# تمـاريــن احـتمالات لــطـلبة الـبـكـالــوريـا

**التمرين الأول :** $\Omega$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية من 0 الى 49

1- أ- عين الأجزاء من $\Omega$ التالية :
A : عناصر A هي مضاعفات العدد 3 .
B : عناصر B هي مضاعفات العدد 4 .
C : عناصر C هي مضاعفات العدد 3 و مضاعفات العدد 4 .
D : عناصر D هي مضاعفات العدد 3 او مضاعفات العدد 4 .
ب- أحسب النسبة المئوية لكل لكل جزء منها في $\Omega$ .
ج- عبر عن النسب السابقة بكسر ناطق غير قابل للإختزال .
2- نختار عشوائيا عددا من $\Omega$ ونسمي الاعداد السابقة احتمالات الحوادثA،B ، C وDعلى الترتيب .
- أحسب احتمالي الحادثتين التاليتين :
E الحصول على عدد أولي ، F الحصول على عدد ذي رقمين متساويين .

**التمرين الثاني :**

يحتوي كيس على 37 قريصة لا نميز بينها باللمس ، منها 18 قريصة حمراء

نعتبر اللعبتين التاليتين :

اللعبة الأولى : يدفع اللاعب 10 دنانير ويحسب قريصة واحدة عشوائيا ، اذا كانت القريصة المسحوبة حمراء يربح 10 دنانير و الا خسر ما دفعه .

اللعبة الثانية : يدفع اللاعب 10 دنانير ويحدد رقما قبل السحب ثم يحسب قريصة واحدة عشوائيا ويربح 350 دينار اذا كان الرقم المحدد سابقا والا خسر ما دفعه

قارن بين اللعبتين (الربح المتوسط ) .

**التمرين الثالث :** ما هو عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام من 1 الى 6 اذا كانت هذه الأعداد تتكون من :

أ- 3 أرقام ؟
ب-3 أرقام مختلفة ؟
ت-أرقام مختلفة ؟

**التمرين الرابع :** يتكون قسم من 20 تلميذا ، أحمد تلميذ من هذا القسم

1- نريد اختيار تلميذين من هذا القسم (أي عدد اللجان ذات تلميذين والتي يمكن تشكيلها من بين تلاميذ القسم كلهم ) .
- أحسب $a$ عدد الطرائق الممكنة .

2- نريد اختيار تلميذين من القسم شريطة ألا يكون أحدهما أحمد .
- أحسب $b$ عدد الطرائق الممكنة في هذه الحالة .
3- نريد اختيار تلميذين من القسم شريطة أن يكون أحدهما أحمد .
- أحسب $c$ عدد الطرائق الممكنة في هذه الحالة .
4- جد علاقة بين الأعداد : $a$ ، $b$ و $c$ .

**التمرين الخامس :** يحتوي كيس على 4 كرات بيضاء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 ، 2 و أربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 .

نسحب عشوائيا في ان واحد 3 كرات من الكيس .

1- أحسب احتمال الحصول على :
أ- ثلاث كرات من نفس اللون .
ب-ثلاث كرات تحمل نفس الرقم .
ت-ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى .
2- ليكن المتغير العشوائي $x$ الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1
أ- عين قانون احتمال المتغير العشوائي $x$
ب- أحسب الامل الرياضي
ت-أحسب التباين والانحراف المعياري

**التمرين السادس :** في صندوق توجد كرتان لونهما أحمر ، وثلاث كرات لونها أخضر ، وأربع كرات لونها أبيض ، وكرتان لونهما أصفر .

نقوم بسحب كرتين في ان واحد وبطريقة عشوائية من هذا الصندوق

1- أ- ما هو احتمال سحب كرتين لونهما أحمر .

ب- ما هو احتمال سحب كرتين لونهما أبيض .

ج- ما هو احتمال سحب كرتين لونهما أصفر .

د- ما هو احتمال سحب كرتين لونهما أخضر .

