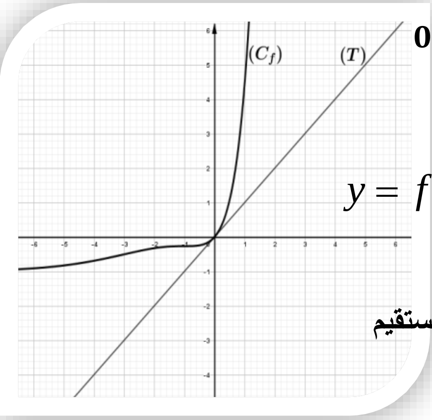
عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة	
	المجزأة	المجموع

التمرين الأول : (4 نقاط)

f الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 كما هو مبيّن في الشكل المقابل .



1) بقراءة بيانيّة : $f'(0)=\tan\alpha$ أي $f'(0)=1$ ، معادلة المماس (T) هي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ معناه : $y=x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

2) لدينا : $\begin{cases} f(x)=y \\ y=x+m \end{cases}$ الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$.

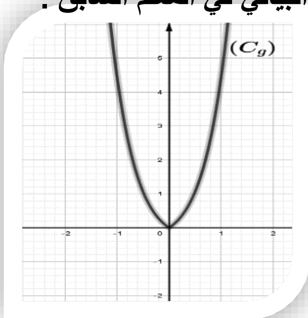
- لمّا $m\in\left]-\infty;0\right[$ ليس للمعادلة حلول .
- لمّا $m=0$ للمعادلة حل وحيد .
- لمّا $m\in\left]0;+\infty\right[$ للمعادلة حلّان .

3) لدينا $f(x)=\left(x^2+a\right)e^x+b$ ، لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(x^2+a\right)e^x+b\right]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$

و من جهة أخرى : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ معناه $b=-1$ و لدينا : $f(0)=0$ و بالتعويض نجد أنّ : $a-1=0$ أي $a=1$.

4) g الدالّة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\left(x^2+1\right)e^{|x|}-1$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق .



لدينا من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ فإنّ $-x$ من $\mathbb{R}$ و $g(-x)=\left((-x)^2+1\right)e^{|-x|}-1$ أي $g(-x)=g(x)$.

و منه g دالّة زوجيّة .

على المجال $\left[0;+\infty\right[$ فإنّ (C_g) ينطبق على (C_f) و بما أنّ g دالّة زوجيّة نناظر الجزء السابق بالنسبة إلى حامل محور التراتيب .

التمرين الثاني : (4 نقاط)

1) الإجابة صحيحة ، التبرير : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لمنحنى الدالّة f بجوار $+\infty$.

2) الإجابة خاطئة ، التبرير : المعادلة تقبل حلولا على المجال : $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

لدينا : $\ln(2x+1)+\ln(2x-1)=\ln 3$ يكافئ $\ln\left[(2x+1)(2x-1)\right]=\ln 3$ معناه $4x^2-1=3$ ومنه : $x=1$ مقبول و $x=-1$ مرفوض .

3) الإجابة صحيحة ، التبرير : F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة : $F'(x)=1-\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ أي :

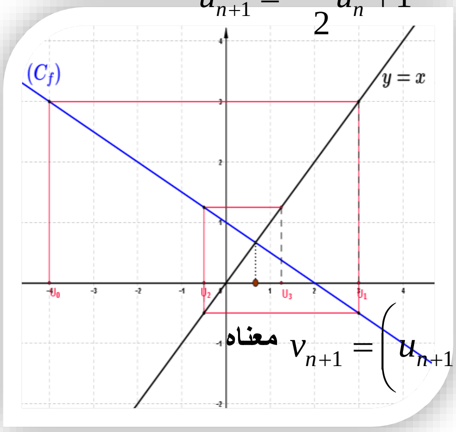
$F'(x)=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ معناه $F'(x)=f(x)$.

4) الإجابة خاطئة ، التبرير : $\ln u_1+\ln u_2+\cdots+\ln u_{2022}=\ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{2023}{2022}\right)$ أي

$\ln u_1+\ln u_2+\cdots+\ln u_{2022}=\ln\left(2\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2023}{2022}\right)$ ومنه $\ln u_1+\ln u_2+\cdots+\ln u_{2022}=\ln(2023)$

التمرين الثالث : (5 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=-4$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+1$.



