الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية باتنة | **ثانوية: زانة البيضاء الجديدة**

الشعبة: الثالثة تقني رياضي | **دورة ماي 2022**

اختبار البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات | **المدة: 04 سا ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) n عدد صحيح، إذا كان 2 قاسما للعدد $5n$ فإن: n يكون عددا زوجيا.

2) العدد $1954^{1962}-1$ يقبل القسمة على 3.

3) المعادلة $2022x-1443y=1962$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos(x)dx = \frac{\pi^2}{4}-2$.

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\right)=1$.

التمرين الثاني: (4,5 نقطة)

n عدد طبيعي.

1) بين أن العددين $2n+1$ و $5n+2$ أوليان فيما بينهما.

2) نعتبر العددين a و b حيث $a=2n+7$ و $b=5n+2$.

أ. عين جميع القيم الممكنة لـ $PGCD(a;b)$.

ب. بين أنه إذا كان $PGCD(a;b)=31$ فإن: $n\equiv 12[31]$.

3) نعتبر العددين الطبيعيين A و B حيث: $A=2n^2+9n+7$ و $A=5n^2+7n+2$.

أ. بين أن $n+1$ يقسم كلا من A و B.

ب. عين تبعا لقيم n وبدلالة n كلا من: $PGCD(A;B)$ و $PPCM(a;b)$.

التمرين الثالث: (4,5 نقطة)

نعتبر المتتالية العددية (I_n) المعرفة بـ $I_0=\int_1^e xdx$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n dx$.

1) أحسب قيمة كل من: I_0 و I_1.

2) أ. باستخدام المكاملة بالتجزئة بين أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $2I_n+nI_{n-1}=e^2$.

ب. استنتج قيمة I_2.

3) أ. بين أن من أجل كل $x\in[1;e]$: $\ln(x)-1\leq 0$.

ب. أثبت أن المتتالية (I_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

ج. استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{e^2}{n+3} \le I_n \le \frac{e^2}{n+2}$.

4) أحسب $\lim_{n\to+\infty} I_n$ و $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2(x-1)e^{2x-3} - 1$

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنجز جدول تغيراتها.

2) أحسب: $g\left(\frac{3}{2}\right)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

II. نعتبر الدالة f المعرفة على بـ $\mathbb{R}$: $f(x) = -2x + 2 + (2x-3)e^{2x-3}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1) أ. أحسب كلا من: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب. بين أن: المستقيم (D) ذا المعادلة المختصرة $y = -2x + 2$ مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$.

ج. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (D).

2) أ. بين أن: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2g(x)$ ، واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها.

ب. أثبت أن: (C) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -2 في نقطة يطلب تعيين احداثييها.

ج. أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) .

د. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T).

3) أ. بين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $0,82 \prec \alpha \prec 0,83$ و $1,90 \prec \beta \prec 1,91$.

ب. أنشئ (D) و (T) ثم مثل بيانيا (C).

4) ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(2x-3)e^{2x-3} = m - 2$

انتهى الموضوع الأول

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية باتنة — ثانوية: زانة البيضاء الجديدة

الشعبة: الثالثة تقني رياضي — دورة ماي 2022

إجابة مقترحة لاختبار البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

الموضوع الأول

حل التمرين الأول: (05 نقاط)

الاجابة بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

<table>
<tr><th>العبارة</th><th>الحكم</th><th>التبرير</th></tr>
<tr><td>01</td><td>صح</td><td>لمّا أن: $\begin{cases} 2 \mid 5n \\ 2 \wedge 5 = 1 \end{cases}$ فإن حسب مبرهنة غوص $2 \mid n$ وبالتالي n زوجي.</td></tr>
<tr><td>02</td><td>صح</td><td>لدينا: $1954 \equiv 1 [3]$
ومنه حسب خاصية الرفع إلى القوة:
$1954^{1962} \equiv 1^{1962} [3]$
إذن: $1954^{1962} \equiv 1 [3]$
وبما أن: $1 \equiv 1 [3]$
فإن حسب خاصية التعدي $1954^{1962} \equiv 1 [3]$
$\begin{array}{r|l} 1954 & 3 \\ -1953 & 651 \\ 1 & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>03</td><td>خطأ</td><td>المعادلة: $2022x - 1443y = 1962$ تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$
إذا وفقط إذا كان: $PGCD(2022;1443) \mid 1962$
نبحث عن $PGCD(2022;1443)$ باستخدام خوارزمية القسمة.
<table>
<tr><td>الحاصل</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>31</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2022</td><td>1443</td><td>579</td><td>285</td><td>9</td><td>6</td><td>3</td></tr>
<tr><td>الباقي</td><td>579</td><td>285</td><td>9</td><td>6</td><td>3</td><td>0</td></tr>
</table>
وبالتالي: $PGCD(2022;1443) = 3$
ولما أن: $1+9+6+2 = 18$ و $18 \equiv 0 [3]$
فإن: $3 \mid 1962$ وبالتالي المعادلة السابقة تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$</td></tr>
<tr><td>04</td><td>صح</td><td>نستخدم المكاملة بالتجزئة لحساب هذا التكامل:</td></tr>
</table>

نضع: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)\, dx$

$u(x) = x^2 \quad ; \quad v'(x) = \cos x$

منه: $u'(x) = 2x \quad ; \quad v(x) = \sin x$

إذن:

$$I = \left[x^2 \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x)\, dx}_{I_1}$$

نستخدم المكاملة بالتجزئة لحساب I_1

نضع: $u(x) = x \quad ; \quad v'(x) = \sin x$

ومنه: $u'(x) = 1 \quad ; \quad v(x) = -\cos x$

إذن: $I_1 = \left[-x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx$

$$= \left[-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - (0\cos 0)\right] + \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{I_1 = 1}$$

وبالتالي: $I = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0^2 \sin(0) - 2$

وعليه: $\boxed{I = \frac{\pi^2}{4} - 2}$

---

05 | حطك.

