الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات و المسابقات — مديريّة التربية لولاية قسنطينة

من تقديم الأستاذ: بعون لقمان — دورة جوان 2021

الشعبة : علوم تجريبيّة

تصحيح مفصّل مقترح في مادة : الرياضيات — المدة :3 ساعات و نصف

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (04 نقاط)

العدد الكلي للأشخاص هو 5 فيكون عدد الحالات الكليّة لاختيار لجنة من عضوين هو : $C_5^2 = 10$

1) أ - نعتبر الحدث A : " عضوا اللّجنة من نفس الجنس " معناه إمّا من الرجال فقط أو من النساء فقط فيكون:
$P(A) = \frac{C_3^2 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{2}{5}$.

نعتبر الحدث B : " عضوا اللّجنة من جنسين مختلفين " و هي الحدث العكسي للحدث A فيكون : $P(B) = 1 - P(A) = \frac{3}{5}$.

ب - نعتبر الحدث C : " H_1 عضو موجود في اللّجنة " معناه يتبقّى فقط اختيار شخص اخر من 4 أي : $P(C) = \frac{C_1^1 \times C_4^1}{C_5^2} = \frac{2}{5}$.

2) أ - عند إختيار أعضاء اللّجنة يمكن أن تكون اللجنة من النساء فقط وبالتالي عدد الرجال المتواجدين فيها هو 0 رجل و بالتالي $X = 0$ و يمكن أن تكون اللّجنة تحتوي على رجل واحد فقط و بالتالي $X = 1$ و يمكن أن تكون اللّجنة تحتوي على رجلين اثنين و بالتالي $X = 2$

ب - نلخص قانون الاحتمال في الجدول التالي :

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$	$\frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$	$\frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i . P_i \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) الإجابة :صحيحة لأنّ : $f(x) = x + \dfrac{2}{e^x+1}$ و $f(-x) = -x + \dfrac{2e^x}{e^x+1}$ فيكون :

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \frac{2e^x+2}{e^x+1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

2) الإجابة : خاطئة لأنّ :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= u_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right) \\ &= 3 - \frac{1}{3^n} \end{aligned}$$

3) الإجابة : صحيحة لأنّ : يمكن كتابة g على الشكل : $g(x) = 2x + \ln\left(1+e^{-x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\ln\left(1+e^{-x}\right)\right] = 0$
و منه المستقيم ذو المعادلة : $y = 2x$ مقارب مائل لـ C_f بجوار $+\infty$.

4) الإجابة : خاطئة لأنّ : $h'(x) - 3h(x) = -1$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العدديّة (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = -4n + 3$.

1) (u_n) متتالية حسابيّة معناه : $u_{n+1} - u_n = r$ أي :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (-4n-1) - (-4n+3) \\ &= -4 \end{aligned}$$

و منه (u_n) متتالية حسابيّة أساسها $r = -4$ و حدّها الاوّل $u_0 = 3$

2) أ - من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) \\ &= \frac{n+1}{2}(3 - 4n + 3) \\ &= (n+1)(3-2n) \\ &= -2n^2 + n + 3 \end{aligned}$$

ب) $S_n = -30132$ معناه : $-2n^2 + n + 3 = -30132$ فنجد : $-2n^2 + n + 30135 = 0$ و منه $n = 123$.

3) المتتالية العدديّة (v_n) حدودها موجبة تماما ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n = \ln(v_n)$ ومنه يكون : $v_n = e^{u_n}$

أ) عبارة (v_n) بدلالة n : $v_n = e^{-4n+3}$.

• ب)]

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= e^{-4n-4+3} \\ &= e^{-4n+3} \times e^{-4} \\ &= v_n \times e^{-4} \end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسيّة أساسها e^{-4} .

4) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع : $S'_n = \ln\left[v_0\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]+\ln\left[v_1\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]+\cdots+\ln\left[v_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]$

$$\begin{aligned} S'_n &= \left[\ln(v_0)+\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]+\left[\ln(v_1)+\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]+\cdots+\left[\ln(v_n)+\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right] \\ &= [\ln(v_0)+\ln(v_1)+\ln(v_n)]+\ln\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right] \\ &= S_n+\left(\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n+2}\right)\right) \\ &= S_n+\ln\left(\frac{1}{n+2}\right) \\ &= -2n^2+n+3-\ln(n+2)\,. \end{aligned}$$

التمرين الرابع: **(07 نقاط)**

I. الدالّة العدديّة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2x^3-2x^2+3x-2$

1) g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و : $g'(x) = 6x^2-4x+3$.