1) تمثيل الحدود كما هو موضّح في الشكل المقابل .

2) أ. المتتالية (u_n) غير رتيبة لأنّ : $u_0\prec u_1$ لكن $u_1\succ u_2$.

ب. (u_n) متقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .

3) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\left(u_n-\frac{2}{3}\right)^2$.

أ . (v_n) متتالية هندسيّة أساسها $\frac{1}{4}$ معناه : $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$ ، لدينا $v_{n+1}=\left(u_{n+1}-\frac{2}{3}\right)^2$ معناه

$v_{n+1}=\left(-\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}\right)^2$

فيكون $v_{n+1}=\left(-\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)\right)^2$ و منه $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$ و $v_0=\left(u_0-\frac{2}{3}\right)^2$ أي : $v_0=\left(\frac{14}{3}\right)^2$.

ب. $v_n=v_0\times q^n$ ومنه $v_n=\left(\frac{14}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{14}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ لأنّ

$0\prec\frac{1}{4}\prec1$. لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)^2=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{2}{3}$ و منه (u_n) متقاربة .

4) لدينا : $v_0\times v_1\times v_2\times\cdots\times v_{n-1}=v_0\times(v_0.q)\times(v_0.q^2)\times\cdots\times(v_0.q^{n-1})$ ومنه

$v_0\times v_1\times v_2\times\cdots\times v_{n-1}=v_0{}^n\times q.q^2.\cdots.q^{n-1}$ يكافئ

$v_0\times v_1\times v_2\times\cdots\times v_{n-1}=v_0{}^n\times q^{1+2+3+\cdots+n-1}$ و منه $v_0\times v_1\times v_2\times\cdots\times v_{n-1}=v_0{}^n\times q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ و

بالتعويض نجد $v_0\times v_1\times v_2\times\cdots\times v_{n-1}=\left(\frac{14}{3}\right)^{2n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-n}$.

ملاحظة : العلاقة الأخيرة غير محقّقة من أجل $n=0$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

I) g الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{2x^2-2x-1}{x^2}+\ln x$.

1) الدالّة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة : $g'(x)=\frac{2(x+1)}{x^3}+\frac{1}{x}$ ، لدينا على

المجال $]0;+\infty[$ فإنّ $\frac{2(x+1)}{x^3}+\frac{1}{x}\succ0$ ومنه الدالّة g متزايدة تماما على مجال تعريفها .

2) أ. تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة على المجال $]1,2;1,3[$.

ب. نلخص إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ كما هو مبيّن في الجدول الموالي :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

II) نعتبر الدّالة العدديّة f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(\frac{1}{x}-2-\ln x\right)e^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{2}{e^x}-\frac{\ln x}{e^x}\right)\right]$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ \succ}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ \succ}}\left[\left(\frac{1}{x}-2-\ln x\right)e^{-x}\right]$ ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ \succ}} f(x)=+\infty$.

ب. التفسير البياني : $y=0$ معادلة مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $x=0$ معادلة مستقيم مقارب مواز لحامل محور التراتيب .

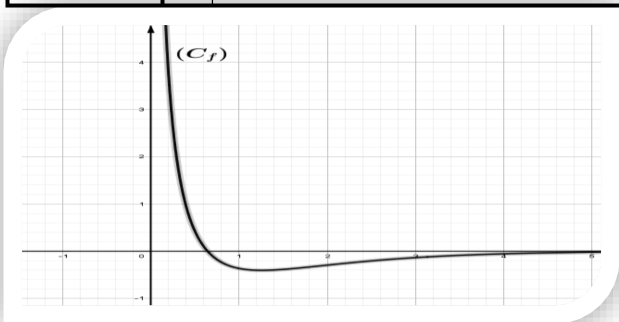
2) أ. الدّالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$

ب. من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأنّ $e^x\succ0$ وبالتالي : f **متزايدة تماما** على المجال $]\alpha;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha[$.

فيكون جدول التغيّرات كالآتي :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	0

3) الإنشاء :



4) F الدالّة العدديّة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $F(x)=e^{-x}(2+\ln x)$.

أ. الدالّة F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالّتها المشتقة : $F'(x)=f(x)$ ومنه F دالّة أصليّة للدالّة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب. نضع $S(\lambda)=\int_{\lambda}^{1/2} f(x)dx$ حيث λ عدد حقيقي يحقق : $0\prec\lambda\prec\frac{1}{2}$.