2- ماهو احتمال سحب كرتين من نفس اللون .
3- ماهو احتمال سحب كرتين مختلفتي اللون .
4- ماهو احتمال سحب كرتين لونهما ليس أبيض ولا أصفر .
5- ماهو احتمال ان تكون احداهما على الأقل خضراء .
6- ماهو احتمال ان تكون احداهما على الأكثر خضراء .

**التمرين السابع :** كيس يحتوي على 8 كرات منها 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كرة واحدة بيضاء ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من الكيس .

1-أ-أحسب عدد الحالات الممكنة .

ب-احسب الاحتمالات التالية :

$A$- 3 كرات من نفس اللون .

$B$– كرة على الأقل حمراء .

$C$- كرتين على الأكثر حمراء .

2 - نسمي $x$ المتغير العشوائي الذي يرفق عدد الألوان المحصل عليها .

أ-ما هي قيم $x$ ؟

ب-أحسب الإحتمالات التالية : $P(x=1)$ ، $P(x=3)$ واستنتج :$P(x=2)$

ج-أحسب الأمل الرياضي ، التباين ثم الانحراف المعياري .

**التمرين الثامن :** تحتوي علبة على 10 قريصات لا يمكن التفريق بينها باللمس ، من بينها 6 حمراء اللون تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 ،4 ، 6 ، 8 والبقية بيضاء اللون تحمل الأرقام 1 ، 3 ، 5 ، 5 .

- نسحب 3 قريصات من هذه العلبة واحدة تلو الأخرى دون إرجاع

المطلوب :

أ- شكل شجرة الإحتمال المناسبة لذلك .

ب-احتمال الحصول على 3 قريصات من نفس اللون .

ت- احتمال الحصول على 3 قريصات بلونين مختلفين .

**التمرين التاسع :**

كيس به 10 كريات متماثلة لانميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء .

1- نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في آن واحد .

أ- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء

ب-احسب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء .

2- ليكن المتغير العشوائي $x$ الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $x$ و احسب أمله الرياضي .

**التمرين العاشر :**

كيس يحتوي على 5 كرات منها 3 لونها حمراء و 2 سوداء

التجربة 1 : نسحب عشوائيا كرة ونسجل لونها ثم نعيدها الى الكيس ، ثم نسحب مرة أخرى و ندون لونها .

التجربة 2 : نسحب كرتين الواحدة تلوى الأخرى و بدون ارجاع و ندون لونها .

1- أنشئ لكل تجربة شجرة الاحتمالات .

2- ماهو احتمال التحصل على كرتين في كل تجربة حيث :

أ- حمراويتين . ب - سوداويتين ت- من لونين مختلفين

**التمرين 11**: تتكون مجموعة أشخاص من ثمانية رجال وأربع نساء من بينهم رجل واحد اسمه ابراهيم وامرأة واحدة اسمها فاطمة ، نريد تكوين لجنة مكونة من ثلاثة أعضاء لهم نفس المهام .

- أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

أ- $A$ " تكوين لجنة تضم 3 رجال " .

ب- $B$–" تكوين لجنة تضم رجل وامرأتين .

ت- $C$-" تكوين لجنة تضم ابراهيم " .

ث- $D$ -" تكوين لجنة تضم اما ابراهيم أو فاطمة "

- ليكن المتغير العشوائي $x$ الذي يرفق بكل اختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة .

1- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $x$ .

2- احسب أمله الرياضي .

3- أحسب التباين والانحراف المعياري

**التمرين 12**:

يحتوي وعاء على 3 قريصات بيضاء و 4 حمراء ، احدى القريصات البيضاء تحمل الرقم 1 والأخريان تحملان الرقم 5 أما القريصات الحمراء فاثنتان منهما تحملان الرقم 2 و الأخريان تحملان الرقم 3 . نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد ، ونسحب مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

1- ماهو احتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6 ؟

2- ماهو احتمال أن يكون المجموع أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاوين ؟

3- نعرف المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لقريصتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

أ- عين قيم المتغير العشوائي $x$ ، ثم أعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $x$

ب-أحسب الأمل الرياضي $E(x)$ ، ثم أحسب الإنحراف المعياري $\delta$ .