لدينا: من أجل كل عدد حقيقي a يختلف عن 1:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}}$$

وبالتالي: $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

إذن:

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \lim_n \left[2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right] = 2$$

لأن: $-1 < \frac{1}{2} < 1$

إنتهى التمرين الأول.

حل التمرين الثاني: (4,5 نقطة)

1 إثبات أن العددين $2n+1$ و $5n+2$ أوليان فيما بينهما:

لدينا: $5(2n+1)-2(5n+2)=1$

فإن حسب بيزو $(2n+1)\wedge(5n+2)=1$

2 أ) تعيين جميع القيم الممكنة لـ $PGCD(a;b)$:

نضع: $d=PGCD(a;b)$

إذن: $\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases}$

أي: $\begin{cases} d \mid 2n+7 \\ d \mid 5n+2 \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} d \mid 10n+35 \\ d \mid 10n+4 \end{cases}$

ومنه: $d \mid (10n+35)-(10n+4)$

وبالتالي: $d \mid 31$

وعليه: $d=1$ أو $d=31$.

(لأن 31 عدد أولي).

ب) إثبات أن: إذا كان: $PGCD(a;b)=31$ فإن: $n\equiv 12[31]$.

إذا كان: $PGCD(a;b)=31$ فإن:

$\begin{cases} 31 \mid a \\ 31 \mid b \end{cases}$

أي: $\begin{cases} 31 \mid 2n+7 \\ 31 \mid 5n+2 \end{cases}$

ومنه: $31 \mid (5n+2)-2(2n+7)$

$31 \mid n-12$

$n-12=31k\ ;\ k\in\mathbb{N}$

$n=31k+12$

$\boxed{n\equiv 12[31]}$

3 أ) إثبات أن: $n+1$ يقسم كلا من A و B:

$2n^2+9n+7$	$n+1$
$-\ 2n^2+2n$	$2n+7$
$7n+7$	
$-7n+7$	
0	

لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$:

$A=(n+1)(2n+7)$

وبالتالي، $n+1$ يقسم A.

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$B = (n+1)(5n+2)$

ومنه $(n+1)$ يقسم B.

$$\begin{array}{r|l} 5n^2+7n+2 & n+1 \\ -\ 5n^2+5n & 5n+2 \\ \hline 2n+2 & \\ -\ 2n+2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

أ) تعيين تبعا لقيم n وبدلالة n كلا من $PGCD(A;B)$ و $PPCM(A;B)$

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$PGCD(A;B) = PGCD((n+1)(2n+7);(n+1)(5n+2))$$
$$\boxed{= (n+1)\,PGCD(2n+7;5n+2)}$$

ولدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$PPCM(A;B) = PPCM((n+1)(2n+7);(n+1)(5n+2))$$
$$\boxed{= (n+1)\,PPCM(2n+7;5n+2)}$$

ونعلم أن: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$PPCM(2n+7;5n+2) \times PGCD(2n+7;5n+2) = (2n+7)(5n+2)$$

إذن: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{PPCM(2n+7;5n+2) = \frac{(2n+7)(5n+2)}{PGCD(2n+7;5n+2)}}$$

لنميز حالتين:

الحالة الأولى: $PGCD(2n+7;5n+2) = 31$

$$\begin{cases} PGCD(A;B) = 31(n+1) \\ PPCM(A;B) = \dfrac{(n+1)(2n+7)(5n+2)}{31} \end{cases}$$

حيث: $n = 31k+12$ مع $k \in \mathbb{N}$.

الحالة الثانية: $PGCD(2n+7;5n+2) = 1$

$$\begin{cases} PGCD(A;B) = (n+1) \\ PPCM(A;B) = (n+1)(2n+7)(5n+2) \end{cases}$$

حيث: $n \neq 31k+12$ مع $k \in \mathbb{N}$.

التمرين الثاني

حل التمرين الثالث: (4,5 نقطة)

1 حساب قيمة كل من I_0 و I_1 :

$$I_0=\int_1^e x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e=\frac{e^2-1}{2}$$

ومنه: $\boxed{I_0=\frac{e^2-1}{2}}$

$$I_1=\int_1^e x\ln(x)\,dx$$

نستخدم المكاملة بالتجزئة لحساب I_1 :

نضع: $u(x)=\ln(x)$; $v'(x)=x$

ومنه: $u'(x)=\frac{1}{x}$; $v(x)=\frac{1}{2}x^2$

إذن: $I_1=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e\frac{1}{\cancel{x}}x^{\cancel{2}}\,dx$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

إذن: $\boxed{I_1=\frac{e^2+1}{4}}$

2 أ إثبات أنه: من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $2I_n+nI_{n-1}=e^2$

لدينا: من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$:

$$I_n=\int_1^e x\ln^n(x)\,dx$$

نضع: $u(x)=\ln^n(x)$; $v'(x)=x$

ومنه: $u'(x)=\frac{n}{x}\ln^{n-1}(x)$; $v(x)=\frac{1}{2}x^2$

إذن: $I_n=\left[\frac{1}{2}x^2\ln^n(x)\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e\frac{n}{\cancel{x}}x^{\cancel{2}}\ln^{n-1}(x)\,dx$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{n}{2}\int_1^e x\ln^{n-1}(x)\,dx$$

$$I_n=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}nI_{n-1}$$

وبالتالي: $\boxed{\text{من أجل كل } n\in\mathbb{N}^*:\ 2I_n+nI_{n-1}=e^2}$

ب) استنتاج قيمة I_2:

من السؤال السابق وجدنا أنّ:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $2I_n + nI_{n-1} = e^2$

وبالتالي: $2I_2 + 2I_1 = e^2$

$$I_2 = \frac{1}{2}(e^2 - 2I_1) = \frac{1}{2}\left(e^2 - 2\,\frac{e^2+1}{4}\right)$$

إذن: $$\boxed{I_2 = \frac{e^2-1}{4}}$$

3) أ) إثبات أنّ: من أجل كل $x \in [1;e]$: $\ln(x) - 1 \le 0$

$x \in [1;e]$ يكافئ: $1 \le x \le e$

$$\ln(1) \le \ln(x) \le \ln(e)$$

لأنّ الدالة $\ln$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وخصوصا على المجال $[1;e]$.