		و منه $S(\lambda)=F\left(1/2\right)-F(\lambda)$ أي $S(\lambda)=F(x)\Big\vert_{\lambda}^{1/2}$. $S(\lambda)=e^{-1/2}(2-\ln 2)-e^{-\lambda}(2+\ln\lambda)$ **التفسير البياني :** **العدد** $S(\lambda)$ **هو مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى** $\left(C_f\right)$ **وحامل محور الفواصل و المستقيمين اللّذين معادلتيهما** $x=\lambda$ و $x=\dfrac{1}{2}$. **انتهى تصحيح الموضوع الأوّل .**

هذا العمل صدقة جارية عن روح أبي رحمه الله

فلا تنسوه من دعواتكم و انشروا الملف صدقة عنه بارك الله فيكم

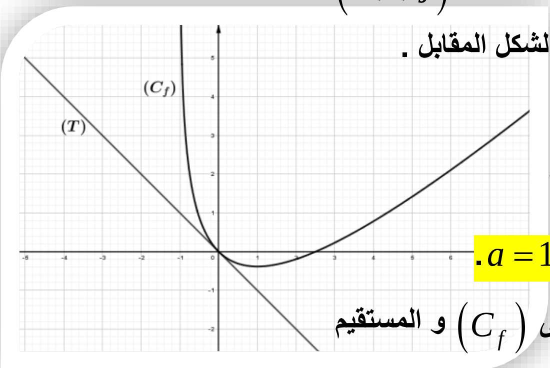
إعداد الأستاذ : لقمان بعون

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة	
	المجزأة	المجموع

التمرين الأول : (4 نقاط)

f الدالّة المعرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=ax-2\ln(x+1)$ حيث a عدد حقيقي ،

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ،



(T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .كما هو مبيّن في الشكل المقابل .

1) بقراءة بيانيّة : $f'(0)=\tan\alpha$ أي $f'(0)=-1$ ،

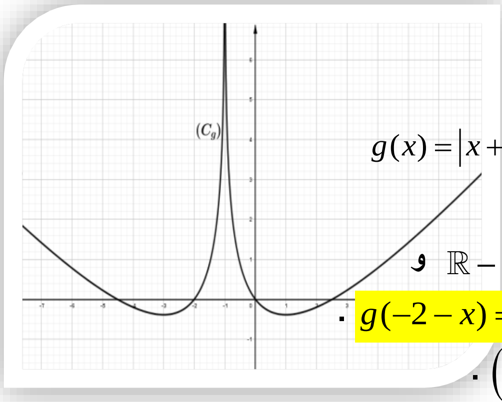
معادلة المماس (T) هي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

معناه : $y=-x$.

2) لدينا : $f'(0)=-1$ و بالتعويض نجد أنّ : $a-2=-1$ أي $a=1$.

3) لدينا : $\begin{cases} f(x)=y \\ y=-x+m \end{cases}$ الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y=-x+m$.

- لمّا $m\in]-\infty;0[$ ليس للمعادلة حلول .
- لمّا $m=0$ للمعادلة حل وحيد معدوم .
- لمّا $m\in]0;+\infty[$ للمعادلة حلّان مختلفان في الإشارة.



4) g الدالّة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=|x+1|-1-2\ln|x+1|$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ. لدينا من أجل كلّ x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ فإنّ $-2-x$ من $\mathbb{R}-\{-1\}$ و $g(-2-x)=|-2-x+1|-1-2\ln|-2-x+1|$ أي $g(-2-x)=g(x)$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ محور تناظر لـ (C_g) .

ب. على المجال $]-1;+\infty[$ لدينا: $|x+1|=x+1$ ومنه $g(x)=f(x)$.

ج. على المجال $]-1;+\infty[$ فإنّ (C_g) ينطبق على (C_f) ثمّ نناظر الجزء السابق بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $x=-1$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

1) الاقتراح الصحيح هو ب ، التبرير : يمكن كتابة التكامل على الشكل $I=\frac{1}{2}\int_1^2(2x-2)e^{x^2-2x}dx$ أي

$I=\frac{1}{2}e^{x^2-2x}\Big|_1^2$ ومنه $I=\frac{1}{2}\left(e^0-e^{-1}\right)$ فيكون $I=\frac{e-1}{2e}$.

