{2}), E(1; 0; -\frac{1}{2}), J(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0), I(0; 0; \frac{1}{2})$
	00.50	نتحقق بسهولة أن: $\frac{z_E + z_F}{2} = z_J$ و $\frac{y_E + y_F}{2} = y_J, \frac{x_E + x_F}{2} = x_J$
		إذن النقطة J هي منتصف القطعة المستقيمة $[EF]$
		2) إثبات أن الأشعة $\overline{DA}, \overline{DB}$ و \overline{CE} من نفس المستوي.
	00.50	يكفي إيجاد عددين حقيقيين α و β حيث يكون: $\overline{DA} = \alpha \overline{DB} + \beta \overline{CE}$
	01.50	لدينا: $\overline{DA}(0; -1; 1), \overline{DB}(0; -1; 0)$ و $\overline{CE}(0; 0; -\frac{1}{2})$
	00.50	نجد: $(\alpha; \beta) = (1; -2)$ و منه: $\overline{DA} = \overline{DB} - 2\overline{CE}$
	بحل الجملة: $\begin{cases} 0\alpha + 0\beta = 0 \\ -1\alpha + 0\beta = -1 \\ 0\alpha - 0.5\beta = 1 \end{cases}$	
	3) التحقق أن صحة النتائج بالحساب الشعاعي:	
01 $\overline{BJ} = \frac{1}{2}\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{BD} + 0\overline{BA}, \overline{BI} = 0\overline{BC} + 0\overline{BD} + \frac{1}{2}\overline{BA}$	
	$\overline{BF} = 0\overline{BC} + 1\overline{BD} + \frac{1}{2}\overline{BA}, \overline{BE} = 1\overline{BC} + 0\overline{BD} - \frac{1}{2}\overline{BA}$	
00.50 $\overline{JE} + \overline{JF} = \overline{BE} - \overline{BJ} + \overline{BF} - \overline{BJ} = \overline{BE} + \overline{BF} - 2\overline{BJ} = \vec{0}$	
00.50 $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AB}$ و منه: $\overline{DA} = \overline{DB} - \overline{AB} = \overline{DB} - 2\overline{AI} = \overline{DB} - 2\overline{CE}$	
	(II)	
	1) حساب إحداثيات كلا من الأشعة $\overline{AB}, \overline{AC}$ و \overline{BC} و التحقق فيما إذا كانت الأشعة	
	$\overline{AB}, \overline{AC}$ و $\vec{w}(-6; -14; -8)$ من نفس المستوي ؟	
01 $\vec{w}(-6; -14; -8), \overline{BC}(6; -6; -16), \overline{AC}(-6; -14; -8), \overline{AB}(-12; -8; 8)$	

لنبحث عن عددين حقيقيين α و β بحيث يكون: $\vec{w} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$ أي:

01 $(\alpha; \beta) = (0; 1)$ و منه: $\begin{cases} 2\alpha + \beta = 1 \\ 4\alpha + 7\beta = 7 \\ \alpha - \beta = -1 \end{cases}$ و منه: $\begin{cases} -12\alpha - 6\beta = -6 \\ -8\alpha - 14\beta = -14 \\ 8\alpha - 8\beta = -8 \end{cases}$

و منه الأشعة \vec{AB} ، \vec{AC} و \vec{BC} من نفس المستوي.

(2) التحقق أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى سطح الكرة (S) التي مركزها $\Omega(1; -1; 3)$ و نصف قطرها R يطلب حسابه:

02.00 $R = 10$ و منه: $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = 10$

(3) استنتج معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) :