وعليه: $\ln(x) - 1 \le 0$ $\quad (\ln e = 1)$

ب) إثبات أنّ المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$:

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e x\ln^{n+1}(x)\,dx - \int_1^e x\ln^n(x)\,dx$$

$$= \int_1^e \left(x\ln^{n+1}(x) - x\ln^n(x)\right)dx$$

$$= \int_1^e x\ln^n(x)\left(\ln(x) - 1\right)dx$$

ولدينا: من أجل كل $x \in [1;e]$:
$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln^n(x) \ge 0 \\ \ln(x) - 1 \le 0 \end{cases}$$

وعليه: من أجل كل $x \in [1;e]$: $x\ln^n(x)(\ln(x)-1) \le 0$

وبالتالي:

$$\int_1^e x\ln^n(x)(\ln(x)-1)\,dx \le 0$$

أي أنّ: من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} - I_n \le 0$

هذا يعني أنّ (I_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$

ولدينا :

$$I_1 - I_0 = \frac{e^2+1}{4} - \frac{e^2-1}{2}$$

$$= \frac{e^2+1-2e^2+2}{4}$$

$$= \frac{3-e^2}{4}$$

وبالتالي : $I_1 - I_0 \leq 0$

وعليه المتتالية (I_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

ج) استنتاج أن : من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$

لدينا : (I_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ فإن :

من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$.

لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $I_n \leq I_{n-1}$

ومنه : من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $nI_n \leq nI_{n-1}$

$$nI_n + 2I_n \leq nI_{n-1} + 2I_n$$

$$(n+2)I_n \leq e^2$$

$$\boxed{I_n \leq \frac{e^2}{n+2}} \quad \cdots ①$$

ولدينا : من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $I_{n+1} \leq I_n$

إذن : من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$:

$$2I_{n+1} \leq 2I_n$$

$$2I_{n+1} + (n+1)I_n \leq 2I_n + (n+1)I_n$$

$$e^2 \leq (n+3)I_n$$

$$\boxed{\frac{e^2}{n+3} \leq I_n} \quad \cdots ②$$

من ① و ② نجد : $\boxed{\text{من أجل كل } n\in\mathbb{N}^* : \frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}}$

4 حساب : $\lim_n I_n$ و $\lim_n nI_n$:

• لدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{e^2}{n+3} \le I_n \le \dfrac{e^2}{n+2}$

بما أن : $\lim_n \dfrac{e^2}{n+3} = \lim_n \dfrac{e^2}{n+2} = 0$

فإن : $\boxed{\lim_n I_n = 0}$

• لدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{e^2}{n+3} \le I_n \le \dfrac{e^2}{n+2}$

ومنه : " " " : $\dfrac{e^2 n}{n+3} \le n I_n \le \dfrac{e^2 n}{n+2}$

بما أن : $\lim_n \dfrac{e^2 n}{n+3} = \lim_n \dfrac{e^2 n}{n+2} = e^2$

فإن : $\boxed{\lim_n n I_n = e^2}$

انتهى التمرين الثالث.

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -1$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[2(x-1) e^{2x-3} - 1 \right]$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

دراسة اتجاه تغير الدالة g :

حساب المشتقة :

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = \left[4(x-1) + 2 \right] e^{2x-3}$

$= (4x-2) e^{2x-3}$

ومنه : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 2(2x-1) e^{2x-3}$

دراسة إشارة $g'(x)$:

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(2x-1)$ على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
$g(x)$	-1	$\searrow$	$g(\frac{1}{2})$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$g(\frac{1}{2}) = -(e^{-1} + 1)$

2) حساب $g(\frac{3}{2})$ ثم استنتاج $g(x)$ حسب قيم x :

$g(\frac{3}{2}) = 2(\frac{3}{2} - 1) e^{2(\frac{3}{2}) - 3} - 1$

$g(\frac{3}{2}) = 0$

نلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) 1) أ) حساب نهايتي الدالة f عند كل من $+\infty$ و $-\infty$:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[\underbrace{-2x + 2}_{+\infty} + \underbrace{(2x-3) e^{2x-3}}_{0} \right]$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{ح ع ت}$$

لإزالتها:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{(2x-3)}_{+\infty} \left[\underbrace{\frac{-2x+2}{2x-3}}_{-1} + \underbrace{e^{2x-3}}_{+\infty} \right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

ب) إثبات أن: (D) مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (-2x+2)\right] = \lim_{x \to -\infty} \left[(2x-3)e^{2x-3} \right]$$

$$= 0$$

ومنه: (D) م مقارب لـ (C) عند $-\infty$.