2) الاقتراح الصحيح هو أ ، التبرير : (v_n) متتالية هندسيّة معناه $v_{n+1}=q\times v_n$ أي

$v_{n+1}=q(u_n+\alpha)\cdots(1)$

لدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha$ يكافئ $v_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+9+3\alpha)\cdots(2)$ بالمطابقة بين (1) و (2) نجد

$9+3\alpha=\alpha$ ومنه : $\alpha=-\frac{9}{2}$.

3) الاقتراح الصحيح هو جـ ، التبرير : لدينا x موجب تماما و منه $\frac{\ln(x+1)}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{e^x-1}{x}$ و بما أنّ

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to0}}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to0}}\frac{e^x-1}{x}=1$ فحسب مبرهنة الحصر فإنّ $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to0}}\frac{f(x)}{x}=1$.

4) الاقتراح الصحيح هو أ ، التبرير : بمكاملة طرفي المساواة مرّتين نجد : $y=x^2+\ln x+c_1x+c_2$

و بتوظيف الشرطين : $H(1)=4$ و $H'(1)=2$ نجد : $H(x)=x^2-x+4+\ln x$.

التمرين الثالث : (5 نقاط)

(u_n) المتتالية الهندسيّةالمعرّفة على $\mathbb{N}$ و حدودها موجبة تماما حيث : $\begin{cases}u_0\times u_2=e^2\\ \ln u_1+\ln u_7=-4\end{cases}$.

1) أ. لدينا حسب خاصية الوسط الهندسي $u_0\times u_2=u_1^2$ فيكون $u_1^2=e^2$ و بما أنّ (u_n) متتالية هندسيّة حدودها موجبة تماما فإنّ : $u_1=e$. من خلال المعادلة 2 نجد $\ln u_1+\ln(u_1\times q^6)=-4$ يكافئ $2\ln u_1+6\ln(q)=-4$ يكافئ $\ln(q)=-1$ ومنه $q=e^{-1}$.

ب. لدينا : $u_0=\frac{u_1}{q}$ ومنه $u_0=e^2$ فتكون عبارة v_n بدلالة n : $v_n=v_0\times q^n$ أي : $v_n=e^{2-n}$.

2) نضع : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ ، ومنه $S_n=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ بالحساب و التبسيط نجد :

$S_n=\frac{e^3}{e-1}\left(1-e^{-n-1}\right)$.

3) نعتبر المتتالية العدديّة (v_n) المعرّفة بـ : $v_0=e^3$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $v_{n+1}=v_n+u_n$.

أ. نضع : $P(n):v_n=\frac{e^{3-n}-e^4}{1-e}$ ، نتحقق من صحّة الخاصيّة $P(n)$ من أجل $n=0$ لدينا $e^3=e^3$ ومنه $P(0)$ محققة .

نفرض أنّ الخاصيّة $P(n)$ محققة أي : $v_n=\frac{e^{3-n}-e^4}{1-e}$ و نبرهن صحّة الخاصيّة $P(n+1)$ أي $v_{n+1}=\frac{e^{2-n}-e^4}{1-e}$.

لدينا : $v_{n+1}=v_n+u_n$ و لدينا حسب فرض التراجع : $v_n=\frac{e^{3-n}-e^4}{1-e}$ فيكون $v_{n+1}=\frac{e^{3-n}-e^4}{1-e}+e^{2-n}$

بتوحيد المقامات و التبسيط نجد $v_{n+1}=\frac{e^{2-n}-e^4}{1-e}$ و منه $P(n+1)$ محققة فتكون $P(n)$ محققة أي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $v_n=\frac{e^{3-n}-e^4}{1-e}$.

ب. لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{3-n}=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{e^4}{e-1}$ و عليه فإنّ المتتالية (v_n) متقاربة .

4) أ. لدينا : $\frac{1}{e}v_n=\frac{1}{e}\left(\frac{e^{3-n}-e^4}{1-e}\right)$ يكافئ $\frac{1}{e}v_n=\frac{1}{1-e}\left(\frac{e^{3-n}-e^4}{e}\right)$ أي $\frac{1}{e}v_n=\frac{1}{1-e}\left(e^{2-n}-e^3\right)$

ومنه $\frac{1}{e}v_n=\frac{1}{1-e}\left(u_n-e^3\right)$.