بحل المعادلة $g'(x)=0$ نجد : $\Delta < 0$ ومنه $g'(x) > 0$ على $\mathbb{R}$. و منه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2)

أ) تطبيق مبرهنة القيم المتوسّطة على الدالة g على المجال $]0,7;0,8[$.

ب) لدينا g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و بالتالي : من أجل كل $x > \alpha$ فإنّ : $g(x) > g(\alpha)$ أي : $g(x) > 0$

ومن أجل كلّ : $x < \alpha$ فإنّ : $g(x) < g(\alpha)$ أي : $g(x) < 0$

ومن أجل كلّ : $x = \alpha$ فإنّ : $g(x) = g(\alpha)$ أي : $g(x) = 0$ نلخصها في جدول .

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

II. الدالّة العدديّة f المعرّفة على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ بـ : $f(x) = 2x-1+\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)$ (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ - $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ التفسير البياني : المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب موازٍ لحامل محور التراتيب معادلته : $x = 0$.

ب - $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

2) أ - لدينا من أجل كلّ عدد حقيقي غير معدوم x : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x\left(x^2 - x + 1\right)}$

ب - إشارة $f'(x)$ من إشارة الجداء $x \times g(x)$ من أجل كلّ عدد حقيقي غير معدوم x نلخصها في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$\propto$		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$g(x)$		-	‖	-	0	+	
$f'(x)$		+	‖	-	0	+	

ومنه f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty, 0]$ و $[\alpha, +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]0, \alpha]$.

ج - جدول التغيّرات :

x	$-\infty$		0		$\propto$		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - (2x-1)\right] &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\ln\left(1 + \frac{1-x}{x^2}\right)\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق $f(x) - (2x-1)$: لدينا $f(x) - (2x-1) = \ln\left(1 + \dfrac{1-x}{x^2}\right)$

ومنه يكون : $f(x) - (2x-1) = 0$ يكافئ $\ln\left(1 + \dfrac{1-x}{x^2}\right) = 0$ معناه $\dfrac{1-x}{x^2} = 0$ أي : $x = 1$

★ لما $x > 1$ فإنّ : $f(x) - (2x-1) < 0$ ومنه (C) تحت (Δ) .

★ لما $x \in]-\infty, 0] \cup]0, 1[$ فإنّ : $f(x) - (2x-1) < 0$ ومنه (C) فوق (Δ) .

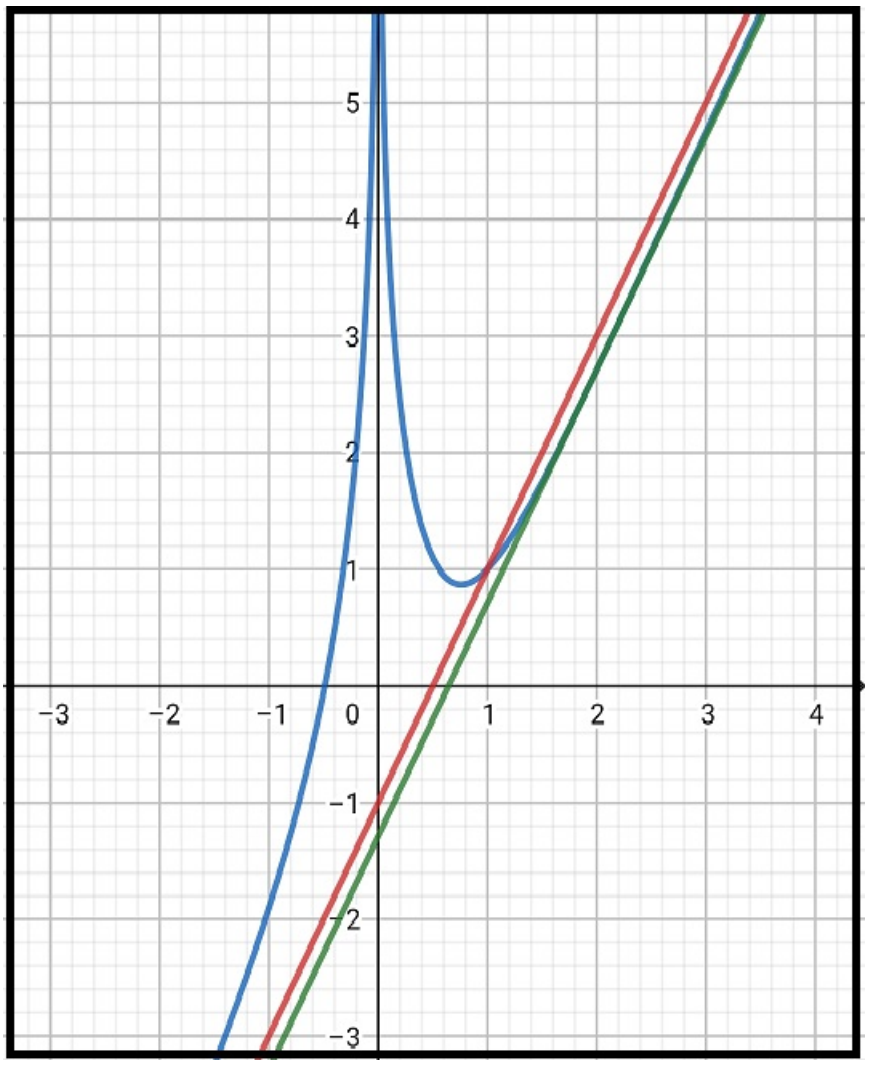
★ لما $x = 1$ فإنّ : $f(x) - (2x-1) = 0$ ومنه (C) يقطع (Δ) في النقطة $\omega(1;1)$

4) المماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 2 معناه $f'(2) = 2$ ، بالتعويض و الحساب نجد : $f'(2) = 2$

فتكون معادلة المماس هي : $(T) : y = 2x - 1 + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

5) تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $]-0,5; -0,4[$

5) الرسم :

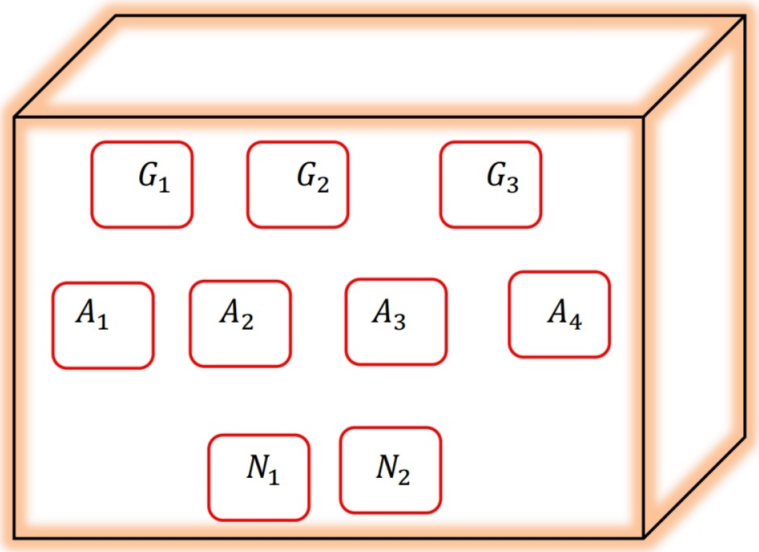


كتبه الأستاذ : لقمان بعون بتاريخ **21/06/2021**

انتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)



نضع

★ G الكريات التي تحمل أسئلة الهندسة .

★ A الكريات التي تحمل أسئلة الجبر .

★ N الكريات التي تحمل أسئلة التحليل .

1) نعتبر A : " سحب سؤال في الهندسة . " و B : " سحب سؤال في التحليل . " و C : " سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا. "
فيكون : $P(A) = \frac{3}{9}$ و $P(B) = \frac{2}{9}$ و $P(C) = \frac{2}{9}$

2) نعتبر E : " سحب سؤال رقمه مختلف عن 1 " معناه سحب كرية تحمل الأرقام الأخرى أي : $P(E) = \frac{6}{9}$

3) أ - سحب كرية يعطي إما الرقم 1 أو 2 أو 3 أو 4 و بالتالي قيم المتغيّر العشوائي X هي $\{1, 2, 3, 4\}$.