ج) دراسة الوضع النسبي لـ (C) بالنسبة إلى (D):

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - (-2x+2)$

لدينا: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - (-2x+2) = (2x-3)e^{2x-3}$

إشارة الفرق هي إشارة "$2x-3$" على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)-(-2x+2)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي لـ (C) بالنسبة لـ (D)	(C) أسفل (D)	$(C)\cap(D)=\{(\frac{3}{2};-1)\}$	(C) أعلى (D)

2) أ) إثبات أن: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2g(x)$

لدينا: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2 + \left[2(2x-3)+2\right] e^{2x-3}$$

ومنه، من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$= 2\left[(2x-3+1)e^{2x-3} - 1\right]$$

$$= 2\left[2(x-1)e^{2x-3} - 1\right]$$

إذن: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2g(x)$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

ب) إثبات أن (C) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 2- :

$f'(x) = -2$ تكافئ : $2g(x) = -2$

$$g(x) = -1$$

$$2(x-1)e^{2x-3} - \cancel{1} = -\cancel{1}$$

$$(x-1)e^{2x-3} = 0$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1$$

ومنه : (C) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 2- في النقطة التي احداثيتيها $(1; -e^{-1})$

ج) كتابة معادلة ديكارتية لـ (T) :

$$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$= -2(x-1) - e^{-1}$$

$$\boxed{(T) : y = -2x + 2 - e^{-1}}$$

د) دراسة الوضع النسبي لـ (C) بالنسبة إلى (T) :

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - (-2x+2-e^{-1})$

نضع : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - (-2x+2-e^{-1})$

ومنه : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = (2x-3)e^{2x-3} + e^{-1}$

لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $h'(x) = 4(x-1)e^{2x-3}$

إشارة $h'(x)$ هي إشارة "$x-1$".

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	$h(1)$	$\nearrow$	

$h(1)=0$

بما أن الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى هي "0" تبلغها عند 1 فإن: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $h(x)\geq 0$.

الوضع النسبي لـ (C) بالنسبة لـ (T)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-(-2x+2-e^{-1})$	$+$	0	$+$
الوضع النسبي لـ (C) بالنسبة لـ (T)	(C) أعلى (T)	$(C)\cap(T)=\{(1;-e^{-1})\}$	(C) أعلى (T)

3) أ) إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $0,82<\alpha<0,83$ و $1,90<\beta<1,91$.

بما أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على المجال $[0,82;0,83]$ لأنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و $f(0,82)\times f(0,83)<0$ لأن:

$$\begin{cases} f(0,82)\simeq \\ f(0,83)\simeq \end{cases}$$

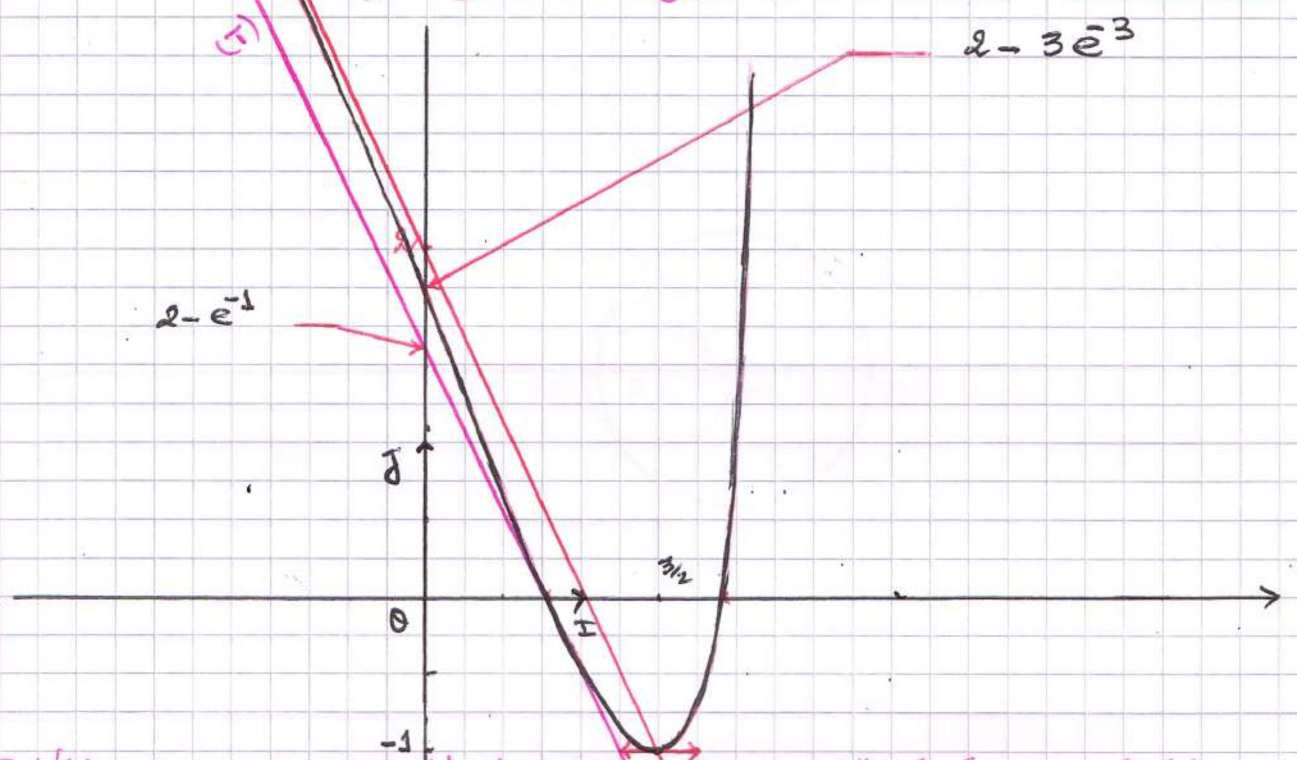
فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا α حيث: $0,82<\alpha<0,83$.

وبما أن الدالة f رتيبة تماما على $[0,82;0,83]$ فإن: α وحيد.

