



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

$a$  و  $b$  عدنان طبيعيين حيث  $a = 2022$  و  $b = 124$

(1) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكلّ من العددين  $a$  و  $b$  على 7

(2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي القسمة الإقليدية للعدد  $5^n$  على 7

(3) بيّن أنّ العدد  $a^a + b^b + 4$  يقبل القسمة على 7

(4) نضع، من أجل كلّ عدد طبيعي  $n$ ،  $A_n = 2021^n + 2022^n + 2023^n + 2024^n$

- بيّن أنّ  $A_n \equiv 1 + 5^n + 6^n \pmod{7}$  ثمّ عيّن قيم العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون  $A_n + 1$  مضاعفا للعدد 7

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير في كلّ حالة مما يلي:

(1) من أجل كلّ عدد طبيعي  $n$ ،  $n(n^2 - 1)$  مضاعف للعدد 3

(2) الدالة العددية  $x \mapsto x^2 + 2x + x \ln x$  حلّ للمعادلة التفاضلية  $y'' = 2 + \frac{1}{x}$  على  $]0; +\infty[$

(3) المستقيم ذو المعادلة  $y = x + e$  مماس لمنحنى الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = x + (x - 2)e^x$

(4)  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  بـ:  $v_n = \ln \frac{ne^n}{n+1}$

عبارة المجموع  $S_n$  حيث  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$  هي:  $S_n = \frac{n(n+1)}{2} - \ln(n+1)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$(u_n)$  و  $(v_n)$  المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي:  $u_1 = 2$

ومن أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم  $n$ ،  $u_{n+1} = \frac{n}{2n+2} u_n - \frac{1}{n+1}$  و  $v_n = n u_n + 2$

(1) أحسب  $u_2$  و  $u_3$

(2) أ- برهن أنّ المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$

ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

(3) أحسب، بدلالة  $n$ ، المجموع  $S_n$  حيث  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم،  $w_n = \frac{4n}{v_n - nu_n}$

أحسب، بدلالة  $n$ ، المجموع  $S'_n$  حيث  $S'_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

$f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = 1 + (x-1)\ln x$

( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O, \vec{i}; \vec{j})$  حيث  $\|\vec{i}\| = 2\text{ cm}$

(1) أ- أدرس حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  الموجب تماما إشارة كل من  $\ln x$  و  $\frac{x-1}{x}$

ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  الموجب تماما إشارة  $\frac{x-1}{x} + \ln x$

(2) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3)  $h$  الدالة العددية المعرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $h(x) = x - 2 + \ln x$

أ- بين أن الدالة  $h$  متزايدة تماما على  $]0; +\infty[$

ب- برهن أن المعادلة  $h(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $1,5 < \alpha < 1,6$  ثم بين أن  $\ln(\alpha) = 2 - \alpha$

ج- بين أن  $y = \frac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha} x$  معادلة  $\perp (T)$  مماس ( $C_f$ ) في النقطة ذات الفاصلة  $\alpha$

(4) أنشئ ( $T$ ) و ( $C_f$ ) على  $]0; 4[$  (نأخذ  $\frac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha} = 0,8$ )

(5) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما،  $f(x) - x = (x-1)(-1 + \ln x)$

ب- أدرس حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  الموجب تماما إشارة  $f(x) - x$

(6)  $K$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $K(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln x$

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما  $K'(x) = f(x) - x$

ب- أحسب مساحة حيز المستوي المحدد بـ ( $C_f$ ) والمستقيمت التي معادلاتها:  $y = x$  ،  $x = 1$  و  $x = e$

(7)  $g$  الدالة المعرفة على  $]-2; +\infty[$  بـ :  $g(x) = (x+1)\ln(x+2)$  ، ( $C_g$ ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-2; +\infty[$  ،  $g(x) = f(x+2) - 1$  ،

- استنتج أن ( $C_g$ ) صورة ( $C_f$ ) بانسحاب يطلب تعيين شعاعه. (لا يُطلب إنشاء ( $C_g$ ))

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $a = 5n + 2$  ،  $b = n + 1$  ،  $c = 9n + 2$

و  $d = \text{pgcd}(a; b)$  ،  $d' = \text{pgcd}(b; c)$

(1) عيّن القيم الممكنة لكلّ من  $d$  و  $d'$  ثم استنتج  $\text{pgcd}(a; b; c)$

(2) عيّن قيم العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون العدد  $b$  قاسماً لـ  $a$

(3) نعتبر المعادلة:  $(E) \dots 17x - 4y = 29$  حيث  $x$  و  $y$  عدنان صحيحان.