**التمرين 13**: - ملاحظة التمرين منقول -

يبدأ لاعب لعبة بحيث يقوم بعدة جولات. احتمال أن يخسر في الجولة الأولى هو *0,2*.
تجري اللعبة في ما بعد بالطريقة التالية:

- إذا ربح في جولة، فإن احتمال أن يخسر الموالية هو *0,05*.
- إذا خسر في جولة، فإن احتمال أن يخسر الموالية هو *0,1*.

1) نسمي:

$E_1$: الحادثة: " اللاعب يخسر الجولة الأولى "

$E_2$: الحادثة: " اللاعب يخسر الجولة الثانية "

$E_3$: الحادثة: " اللاعب يخسر الجولة الثالثة "

نسمي $X$ المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يخسر اللاعب خلال الجولات الثلاثة الأولى.يمكن الاستعانة بشجرة.

أ) ما هي قيم $X$ ؟

ب) بين أن احتمال الحادثة $(X=2)$ يساوي $0,031$ و احتمال $(X=3)$ هو $0,002$
ج) عين قانون احتمال $X$.
د) أحسب الأمل الرياضي و التباين للمتغير $X$.
2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، نضع : $E_n$: الحادثة: " اللاعب يخسر الجولة $n$ "، $\overline{E_n}$ الحادثة المعاكسة لها و $p_n$ احتمال الحادثة $E_n$.
أ) عبر، بدلالة $n$، عن احتمالات الحوادث $E_n \cap E_{n+1}$ و $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ بدلالة $p_n$.
ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، $p_{n+1}=0,05p_n+0,05$ .
3) نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$،

أ) بين أن $(u_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
ب) استنتج، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، $u_n$ ثم $p_n$ بدلالة $n$.
ج) أحسب النهاية لـ $p_n$ لما $n$ يؤول إلى $+\infty$.

**التمرين 14**: يحتوي كيس على 4كرات بيضاء و 2 كرات سوداء لا نفرق بينها عند اللمس.
1) نقوم بثلاث سحبات متتابعة عشوائيا لكرة حسب الطريقة التالية: بعد كل سحب إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء، نعيدها للكيس و إذا كانت سوداء لا نعيدها إلى الكيس. نرمز بـ $X$ للمتغير العشوائي المساوي لعدد الكرات السوداء المسحوبة بعد كل السحبات. يمكن الاستعانة بشجرة.
أ) ما هي قيم $X$؟
ب) أحسب $p(X=0)$.
ج) نقترح حساب $p(X=1)$
- بين أن احتمال الحصول على الكرة السوداء الوحيدة المسحوبة في السحب الثاني هو $\frac{8}{45}$ .
- بملاحظة أن الكرة السوداء الوحيدة المسحوبة يمكن أن تكون في السحب الأول أو الثاني أو الثالث، أحسب $p(X=1)$.

2) نرجع إلى الكيس في حالته الأصلية : 4 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء لا نفرق بينها عند اللمس. ليكن $n$ عدد طبيعي أكبر أو يساوي 3. نقوم بـ $n$ سحب متتابعة بنفس الطريقة السابقة. ليكن $k$ عدد طبيعي محصور بين 1 و $n$.
لتكن $E$ الحادثة : " الكرة المسحوبة ذات الرتبة $k$ سوداء و كل الكرات الأخرى المسحوبة بيضاء"
لتكن $A$ الحادثة : " نحصل على كرة بيضاء في كل ا السحبات $k-1$ الأولى و كرة سوداء في السحبة ذات الرتبة $k$ "
لتكن الحادثة $C$: " نحصل على كرة بيضاء في كل من $(n-k)$السحبات الأخيرة"

أحسب $p(A)$ ، $p_A(C)$ و $p(E)$ .