بطريقة مماثلة نثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β

على المجال $]1{,}90;1{,}91[$.

ب) إنشاء (D) و (T) و تمثيل (C) بيانيا:



4) المناقشة البيانية تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(2x-3)e^{2x-3}=m-2$

$(2x-3)e^{2x-3}=m-2$ تكافئ $-2x+2+(2x-3)e^{2x-3}=-2x+2+m-2$

$$f(x)=-2x+m \quad ...(*)$$

عدد الحلول البيانية المعادلة (*) هو عدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ_m) ذي المعادلة المختصرة: $y=-2x+m$ الذي معامل توجيهه -2 و: $(\Delta_m)\cap(oy)=\{(0;m)\}$

- إذا كان: $m\in]-\infty;2-e^{-1}[$ فإن المعادلة (*) لا تقبل حلولاً.
- إذا كان: $m=2-e^{-1}$ فإن المعادلة (*) تقبل حلاً مضاعفا موجبا.
- إذا كان: $m\in]2-e^{-1};2-3e^{-3}[$ فإن المعادلة (*) تقبل حلين موجبين.
- إذا كان: $m=2-3e^{-3}$ فإن المعادلة (*) تقبل حلين أحدهما موجب والآخر معدوم.
- إذا كان: $m\in]2-3e^{-3};2[$ فإن المعادلة (*) تقبل حلين مختلفين في الاشارة.
- إذا كان: $m\in[2;+\infty[$ فإن المعادلة (*) تقبل حلاً موجبا.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) المعادلة $\ln(x-1)-\ln(x+1)=3$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

2) $\overline{5616}^{7}=\overline{1579}^{11}$.

3) مشتقة الدالة: $f:x\mapsto \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)$ هي الدالة: $f':x\mapsto -\tan\left(\frac{1}{x}\right)$.

4) كل متتالية محدودة متقاربة.

التمرين الثاني: (3,5 نقطة)

1) أ. أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 3.

ب. استنتج تبعا لقيم العدد الطبيعي k باقي القسمة الاقليدية للعدد $A(k)$ على 3 حيث: $A(k)=(101)^{4k}+(101)^{2k}+1$.

2) أ. عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $(275423)^n$ على 3.

ب. حدد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد N مضاعفا لـ 3 حيث: $N=(275423)^n+(372121)^4$.

التمرين الثالث: (06 نقاط)

I. نعتبر المتتالية العددية (I_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $I_n=\int_0^1(1-x)^n e^{2x}dx$.

1) أحسب قيمة I_1.

2) أ. باستخدام المكاملة بالتجزئة بين أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $2I_{n+1}=(n+1)I_n-1$.

ب. استنتج قيمة I_2.

3) أ. بين أن من أجل كل $x\in[0;1]$: $0\le(1-x)^{n+1}e^{2x}\le e^{2x}$.

ب. استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0\le I_{n+1}\le\frac{e^2-1}{2}$.

ج. استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{e^2}{n+1}$، ثم أحسب كلا من: $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n$.

II. نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $U_n=\frac{2^n}{n!}I_n$.

حيث: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $n!=n(n-1)(n-2)\times\ldots2\times1$.

1) أ. برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{2^{n-1}}{n!}\le1$.

ب. استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0\le U_n\le\frac{2e^2}{n+1}$، ثم استنتج قيمة: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

2) أ. أثبت أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_{n+1}=U_n-\frac{2^n}{(n+1)!}$.

ب. أثبت أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n=\frac{1}{2}\left[e^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\right]$.

ج. استنتج قيمة: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}$.

التمرين الرابع: (6,5 نقطة)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=2\ln(x)+\dfrac{x-1}{x}$

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنجز جدول تغيراتها.

2) أحسب: $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]-3;+\infty[$ بـ : $f(x)=(x+2)^2\ln(x+3)$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=2cm$.

1) أحسب كلا من: $\lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ثم فسر بيانيا النتيجتين المحصل عليهما.

2) أ. بين أن: من أجل كل $x\in]-3;+\infty[$: $f'(x)=(x+2)g(x+3)$.

ب. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها.

ج. استنتج أن: (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها.

3) أ. أحسب معامل توجيه المستقيم (D) الذي يقطع المنحنى (C) في النقطتين اللتين فاصلتي كل منهما 0 و -2.

ب. عين احداثيي نقط تقاطع المنحنى (C) مع حاملي محوري الاحداثيات.

ج. أنشئ المستقيم (D) ثم مثل بيانيا المنحنى (C).

4) ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x)=m(x+2)$

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $h(x)=x^2\ln(\dfrac{1}{x+1})$

و (C') تمثيلها البياني في نفس المستوي السابق.

اشرح كيفية التمثيل البياني لـ (C') انطلاقا من ثم مثله.

انتهى الموضوع الثاني

إجابة مقترحة لاختبار البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

حل الموضوع الثاني

حل التمرين الأول: (04 نقاط)

الإجابة بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

العبارة	الحكم	التبرير
01	خطأ	$\ln(x-1) - \ln(x+1) = 3$ ... (1) (1) تكافئ: $\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \\ \ln\frac{x-1}{x+1} = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \\ \frac{x-1}{x+1} = e^3 \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \\ (x-1) = e^3(x+1) \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \\ (e^3-1)x = -e^3-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \\ x = -\frac{e^3+1}{e^3-1} \end{cases}$ مرفوض لأن، $-\frac{e^3+1}{e^3-1} \notin]1,+\infty[$ ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي S حيث: $S = \phi$
02	صح	$\overline{5616}^{7} = 6 + 1\times7^1 + 6\times7^2 + 5\times7^3 = 2022$ $\overline{1579}^{11} = 9 + 7\times11 + 5\times11^2 + 1\times11^3 = 2022$ إذن: $\overline{5616}^{7} = \overline{1579}^{11}$
03	خطأ	لدينا: $f'(x) = \frac{(\cos(\frac{1}{x}))'}{\cos(\frac{1}{x})} = \frac{1}{x^2}\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\cos(\frac{1}{x})} = \frac{1}{x^2}\tan(\frac{1}{x})$

