

اختبار دورة جـوان الاستدراكية في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (07 نقاط)

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_0 = -1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

(1) أحسب الفرق: $u_{n+1} - u_n$ بدلالة u_n

(2) إذا علمت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$ ، استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة تماما على \mathbb{N}

(3) لتكن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كما يلي: $v_n = -u_n + 3$

أ - بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q وحدها الأول v_0

ب - أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

ت - أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$ ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$

ث - أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ثم استنتج المجموع: $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ بدلالة n

التمرين الثاني: (05 نقاط)

المستوي مزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. تعطى الوحدة بالـ: cm و لدينا: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$

نعتبر (Γ) الدائرة التي مركزها $\Omega(5; -2)$ و نصف قطرها $R=5$

(1) أكتب معادلة ديكارتية للدائرة (Γ) ثم تحقق أن النقطة $A(2; 2)$ تنتمي إلى هذه الدائرة.

(2) أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) ، مماس الدائرة (Γ) عند النقطة A

(3) استنتج معادلة ديكارتية للدائرة (Γ') ، صورة الدائرة (Γ) بالتحاكي h الذي مركزه النقطة O و نسبته $k = -\frac{2}{5}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = x^2 + 3x - 2$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2 - أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارتها.

3 - شكل جدول تغيرات الدالة f

4 - أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 1$

5 - عين نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات ثم أرسم كلا من (T) و (C_f) .

التمرين الثالث: (03 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

لتكن النقط $A(1; 3; -2)$ ، $B(-5; 2; 2)$ و $C(3; 4; 3)$

1 - أكتب معادلات المستقيم (AB) أو تمثيلا وسيطيا له.

2 - أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة التي قطرها $[BC]$.

3 - هل الأشعة \vec{AB} ، \vec{AC} و \vec{k} من نفس المستوي؟ برر إجابتك.

انتهى نص الاختبار

عطلة سعيدة لأبنائنا الأعزاء، عيد فطر سعيد و بالتوفيق للجميع.

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
07		التمرين الأول: (07 نقاط)
	01	(1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = -\frac{2}{3}u_n + 2$
		(2) بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 3$ ، فإن $-\frac{2}{3}u_n + 2 > -\frac{2}{3}(3) + 2$ و منه:
	01	$u_{n+1} - u_n > 0$ ، و هكذا فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة تماما على \mathbb{N}
		(3) لدينا $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كما يلي: $v_n = -u_n + 3$
	01	أ- لدينا: $v_{n+1} = -u_{n+1} + 3 = -\frac{1}{3}u_n - 2 + 3 = -\frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}(-u_n + 3) = \frac{1}{3}v_n$ و بالتالي
	01	$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = -u_0 + 3 = -(-1) + 3 = 4$
	01	ب- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $v_n = v_0 \times q^{n-0} = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$
	01	و منه: $u_n = -v_n + 3 = -4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$
	0.5	ت- بما أن: $\frac{1}{3} \in]-1; 1[$ ، فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ أي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = 0$
0.5	و منه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right] = -4 \times (0) + 3 = 3$	
05		التمرين الثاني: (05 نقاط)
	01	(1) لدينا: $(\Gamma): (x-5)^2 + (y+2)^2 = (5)^2$
		و يمكن أن نكتب أيضا: $(\Gamma): x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$
	01	ولكن: $(x_A - 5)^2 + (y_A + 2)^2 = (2 - 5)^2 + (2 + 2)^2 = (5)^2$ و منه: $A \in (\Gamma)$
		(2) لدينا: $A(2; 2)$ و $\overline{A\Omega}(3; -4)$ كما أن المستقيم (Δ) يشمل A و $\overline{\Omega A}$ شعاع
		ناظمي له. إذن من أجل كل نقطة $M(x; y)$ من (Δ) لدينا: $\overline{AM}(x-2; y-2)$
	$\overline{AM} \cdot \overline{A\Omega} = 0$ و بتوظيف العبارة التحليلية للجداء السلمي نجد: $3(x-2) - 4(y-2) = 0$	
	و بعد التبسيط نحصل على معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) كما يلي:	
01	$(\Delta): 3x - 4y + 2 = 0$	
0.5	(3) لدينا: $\overline{O\Omega'} = -\frac{2}{5}\overline{O\Omega}$ و بالتالي: $\Omega'(-2; \frac{4}{5})$ و من جهة أخرى:	
01.5	إذن: $R' = \left -\frac{2}{5}\right \times R = 2$ $(\Gamma'): (x+2)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = (2)^2$	

التمرين الثالث: (05 نقاط)

01

1 حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$$

0.5

2 من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = 2x + 3$ و بالتالي:

x	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

0.5

3 - جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-17/4$	$+\infty$

05

4 - لدينا: $(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$ و منه: $(T): y = 3(x-3) + 2$ و بعد التبسيط

01

نجد: $(T): y = 5x - 3$

5 - التقاطع مع محوري الإحداثيات:

المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتهما: $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ و $\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$

0.5

لأن المعادلة $f(x) = 0$ تقبلها كحلين

0.5

المنحنى (C_f) يقطع محور الترتيب في النقطة التي ترتيبها -2 لأن: $f(0) = -2$

01

رسم المنحنى (C_f) و المماس (T)



التمرين الرابع: (03 نقاط)

1 - المستقيم (AB) يشمل النقطة $A(1;3;-2)$ و $\overline{AB}(-6;-1;4)$ شعاع ناظمي له.

01

$$\text{و بالتالي: } (AB): \begin{cases} x=1-6t \\ y=3-t \\ z=-2+4t \end{cases} \text{ حيث } t \in \mathbb{R}$$

كما أن معادلات هذا المستقيم تعطى بـ: $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{4}$

2 - سطح الكرة التي قطرها [BC] يكون مركزها النقطة $\omega\left(-1;3;\frac{5}{2}\right)$ منتصف [BC]

$$\text{و نصف قطرها } r = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{69}}{2}$$

و بالتالي:

01

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + \left(z-\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{69}}{2}\right)^2$$

03

3 - لنبحث عن عددين حقيقيين α و β حيث يكون: $\vec{k} = \alpha\overline{AB} + \beta\overline{AC}$

$$\begin{cases} 0 = -6\alpha + 2\beta \\ 0 = -\alpha + \beta \\ 1 = 4\alpha + 5\beta \end{cases} \text{ بعبارة أخرى لنحل الجملة:}$$

باستعمال طريقة الجمع و التعويض

من المعادلة الثانية نلاحظ أن: $\alpha = \beta$

بالتعويض في المعادلة الأولى نجد: $\alpha = 0$

بالتعويض في المعادلة الثالثة نجد: $\beta = \frac{1}{5}$

و هذا تناقض لأن $\alpha = \beta$

01

إذن الجملة لا تقبل حولا و منه الأشعة \overline{AB} ، \overline{AC} و \vec{k} ليست من نفس المستوي.

من إعداد الأستاذ: مراحي لزهر