ب - نلخص قانون الاحتمال في الجدول التالي :

$X = x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{4} x_i . P_i \\ &= \frac{19}{9} \end{aligned}$$

جـ -

$$\begin{aligned} E(2021X+1442) &= 2021E(X)+1442 \\ &= \frac{51377}{9} \end{aligned}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) لتكن (u_n) متتاليّة حسابيّة معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل 1 و أساسها 2 .
نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $P_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times \cdots \times e^{u_n}$. عبارة P_n هي : ب) $e^{(n+1)^2}$ التبرير :

$$\begin{aligned} P_n &= e^{u_0+u_1+\cdots+u_n} \\ &= e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)(u_0+u_n)} \\ &= e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)(1+1+2n)} \\ &= e^{(n+1)^2} \end{aligned}$$

2) الدالّة العدديّة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln\left(x^2+2x+3\right)$ ، من أجل كلّ عدد حقيقي x لدينا : أ) $f(-2-x) = f(x)$ التبرير بالتعويض و التبسيط فقط .

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x+1)-\ln(x+2)] =$: جـ) 0 التبرير :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}[\ln(x+1)-\ln(x+2)] &= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x}{x}\right)\right] \\ &= \ln(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

4) (w_n) متتاليّة هندسيّة معرّفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما و أساسها عدد حقيقي q موجب تماما و يختلف عن 1 نضع : من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $v_n = \ln w_n$. (v_n) هي متتاليّة : ب) حسابيّة ، التبرير :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln w_{n+1} \\ &= \ln\left(w_n \times q\right) \\ &= \ln\left(w_n\right) + \ln\left(q\right) \\ &= v_n + \ln\left(q\right) \end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية حسابيّة أساسها $r = \ln\left(q\right)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتاليّة العدديّة (u_n) المعرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = 0$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{8}(u_n + 5)$

1) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n < 3$.

1) معناه نبيّن أنّ : $u_{n+1} - u_n > 0$

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{5}{8}(3 - u_n)$ و حسب فرض التراجع : $3 - u_n > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما .

بما أن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد 3 فهي متقاربة .

3) المتتالية العدديّة (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 3(3 - u_n)$.

أ - $v_0 = 3(3 - u_0) = 9$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 3(3 - u_{n+1}) \\ &= 3\left(\frac{9}{8} - \frac{3}{8}u_n\right) \\ &= \frac{3}{8}(3(3 - u_n)) \\ &= \frac{3}{8}v_n \end{aligned}$$

ب -

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times q^n \\ &= \\ &= 9 \times \left(\frac{3}{8}\right)^n \end{aligned}$$

لدينا : $u_n = 3 - \frac{1}{3}v_n$ ومنه : $u_n = 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n$.

جـ - $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$ لأنّ $0 < \frac{3}{8} < 1$.

4) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $P_n = (3 - u_0) \times (3 - u_1) \times \cdots \times (3 - u_n)$ لدينا : $(3 - u_n) = \frac{1}{3}v_n$

نكتب جميع الحدود بدلالة الحد الأولّ v_0 فنحصل على

$$\begin{aligned} P_n &= \left(\frac{1}{3}v_0\right) \times \left(\frac{1}{3}v_1\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{3}v_n\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \times (v_0)^{n+1} \times (q)^{\frac{n}{2}(n+1)} \\ &= 3^{n+1} \times \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n}{2}(n+1)} \end{aligned}$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. الدالّة العدديّة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + xe^{-x-1}$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) حساب $g(-1)$: $g(-1) = 1 - 1e^0 = 0$.

2) بقراءة بيانيّة :

★ لما $x > -1$ فإنّ : $g(x) > 0$.

★ لما $x < -1$ فإنّ : $g(x) < 0$.

★ لما $x = -1$ فإنّ : $g(x) = 0$.

II. الدالّة العدديّة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - (x+1)e^{-x-1}$،
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) بإخراج العدد x كعامل مشترك نحصل على النتيجة : $f(x) = x\left[1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-x-1}\right]$.
باستعمال النتيجة السابقة نجد : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2) أ - لدينا من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.

ب - من أجل كلّ عدد حقيقي x فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ و عليه تكون الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1; +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ جدول التغيّرات كالآتي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

3) أ - $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$ لأنّ : $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u = 0$ ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته : $y = x$.

ب - لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$: لدينا $f(x)-x = -(x+1)e^{-x-1}$ ومنه يكون : $f(x)-x = 0$ يكافئ $(x+1) = 0$ أي : $x = -1$

★ لما $x > -1$ فإنّ : $f(x) - x < 0$ ومنه (C_f) تحت (Δ) .