04	خطأ	لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؛ $U_n = (-1)^n$ لما أن: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؛ $-1 \leq U_n \leq 1$ فإن المتتالية (U_n) محدودة. لكن غ موجودة $\lim U_n$ وبالتالي (U_n) غير متقاربة

حل التمرين الثاني:

1) أ) دراسة تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية لـ 2^n على 3:

البحث عن الدور:

$2^0 \equiv 1[3]$ ، $2^1 \equiv 2[3]$ ، $2^2 \equiv 1[3]$

وبالتالي الدور هو: 2

التعميم:

لدينا: $2^2 \equiv 1[3]$ ومنه حسب خاصية الرفع إلى القوى $2^{2k} \equiv 1[3]$

حيث: $k \in \mathbb{N}$.

وبما أن: $\begin{cases} 2^{2k} \equiv 1[3] \\ 2 \equiv 2[3] \end{cases}$ فإن حسب خاصية الضرب $2^{2k+1} \equiv 2[3]$

التلخيص في جدول:

$n \equiv ...[2]$	0	1
$2^n \equiv ...[3]$	1	2

ب) استنتاج تبعا لقيم k باقي القسمة الاقليدية لـ $A(k)$ على 3:

لدينا: $101 \equiv 2[3]$ ، ومنه حسب خاصية الرفع إلى القوى

$101^{2k} \equiv 2^{2k}[3]$ و $101^{4k} \equiv 2^{4k}[3]$ ، حيث $k \in \mathbb{N}$.

وحسب السؤال السابق:

$2^{2k} \equiv 1[3]$ و $2^{4k} \equiv 1[3]$ ومنه حسب خاصية التعدي:

$101^{2k} \equiv 1[3]$ و $101^{4k} \equiv 1[3]$ ولدينا: $1 \equiv 1[3]$

إذن: حسب خاصية الجمع: من أجل كل $k \in \mathbb{N}$:

$$101^{4k} + 101^{2k} + 1 \equiv 3[3]$$

وبما أن: $3 \equiv 0[3]$

فإن حسب خاصية التعدي: $A(k) \equiv 0[3]$.

وبالتالي من أجل كل $k \in \mathbb{N}$ باقي قسمة $A(k)$ على 3 هو الصفر

أي أن $A(k)$ مضاعف لـ 3.

2) أ) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد 275423^n على 3.

لدينا: $275423 \equiv 2\,[3]$

ومنه حسب خاصية الرفع إلى القوى

$275423^n \equiv 2^n\,[3]$

نلاحظ في الجدول التالي:

قيم n	$n=2k$	$n=2k+1$
باقي القسمة الاقليدية لـ 275423^n على 3	1	2

$; k \in \mathbb{N}$

ب) تحديد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد N مضاعفا لـ 3.

لدينا: $372121 \equiv 1\,[3]$

ومنه حسب خاصية الرفع إلى القوى $372121^4 \equiv 1\,[3]$

إذن:

$$\begin{cases} 275423^n + 372121^4 \equiv 2\,[3] \quad ; \quad n=2k,\ k\in\mathbb{N} \\ \text{أو} \\ 275423^n + 372121^4 \equiv 0\,[3] \quad ; \quad n=2k+1,\ k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

وبالتالي حتى يكون N قابلا للقسمة على 3 يجب أن يكون n فرديا.

حل التمرين الثالث:

I(1) حساب قيمة I_1:

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{2x}\,dx$$

نستخدم المكاملة بالتجزئة لحساب I_1.

نضع:

$$u(x) = 1-x \quad ; \quad v'(x) = e^{2x}$$

ومنه:

$$u'(x) = -1 \quad ; \quad v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$I_1 = \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1$$

$$I_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{e^2-3}{4}$$

ج) إثبات أن: من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $2I_{n+1}=(n+1)I_n-1$

لدينا: من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ؛

$$I_{n+1}=\int_0^1(1-x)^{n+1}e^{2x}\,dx$$

نضع: $u(x)=(1-x)^{n+1}$; $v'(x)=e^{2x}$

ومنه: $u'(x)=-(n+1)(1-x)^n$; $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$I_{n+1}=\left[\frac{1}{2}(1-x)^{n+1}e^{2x}\right]_0^1+\frac{n+1}{2}\underbrace{\int_0^1(1-x)^ne^{2x}\,dx}_{I_n}$$

$$I_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}I_n$$

إذن: $\boxed{2I_{n+1}=(n+1)I_n-1 \ ;n\in\mathbb{N}^* \text{ من أجل كل}}$

د) استنتاج قيمة I_2 :

لدينا: $2I_2=2I_1-1$

ومنه: $I_2=I_1-\frac{1}{2}$

$$=\frac{e^2-3}{4}-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{I_2=\frac{e^3-5}{4}}$$

3) أ) إثبات أن: من أجل كل $x\in[0;1]$: $0\leq(1-x)^{n+1}e^{2x}\leq e^{2x}$

$x\in[0;1]$ يكافئ $0\leq x\leq 1$

$-1\leq -x\leq 0$

$0\leq 1-x\leq 1$

$0\leq(1-x)^{n+1}\leq 1$

(لأن الدالة $x\longmapsto x^{n+1}$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$)

وبما أن: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ؛ $e^{2x}>0$

فإن: $0\leq(1-x)^{n+1}e^{2x}\leq e^{2x}$. وهو م

ب) استنتاج أن: من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $0 \leq I_{n+1} \leq \frac{e^2-1}{2}$