00.50 $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 10^2$

01.00 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z - 89 = 0$

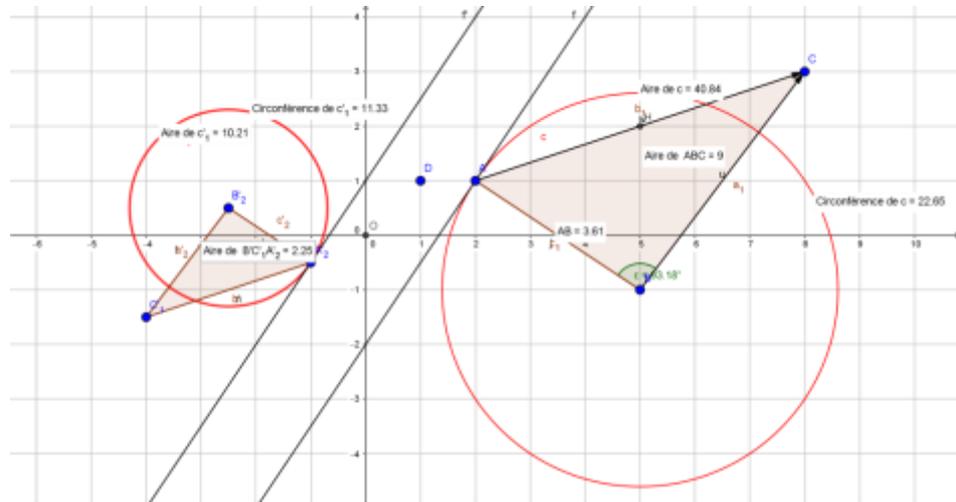
(4) كتابة معادلات المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة E و $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$ شعاع توجيه له، أو تمثيلاً وسيطياً له:

01.50 $t \in \mathbb{R}$ حيث $(\Delta): \begin{cases} x = 2 - 18t \\ y = 6 - 22t \\ z = 14 + 0t \end{cases}$ إذن: $\vec{u}(-18; -22; 0)$ و $E(2; 6; 14)$

التمرين الثاني: (09 نقاط)

1 - تعليم النقط A ، B ، C و H ثم كتابة معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة

00.50 A و $\vec{v}(3; -2)$ شعاع ناظمي له.....



00.50 $(\Delta): 3x - 2y - 4 = 0$ إذن $c = -4$ و منه $(\Delta): 3x_A - 2y_A + c = 0$ 2 - لتكن (γ) مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي حيث: $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$ أ) اثبات أن (γ) هي دائرة مركزها B و نصف قطرها r يطلب حسابه: لدينا: $L = \frac{(-10)^2 + (2)^2 - 4(13)}{4} = 13$ و منه (γ) دائرة مركزها: $\omega\left(-\frac{(-10)}{2}; -\frac{2}{2}\right)$ أي: $\omega(5; -1)$
00.50 و منه: $\omega = B$ و نصف قطرها: $r = \sqrt{L} = \sqrt{13}$
00.25 (ب) رسم المستقيم (Δ) و الدائرة (γ) : ت) التحقق حسابيا أن $A \in (\gamma)$ ثم تحديد بدقة قيمة $d(B, (\Delta))$ المسافة بين النقطة B و والمستقيم (Δ)
00.25 لدينا: $x_A^2 + y_A^2 - 10x_A + 2y_A + 13 = 4 + 1 - 20 + 2 + 13 = 0$
00.50 $d(B; (\Delta)) = \frac{ 3x_B - 2y_B - 4 }{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} = r$
00.50 (ث) استنتاج الوضعية النسبية لكل من (Δ) و (γ) : بما أن $d(B; (\Delta)) = \sqrt{13} = r$ و $A \in (\Delta) \cap (\gamma)$ فإن: (Δ) مماس للدائرة (γ) في النقطة A
00.50 3 حساب الجداء السلمي $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ بطريقتين و استنتج قيمة مقربة بالدرجات لقيس الزاوية $\hat{A}BC$
00.50 لدينا: $\vec{BA}(-3; 2)$ و $\vec{BC}(3; 4)$ فإن: $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-3)(3) + (2)(4) = -1$
00.25 من جهة أخرى: $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = BA \times BC \times \cos \hat{A}BC = \sqrt{13} \times 5 \times \cos \hat{A}BC$
00.25 و منه: $\cos \hat{A}BC = \frac{-1}{5\sqrt{13}}$ و منه: $\hat{A}BC \approx 93.18$
00.25 4 - حساب الطول BH بطريقتين:
00.25 لدينا: $H\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ و منه: $H(5; 2)$ و لدينا: $B(5; -1)$ إذن: $BH = 3$
00.25 من جهة أخرى: حسب مبرهنة المتوسط لدينا: $BA^2 + BC^2 = 2BH^2 + \frac{1}{2}AC^2$
00.50 و منه: $\sqrt{13}^2 + 5^2 = 2BH^2 + \frac{1}{2}(2\sqrt{10})^2$ و منه $BH^2 = 9$ و بالتالي: $BH = 3$
00.50 5 تحديد طبيعة و عناصر مجموعة النقط N من المستوي علما ان: $NA^2 + NC^2 = 21$
00.25 حسب مبرهنة المتوسط لدينا: $2NH^2 + \frac{1}{2}AC^2 = 21$ و منه: $2NH^2 + \frac{1}{2}(2\sqrt{10})^2 = 21$
00.25 و هكذا: $NH^2 = \frac{21}{2} - 10 = \frac{1}{2}$ و منه: $NH = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