ب. نضع من أجل كلّ عدد طبيعي : $S'_n=\frac{1}{e}v_0+\frac{1}{e}v_1+\frac{1}{e}v_2+\cdots+\frac{1}{e}v_n$ و لدينا : $\frac{1}{e}v_n=\frac{1}{1-e}\left(u_n-e^3\right)$

فيكون : $S'_n=\frac{1}{1-e}\left(u_0-e^3\right)+\frac{1}{1-e}\left(u_1-e^3\right)+\cdots+\frac{1}{1-e}\left(u_n-e^3\right)$

أي $S'_n=\frac{1}{1-e}\left(u_0+u_1+\cdots+u_n-e^3(n+1)\right)$ و منه : $S'_n=\frac{1}{1-e}\left(S_n-(n+1)e^3\right)$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

II) f الدّالة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{9}{2}e^{-x}-2x+4$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) أ. $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{9}{2}e^{-x}-2x+4\right]$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{9}{2}\right)e^{-x}-2x+4\right]$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

2) أ. الدّالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}(e^x-2)(4e^x-1)$

ب.

x	$-\infty$		$-\ln 4$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه f متزايدة تماما على المجال $[-\ln 4;\ln 2]$ و متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-\ln 4]$ و $[\ln 2;+\infty[$

فيكون جدول التغيّرات كالآتي :

x	$-\infty$		$-\ln 4$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\ln 4)$	$\nearrow$	$f(\ln 2)$	$\searrow$	$-\infty$

3) أ. لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-2x+4)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{9}{2}e^{-x}\right)$ أي $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-2x+4)\right)=0$

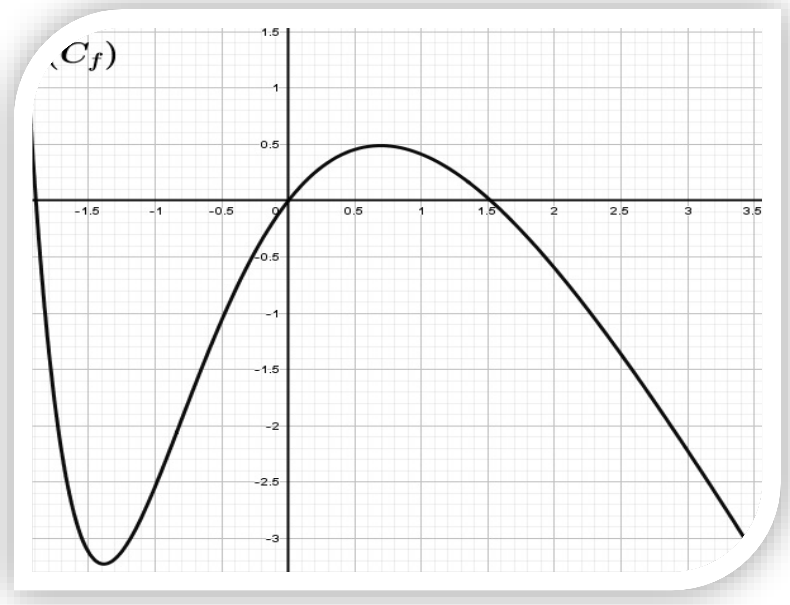
و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-2x+4$ مقارب مائل لـ بجوار $+\infty$.

ب. نلخص الوضع النسبي في الجدول الموالي :

x	$-\infty$		$-\ln 9$		$+\infty$
$f(x)-(-2x+4)$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $w(-\ln 9;2\ln 9+4)$	(C_f) يقع تحت (Δ)	

4) $(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه $(T):y=\frac{3}{2}x$.

5) الإنشاء :



6) h الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{9}{2}e^{-x}+2x-2$. (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. لدينا : $h(x)=-\left(\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{9}{2}e^{-x}-2x+4\right)+2$ و منه $h(x)=-f(x)+2$. و عليه $a=-1$ و $b=2$.

ب. (C_h) هو صورة (C_{-f}) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ حيث (C_{-f}) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل .

انتهى تصحيح الموضوع الثاني .

هذا العمل صدقة جارية عن روح أبي رحمه الله

فلا تنسوه من دعواتكم و انشروا الملف صدقة عنه بارك الله فيكم

إعداد الأستاذ : لقمان بعون