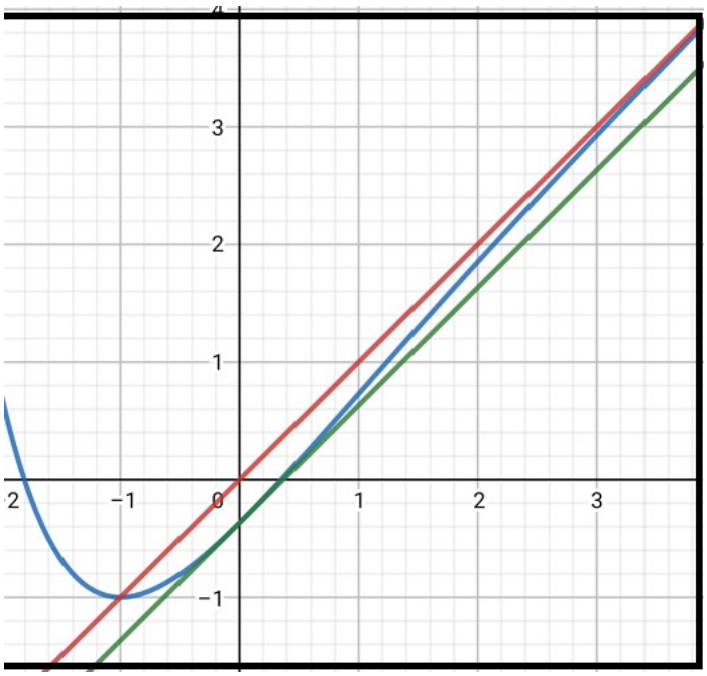
★ لما $x < -1$ فإنّ : $f(x) - x < 0$ ومنه (C_f) فوق (Δ) .

★ لما $x = -1$ فإنّ : $f(x) - x = 0$ ومنه (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $\omega(-1; -1)$

جـ - (T) يوازي (Δ) معناه : $f'(x) = 1$ بحل المعادلة : $g(x) = 1$ نجد $x = 0$ فتكون معادلة المماس (T) هي : $y = x - e^{-1}$.

4) أ - تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على الدالّة f على المجالين $]0,3; 0,4[$ و $]-1,9; -1,8[$.

ب - الرسم :

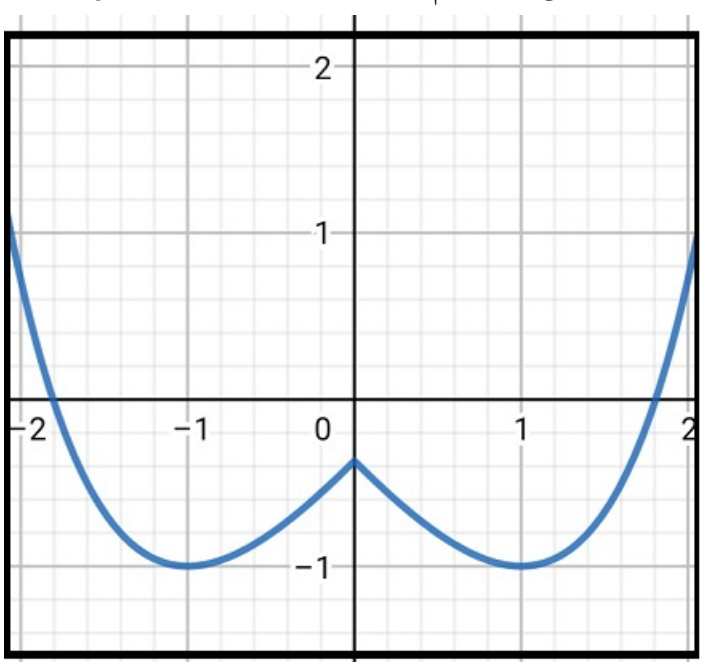


5) الدالّة العدديّة h معرّفة على المجال $[-2;2]$ بـ : $h(x) = -|x| + (|x|-1)e^{|x|-1}$ ، (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ - لدينا D_h متناظرة بالنسبة لـ 0 و من أجل كل عدد حقيقي x من D_h فإنّ : $h(-x) = h(x)$ و منه h دالّة زوجية .

ب - لدينا من أجل كلّ عدد حقيقي $x < 0$: $|x| = -x$ فتكون عبارة h على المجال $[-2;0]$ كما يلي :
$h(x) = x + (-x-1)e^{-x-1} = f(x)$.

جـ - على المجال $[-2;0]$ فإنّ (C_h) ينطبق على (C_f) ثمّ نناظر هذا الجزء بالنسبة إلى حامل محور التراتيب لأنّ h دالّة زوجية .



كتبه الأستاذ : لقمان بعون بتاريخ **21/06/2021**

انتهى الموضوع الثاني