وجدنا من السؤال السابق:

من أجل $x \in [0,1]$: $0 \leq (1-x)^{n+1} e^{2x} \leq e^{2x}$

ومنه $\int_0^1 0\, dx \leq \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{2x}\, dx \leq \int_0^1 e^{2x}\, dx$

$$0 \leq I_{n+1} \leq \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^1$$

إذن: من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_{n+1} \leq \frac{e^2-1}{2}$

ج) استنتاج أن: من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$

لدينا: من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_{n+1} \leq \frac{e^2-1}{2}$

ونعلم أن: من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $2I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$

إذن: من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq 2I_{n+1} \leq (e^2-1)$

$$1 \leq 2I_{n+1} + 1 \leq e^2$$

$$1 \leq (n+1) I_n \leq e^2$$

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$$ ـــ وهو م.

حساب $\lim_n I_n$ و $\lim_n n I_n$:

بما أن: $\lim_n \frac{1}{n+1} = \lim \frac{e^2}{n+1} = 0$ فإن: $\lim_n I_n = 0$

ولدينا: من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $2I_{n+1} = nI_n + I_n - 1$

إذن: من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $nI_n = 2I_{n+1} - I_n + 1$

وبالتالي:

$$\lim_n nI_n = \lim_n \left(2I_{n+1} - I_n + 1\right) = 1$$

II) ① أ) البرهان بالتراجع أن: من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية : $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$ حيث: $n\in\mathbb{N}^*$

المرحلة 01: نتحقق من صحة $P(1)$.

لدينا $\frac{2^{1-1}}{1!} = 1$ و $1 \leq 1$ إذن: $\frac{2^{1-1}}{1!} \leq 1$

وبالتالي $P(1)$ محققة.

المرحلة 02: نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي 1 أي: $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$ (فرضية التراجع)

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن: $\frac{2^n}{(n+1)!} \leq 1$

لدينا:
$$\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$$

ومنه:
$$\frac{2}{(n+1)} \times \frac{2^{n-1}}{n!} \leq \frac{2}{n+1} \times 1$$
$$\frac{2^n}{(n+1)!} \leq \frac{2}{n+1}$$

ولدينا: من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $\boxed{\frac{2}{n+1} \leq 1}$ --- $(*)$

فإن: من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $\frac{2^n}{(n+1)!} \leq 1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

إثبات صحة $(*)$:

$n\in\mathbb{N}^*$ معناه: $n \geq 1$
$$n+1 \geq 2$$
$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$
$$\frac{2}{n+1} \leq 1$$

الاستنتاج: من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

ب) استنتاج أن: من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $0 \leq U_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$

لدينا: من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$ --- (1)

و " " " : $0 \leq \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$ --- (2)

بضرب أطراف المتفاوتتين (1) و(2) طرفا لطرف نجد .

$$0 \leq \frac{2^{n+1}}{n!} I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$$

إذن: من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq U_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$

استنتاج $\lim_n U_n$ ، بما أن: $\lim_n \frac{2e^2}{n+1} = 0$

فإن: $\lim_n U_n = 0$.

2) أ) إثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $U_{n+1} = U_n - \frac{2^n}{(n+1)!}$

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} I_{n+1}$$

$$= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{1}{2}\left[(n+1) I_n - 1\right]$$

$$= \frac{2^n}{(n+1)!}(n+1) I_n - \frac{2^n}{(n+1)!}$$

$$= \frac{2^n}{n!} I_n - \frac{2^n}{(n+1)!}$$

ومنه: من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n+1} = U_n - \frac{2^n}{(n+1)!}$

ب) إثبات أنه، من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $U_n = \frac{1}{2}\left[e^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right]$

لدينا، من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = U_{n-1} - \frac{2^{n-1}}{n!}$

ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $\sum_{k=2}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n-1} U_k - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{2^k}{k!}$

$$U_n = U_1 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{2^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^2 - 3 - \sum_{k=2}^{n} \frac{2^k}{k!}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^2 - 1 - 2 - \sum_{k=2}^{n} \frac{2^k}{k!}\right]$$

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $U_n = \frac{1}{2}\left[e^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right]$

ج) استنتاج : $\lim_{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$:

بما أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = \frac{1}{2}\left[e^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right]$

فإن من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} = e^2 - 2U_n$

وبالتالي : $\lim_{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} = \lim_{n} (e^2 - 2U_n)$

وعليه : $\lim_{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} = e^2$

انتهى التمرين الثالث.

المقياس الحقيقي لنجاحك هو عدد المرات التي استعدت توازنك فيها بعد الفشل

أحمد مازن الشقيري / Hekams.com

من خلال المحاولة المستمرة ، ينتهي الأمر بالنجاح. لذا كلما فشل ، زاد احتمال نجاحه

حل التمرين الرابع:

I) 1) دراسة تغيرات الدالة g ثم انجاز جدول تغيراتها:

2) حساب نهايتي الدالة g عند طرفي مجال تعريفها:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left[2\ln(x) + \frac{x-1}{x} \right]$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[2\ln(x) + \frac{x-1}{x} \right]$$

$$= +\infty$$

ب) حساب المشتقة:

لدينا من أجل كل $x \in]0,+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

ج) إشارة المشتقة:

لدينا من أجل كل $x \in]0,+\infty[$: $g'(x) > 0$

وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

د) جدول تغيرات الدالة g:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

هـ) حساب $g(1)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$:

$$g(1) = 2\ln(1) + \frac{1-1}{1}$$

$$g(1) = 0$$

نلخص إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$ في الجدول التالي:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

II) 1) حساب كل من: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -3} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

مع التفسير البياني للنتيجتين المحصل عليهما:

$$\bullet \lim_{x \overset{>}{\to} -3} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -3} \left[\underbrace{(x+2)^2}_{\to 1} \underbrace{\ln(x+3)}_{\to -\infty}\right]$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -3} f(x) = -\infty$$

ت.ب: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=-3$ موازٍ لحامل محور التراتيب.