**التمرين 15**:

مربيان للطيور النادرة يقومان بتربية طيور يظهر لونها بعد شهر من تفقيس بيضها.
- بالنسبة للمربي الأول، بين اليوم الأول و الشهر، 20% من الطيور لا تبقى على قيد الحياة و 70% تصبح ملونة و 10% تبقى بيضاء.
- بالنسبة للمربي الثاني، اليوم الأول و الشهر ، 7% من الطيور لا تبقى على قيد الحياة و 80% تصبح ملونة و 13% تبقى بيضاء.

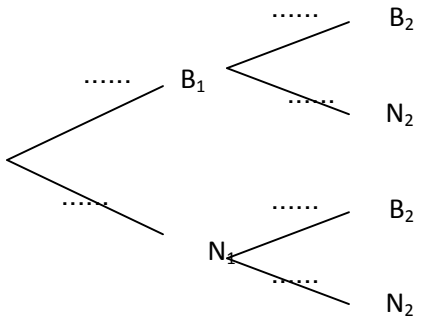
بائع طيور اشترى أفراخ طيور عمرها يوم واحد : $70\%$ من المربي الأول و $30\%$ من المربي الثاني.

1) يشتري طفل طائر من عند البائع يوم بعد وصولها إلى محل البائع، أي عمره يومان.
   أ) بين أن احتمال أن يكون الطائر حي بعد شهر هو $0,839$.
   ب) عين احتمال أن يكون الطائر ملون بعد شهر.
   ج) علما أن الطائر بقي أبيض بعد شهر، ما احتمال أن يكون من عند المربي الأول ؟
2) يختار شخص عشوائيا و بطريقة مستقلة خمسة طيور من عند البائع يوم بعد وصولها إلى محل البائع. ما احتمال أن تبقى بعد شهر، ثلاثة فقط على قيد الحياة ؟
3) قرر بائع الطيور الاحتفاظ بالطيور حتى يظهر لونها أي بعد شهر، حتى يبيعها بلونها النهائي. يربح $300$ $DA$ عن كل طائر ملون و $50$ $DA$ عن كل طائر أبيض و يخسر $10$ $DA$ عن كل طائر لا يبقى على قيد الحياة. نسمي $X$ المتغير العشوائي المساوي للربح الجبري لبائع الطيور عن كل طائر اشتراه. عين قانون الاحتمال لـ $X$ و أمله الرياضي.

**التمرين 16**:

صندوقان $U_1$ و $U_2$ يحتويان على كرات غير معروفة عند اللمس.
$U_1$ يحتوي على $k$ كرة بيضاء ( $k$ عدد طبيعي أكبر أو يساوي $1$) و $4$ كرات سوداء.
$U_2$ يحتوي على 3 كرات بيضاء و كرة سوداء.
نسحب عشوائيا كرة من $U_1$ و نضعها في $U_2$. نسحب عشوائيا بعد ذلك ، كرة من $U_2$ . مجموع هذه العمليات تمثل اختبار.
نسمي $B_1$ الحادثة " الكرة المسحوبة من $U_1$ بيضاء " و $N_1$ الحادثة " الكرة المسحوبة من $U_1$ سوداء" .
نسمي $B_2$ الحادثة " الكرة المسحوبة من $U_2$ بيضاء " و $N_2$ الحادثة " الكرة المسحوبة من $U_2$ سوداء" .

أ) أ- أنقل و أتمم الشجرة.




ب- بين أن احتمال الحادثة $B_2$ يساوي $\frac{4K+12}{5K+20}$.

فيما تبقى نأخذ $k=10$. السؤالان $2$ و $3$ مستقلان و يمكن الإجابة عنهما في أي ترتيب.

