

2016/02/29

﴿ إخبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات ﴾

المدة: ساعتان

الأقسام: 2 علوم تجريبية:

التمرين الأول: (8 نقاط)

$$(I) \begin{cases} u_1 - u_4 = -6 \\ u_1 + u_5 = 28 \end{cases} \text{ متتالية حسابية حدها الأول } u_0 \text{ و أساسها } r \text{ بحيث :}$$

(1) عين أساس هذه المتتالية و حدها الأول .

(2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$(II) \text{ نعتبر المتتالية } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة بـ : } \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - 1 \end{cases}$$

(1) احسب : v_2, v_1 .(2) نعتبر المتتالية $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $w_n = v_n + 2$.أ- برهن أن (w_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .ب- أكتب عبارة w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة v_n بدلالة n .ت- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$ ث- استنتج عبارة S'_n بدلالة n حيث : $S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

التمرين الثاني: (12 نقطة)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} \text{ دالة عددية لمتغير حقيقي } x \text{ معرفة على } \mathbb{R} - \{-1; 3\} \text{ بالشكل :}$$

و ليكن (\mathcal{C}) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .(1) بين أنه مهما يكن $x \in \mathbb{R} - \{-1; 3\}$: $f(x) = 1 + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3}$ حيث b, c عدنان حقيقيان ثابتان

يطلب تعيينهما.

(2) أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.(3) بين أن المنحني (\mathcal{C}) يقبل ثلاث مستقيمت مقاربة يطلب تعيين معادلاتها.(4) عين نقط تقاطع المنحني (\mathcal{C}) مع محوري الإحداثيات.(5) بين أنه مهما يكن $x \in D_f$ و $2-x \in D_f$ فإن : $f(2-x) = f(x)$ (6) أكتب معادلة المماس (D) للمنحني (\mathcal{C}) في النقطة التي فاصلتها 2.(7) أنشئ (\mathcal{C}) و (D).(8) عين بيانيا عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = 6$.

$$w_{n+1} = v_{n+1} + 2$$

$$= \frac{1}{2}v_n - 1 + 2$$

$$= \frac{1}{2}v_n + 1 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}(v_n + 2) = \frac{1}{2}w_n$$

وهذه (w_n) هي متتالية هندسية

ألسلسا $q = \frac{1}{2}$ و $v_0 = 8$

$$w_0 = v_0 + 2 = 8$$

ب/ عبارة الكمال العام w_n

$$w_n = w_0 \cdot q^n$$

$$= 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (2)$$

استنتاج عبارة v_n

$$v_n = w_n - 2$$

$$v_n = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \quad (3)$$

ج/ حساب المجموع S_n

$$S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$$

$$= w_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_n = 16 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \quad (4)$$

ث/ استنتاج عبارة S'_n

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$= (w_0 - 2) + (w_1 - 2) + \dots + (w_n - 2)$$

$$= w_0 + w_1 + \dots + w_n - 2(n+1)$$

$$= 16 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 2(n+1) \quad (5)$$

التمرين الثاني

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$$

أ/ برهان أنه متساوية $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$

$$f(x) = 1 + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3}$$

التمرين الأول:

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية حيث

$$\begin{cases} u_1 - u_4 = -6 \\ u_1 + u_5 = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 + r - (u_0 + 4r) = -6 \\ u_0 + r + u_0 + 5r = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3r = -6 \\ 2u_0 + 6r = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3r = -6 \\ 2u_0 + 6r = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3r = -6 \\ 2u_0 + 6r = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 2 \\ 2u_0 + 6r = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 2 \\ u_0 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 2 \\ u_0 = 8 \end{cases}$$

كتابة عبارة الكمال العام

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = 8 + 2n \quad (1)$$

ج/ حساب المجموع

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$= \frac{n+1}{2}(8 + 8 + 2n)$$

$$S_n = (n+1)(8+n) \quad (2)$$

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - 1 \end{cases}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - 1$$

$$v_1 = \frac{1}{2}v_0 - 1 = 2 \quad (3)$$

$$v_2 = \frac{1}{2}v_1 - 1 = 0$$

ب/ تعبر المتتالية (w_n) المعرفة بـ

$$w_n = v_n + 2$$

أ/ برهان أن (w_n) هي متتالية

هندسية

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$
 فنحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ونجد أنه ∞ (0,5)
 فنحسب $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ونجد أنه ∞ (0,5)