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[(x+2)^2 \ln(x+3)\right]$$

$$= +\infty$$

ت.ب: (C_f) لا يقبل مستقيما مقاربا موازٍ لحامل محور الفواصل عند $+\infty$.

2) أ) إثبات أنه من أجل كل $x\in]-3,+\infty[$:

$$f'(x) = (x+2)\; g(x+3)$$

لدينا من أجل كل $x\in]-3;+\infty[$:

$$f'(x) = \left[2(x+2)\ln(x+3) + \frac{(x+2)^2}{x+3}\right.$$

$$= (x+2)\left[2\ln(x+3) + \frac{x+2}{x+3}\right]$$

$$f'(x) = (x+2)\, g(x+3)$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم انجاز جدول تغيراتها:

x	-3	-2	$+\infty$
$x+3$	0 ‖	1	$+\infty$

x	-3		-2		$+\infty$
$g(x+3)$	‖	$-$	0	$+$	
$x+2$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	

ومنه: من أجل كل $x\in]-3,+\infty[$ ، $f'(x)\geqslant 0$

فإن الدالة f متزايدة تماما على $]-3,+\infty[$.

x	-3		-2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$				$+\infty$

ج) استنتاج أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها:

ومنه: $f'(x)$ تنعدم في -2 محافظة على اشارتها قبل

وبعد -2 فإن النقطة التي احداثيتها $(-2\,;0)$ نقطة انعطاف

لـ (C) .

3) أ) حساب معامل توجيه (D) :

$$\alpha = \frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}$$

$$= \frac{4\ln(3)}{2}$$

$$\alpha = 2\ln(3)$$

ب) تعيين إحداثيي نقط تقاطع (C) مع :

أ) حامل محور التراتيب :

لدينا : $f(0) = 4\ln(3)$

ومنه : $\boxed{(C) \cap (Oy) = \{(0; 4\ln(3))\}}$

ب) مع حامل محور الفواصل :

$f(x)=0$ تكافئ : $(x+2)^2 \ln(x+3) = 0$

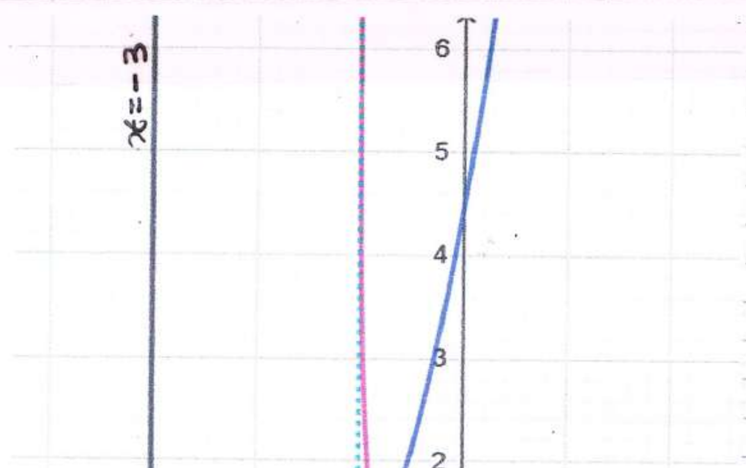
$$\begin{cases} x \in]-3;+\infty[\\ (x+2)^2 = 0 \text{ أو } \ln(x+3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in]-3;+\infty[\\ x = -2 \text{ أو } x+3 = e^0 \end{cases}$$

$$x = -2$$

ومنه : $\boxed{(C) \cap (Ox) = \{(-2;0)\}}$

ج) إنشاء المستقيم (D) والتمثيل البياني لكل من (C) و (C')



4) المناقشة البيانية تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = m(x+2) \ldots (*)$

عدد حلول المعادلة (*) هو عدد نقط تقاطع (C) مع المستقيم (Δ_m) ذي المعادلة المختصرة $y = m(x+2)$.

نبحث عن إحداثيي النقطة التي تشترك فيها المستقيمات (Δ_m)

من أجل كل $m \in \mathbb{R}$: $m(x+2) - y = 0$

تكافئ :

$$\begin{cases} x+2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

معامل توجيه المستقيم (Δ_m) يساوي m.

- إذا كان: $m\in]-\infty,0[$ فإن المعادلة (*) تقبل حلاً وحيداً سالبا.
- إذا كان: $m=0$ فإن المعادلة (*) تقبل ثلاثة حلول سالبة متساوية
- إذا كان: $m\in]0;2\ln(3)[$ فإن المعادلة (*) تقبل ثلاثة حلول سالبة.
- إذا كان: $m=2\ln(3)$ فإن المعادلة (*) تقبل حلين سالبين وحلا معدوما.
- إذا كان: $m\in]2\ln(3);+\infty[$ فإن المعادلة (*) تقبل حلين سالبين وحلاً موجبا.

5) شرح كيفية تمثيل (C') انطلاقا من (C):

لدينا: من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$: $h(x)=x^2\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$

ومنه: من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$: $h(x)=-f(x-2)$

نضع: من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $k(x)=f(x-2)$

وبالتالي:

- التمثيل البياني للدالة k ((C_k)) هو صورة (C) بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{i}$.
- و المنحنى (C') هو نظير (C_k) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

خلاصة: لتمثيل (C') بيانيا نرسم صورة (C) بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{i}$ ثم نرسم نظير المنحنى المحصل عليه بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.