بيّن أنّه إذا كانت الثنائية  $(x; y)$  حلاً للمعادلة  $(E)$  فإنّ  $x \equiv 1[4]$  ثم حل المعادلة  $(E)$

(4) عيّن الثنائيات  $(x; y)$  حلول المعادلة  $(E)$  والتي تحقق  $xy < 279$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات التالية مع التبرير.

(1) مجموعة حلول المعادلة  $e^{(\ln x)^2 - 6} = x$  ذات المجهول الحقيقي  $x$  في المجال  $]0; +\infty[$  هي:

(أ)  $S = \{e^3\}$  (ب)  $S = \{-2; 3\}$  (ج)  $S = \{e^{-2}; e^3\}$

(2) باقي القسمة الإقليدية للعدد  $9^{2023}$  على 7 هو:

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5

(3) العدد الحقيقي  $\int_0^{\ln 4043} \frac{1}{1+e^{-x}} dx$  يساوي:

(أ) 2022 (ب)  $\ln 2022$  (ج)  $\ln 4043$

(4) الدالة العددية المعرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $F(x) = (x+2)\sqrt{x}$

$F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$ . عبارة الدالة  $f$  هي :

(أ)  $f(x) = \frac{3x+2}{2x}$  (ب)  $f(x) = \frac{3x+2}{2x}\sqrt{x}$  (ج)  $f(x) = \frac{2x+3}{2x}\sqrt{x}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول  $u_0$  حيث  $u_0 = 0$  ومن أجل كلّ عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 2)$

(1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > -2$

(2) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية  $(u_n)$  ثم استنتج أنّ  $(u_n)$  متقاربة .

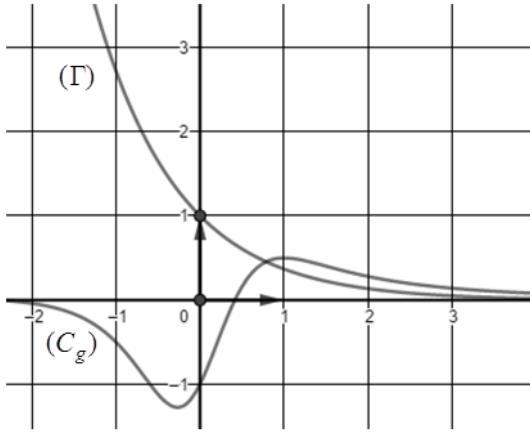
(3)  $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي  $v_n = \frac{1}{u_{n+1} - u_n}$

أ- برهن أنّ المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها 2 ثم أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$

ب- أحسب، بدلالة  $n$ ، المجموع  $S_n$  حيث  $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n = 2\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)$  ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ب- أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S'_n$  حيث  $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$



التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(Gamma) التمثيل البياني للدالة  $x \mapsto e^{-x}$  و  $(C_g)$  التمثيل

البياني للدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$

$\alpha$  فاصلة نقطة تقاطع  $(Gamma)$  و  $(C_g)$

(كما هو مبين في الشكل المقابل)

(1) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x) - e^{-x}$

(2) تحقّق حسابياً أنّ  $0,7 < \alpha < 0,8$

(II) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = e^{-x} - \frac{x+1}{x^2+1}$ ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس.

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ثم أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  وفسّر النتيجة بيانياً.

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = g(x) - e^{-x}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيّراتها.

(3) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - e^{-x}]$  وفسّر النتيجة بيانياً.

ب- أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين  $(Gamma)$  و  $(C_f)$

(4) أ- أكتب معادلة لـ  $(T)$  مماس  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 0

ب- أنشئ  $(T)$  و  $(Gamma)$  و  $(C_f)$  (نأخذ  $f(\alpha) \approx -0.6$ )

ج- ناقش بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، عدد وإشارة حلول المعادلة  $f(x) - m = 0$

(5) علماً أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[-1; 0]$ :  $\frac{1}{2}x + 1 \leq \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{5}{4(1-x)}$

أ- عيّن حصرًا للعدد  $I$  حيث:  $I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 1}$

ب- أحسب  $J$  حيث:  $J = \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2 + 1} dx$  ثم استنتج حصرًا لـ  $A$ ، مساحة الحيز المستوي المحدّد

بالمنحنيين  $(Gamma)$  و  $(C_f)$  والمستقيمين اللذين معادلتاهما:  $x = 0$  و  $x = -1$