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-3) + b(x-3) + c(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2 + x - 3x - 3 + bx - 3b + cx + c}{x^2 - 2x - 3}$$

$$= \frac{x^2 + (b+c-2)x + c - 3b - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} b+c-2 = -2 \\ c-3b-3 = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c = 0 \\ c-3b = -12 \end{cases}$$

نجد $b=3$ و $c=-3$ (1)

(4) المقاطع مع المحاور:
 مع محور التوازي: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Delta = 64, x_1 = -3, x_2 = 5$
 (C) $\cap (xx) = \{A(-3, 0), B(5, 0)\}$ (0,5)

(5) برهان أن $f(x) = f(2-x)$
 $f(0) = 5$ و $f(2) = 5$ (0,5)

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-3}$$

$$f(2-x) = 1 + \frac{3}{2-x+1} - \frac{3}{2-x-3}$$

$$= 1 + \frac{3}{-x+3} - \frac{3}{-x-1}$$

$$= 1 - \frac{3}{x-3} + \frac{3}{x+1} = f(x) \quad (1)$$

(6) كتابة معادلات المماس في النقطة $x=1$
 فاصليها 2: $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$$y = \frac{8}{3}(x-2) + 5$$

$$y = \frac{8}{3}x - \frac{1}{3} \quad (1)$$

نحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 + \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-3}$
 نحسب $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1 + \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-3}$

$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 3[\cup]3, +\infty[$
 النهاية C (0,5): $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x^2} = 1$ (0,25)
 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x^2} = 1$ (0,25)

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$ (0,25)
 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = +\infty$ (0,25)

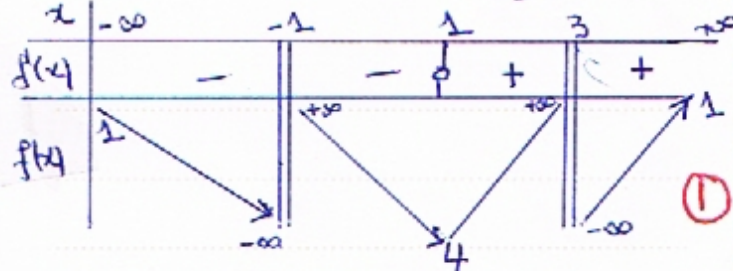
$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ (0,25)
 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ (0,25)

المماس: $f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x-3) - (2x-2)(x^2-2x-15)}{(x^2-2x-3)^2}$
 $= \frac{(2x-2)(12)}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{24x-24}{(x^2-2x-3)^2} \quad (1)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $24x-24$ (0,5)

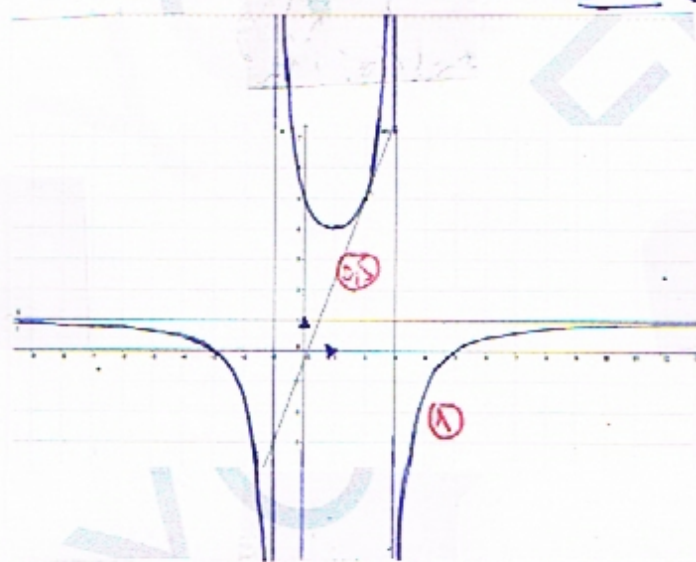
جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
العلامة	-	-	+	+	+



(3) المنحنيات المقابلة:
 لدينا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ (0,5)

معنى معادله $y=1$ هو $\pm\infty$ (0,5)



8) العيسن البياي لعددوا إشارة حلول المعادلة $f(x) = 6$ حلول هذه المعادلة هي فواصل تقاطع المذني مع المستقيم $y = 6$ اذن : المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة. (5)