00.25 مجموعة النقط N في هذه الحالة هي دائرة مركزها H و نصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2}$
00.25	6 مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ هي الدائرة التي قطرها $[AC]$
00.25	بتطبيق العبارة التحليلية للجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AM}(x-2; y-1)$ و $\overrightarrow{CM}(x-8; y-3)$ نجد: $(x-2)(x-8) + (y-1)(y-3) = 0$ أي أن: $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$
00.25	7 ثيكن h التحاكي الذي مركزه $O(0;0)$ و نسبته $-\frac{1}{2}$. نسمي (γ') و (Δ') صورتَي (γ) و (Δ) على الترتيب بالتحاكي h .
00.25	أ) تعيين احداثيي كل نقطة من النقط A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتحاكي h .
00.25 $A' = h(A)$ معناه: $\overrightarrow{OA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ و بالتالي: $A'(-1; -\frac{1}{2})$
00.25 $B' = h(B)$ معناه: $\overrightarrow{OB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ و بالتالي: $B'(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2})$
00.25 $C' = h(C)$ معناه: $\overrightarrow{OC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ و بالتالي: $C'(-4; -\frac{3}{2})$
00.50	ب) استنتاج معادلة ديكارتية لكل من الدائرة (γ') و المستقيم (Δ') :
00.25 (Δ') يشمل A' و يوازي (Δ) أي $\vec{v}(3; -2)$ هو أيضا ناظمي لـ: (Δ')
00.50 (Δ') : $3x_{A'} - 2y_{A'} + c' = 0$ ومنه: $c' = 2$ أي أن: (Δ') : $3x - 2y + 2 = 0$
00.50 ت) محيط (γ') هو: $2\pi\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right) = \pi\sqrt{13}(u; l)$ و مساحتها: $\pi\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 = \frac{13\pi}{4}(u; a)$

00.25 محيط المثلث $A'B'C'$ هو: $-\frac{1}{2} \times (5 + \sqrt{13} + 2\sqrt{10}) = \frac{5 + 2\sqrt{10} + \sqrt{13}}{2} (u;l)$
00.25 و مساحته هي: $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} BA \times BC \times \sin B \approx \frac{5\sqrt{13}}{8} \times \sin(93.18^\circ) \approx 2.25 (u;a)$
التمرين الثالث: (04 نقاط)	
00.25 (1) المعادلة: $x^2 - 3x + 2 = 0$ تقبل في \mathbb{R} حلين هما $x = 1$ أو $x = 2$
	$0 < \cos \theta \leq 1$ إذن: $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
00.25 حسب نتائج دساتير الجمع لدينا: $\cos(2\theta) = 2\cos^2 \theta - 1$
	إذن: المعادلة: $\cos(2\theta) - 6\cos \theta + 5 = 0$ تكافئ المعادلة: $(2\cos^2 \theta - 1) - 6\cos \theta + 5 = 0$
	إذن: $2\cos^2 \theta - 6\cos \theta + 4 = 0$
00.50 و منه: $\cos^2 \theta - 3\cos \theta + 2 = 0$
	بوضع: $x = \cos \theta$ نجد: $x^2 - 3x + 2 = 0$
00.25 إذن: $x = 1$ أو $x = 2$ أي: $\cos \theta = 1$ أو $\cos \theta = 2$
00.25 المعادلة: $\cos \theta = 2$ لا تقبل حلول لأنه من أجل كل θ من $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $0 < \cos \theta \leq 1$
00.25 المعادلة: $\cos \theta = 1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ و هو $\theta = 0$
00.25 إذن المعادلة: $\cos(2\theta) - 6\cos \theta + 5 = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ هو الصفر.....
	(2) حساب $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ بطريقتين:
00.50 الطريقة الأولى: لدينا: $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
	الطريقة الثانية: نعلم أن: $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ ، و بالتالي فإن:
00.50 $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left[2\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right] = 2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \times \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$
00.50 و لكن: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$
	و منه: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
00.25 و منه: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
00.25 بالتعويض في العلاقة: (\otimes) نجد: $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right) \times \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right) = 2\left(\frac{2-6}{16}\right) = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$
	من إعداد الأستاذ: مراحي لزهر