1. راهن أحمد $20$ $DA$ و قام باختبار ( سحب كرة من $U_1$ و وضعها في $U_2$ ثم سحب بعد ذلك ، كرة من $U_2$). إذا كانت الكرة المسحوبة من $U_2$ بيضاء فيربح $30$ $DA$ و إلا ، فلا يحصل على شيء و يخسر رهانه. ليكن $X$ المتغير العشوائي المساوي للربح الجبري لأحمد أي الفرق بين المبلغ المحصل علية و المبلغ الذي راهنه.
   أ) عين قيم $X$ .
   ب) عين قانون احتمال $X$ و احسب أمله الرياضي.
   ج) هل اللعبة ملائمة لأحمد ؟

2. يشارك أحمد $n$ مرة متتابعة لهذه اللعبة. في بداية كل لعبة $U_1$ يحتوي على *10* كرات بيضاء و *4* كرات سوداء و $U_2$ يحتوي على *3* كرات بيضاء و كرة سوداء و بالتالي الاختبارات المتتابعة مستقلة.
3. عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون احتمال تحقيق على الأقل مرة الحادثة $B_2$ يكون أكبر أو يساوي 0,99.

**التمرين 17**:

يحتوي كيس $U_1$ على 5كراتبيضاء و 7كرات سوداء و يحتوي كيس $U_2$ على كرة بيضاء و *11* كرة سوداء. كل الكرات غير معروفة عند اللمس.

1) للسيد أحمد زهرة نرد متجانسة تماما ذات ستة أوجه مرقمة من *1* إلى *6* . يرميه مرة: إذا حصل على الرقم *6* ، يسحب عشوائيا كرة من الكيس $U_1$ ، و إلا يسحب عشوائيا كرة من الكيس $U_2$.

أ) لتكن $B$ الحادثة: " السيد أحمد يحصل على كرة بيضاء ". بين أن $p(B) = \frac{5}{36}$.

ب) إذا حصل السيد أحمد على كرة بيضاء، هل احتمال أن تكون من $U_1$ أكبر من احتمال أن تكون من $U_2$؟

2) يكرر السيد أحمد الاختبار - *épreuve* – المعرفة في السؤال الأول مرتين ، في شروط متطابقة و مستقلة ( أي بعد الاختبار الأولى ، الكيسين يكون لهما نفس التركيبة الأولى ).

ليكن $x$ عدد طبيعي غير معدوم. أثناء كل اختبار من لاختبارين السيد أحمد يربح $x$ $DA$ إذا حصل على كرة بيضاء ويخسر *20* $DA$ إذا حصل على كرة سوداء. نرمز بـ $Y$ للمتغير العشوائي المرفق بالربح الجبري بعد الانتهاء من الاختبارين.

أ) عين قيم $Y$.

ب) عين قانون احتمال $Y$.

ج) عين الأمل الرياضي $E(Y)$ بدلالة $x$.

د) من أجل أي قيم للعدد $x$، يكون $E(Y) \geq 0$ ؟

**التمرين 18**: كيس به 5 كرات حمراء تحمل الاعداد 2 ،2،2-،3- ، أربع كرات خضراء تحمل الأعداد 3 ، 3 ، 3 ، 2- وكرة زرقاء تحمل العدد 1- .

نسحب من الكيس بطريقة عشوائية كرتين في آن واحد .

1- أحسب احتمال الحصول على :
أ – كرتين من نفس اللون .
ب – كرتين من لونين مختلفين .
ج - كرتين تحملان عددين جداؤهما سالبا .

2- نعرف من اجل كل سحبة من السحبات السابقة المتغير العشوائي $x$ كمايلي :
- إذا سحبنا كرتين تحملان نفس العدد نرفق لها العدد نفسه .
- إذا سحبنا كرتين تحملان عددين مختلفين نرفق لها العدد الأكبر .

- عين قيم المتغير العشوائي $x$ .
- عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي $x$ ، ثم أحسب أمله الرياضياتي .

**التمرين 19**:(مرفق بالحل )

يحتوي كيس على 3 كرات خضراء تحمل الرقم 0 كرتين حمراوين تحملان الرقم 5

وكرة سوداء تحمل الرقم $y$ حيث ($y$ عدد طبيعي غير معدوم و يختلف عن 5 و 10 )

كل الكريات لانميز بينها عند اللمس .

نسحب في آن واحد ثلاث كرات من الكيس .

1 - ما احتمال الحصول على :

$A$- 3 كرات من نفس اللون ؟

$B$-- 3 كرات ألوانها مختلفة ؟

$C$ كرتان فقط من نفس اللون ؟

3- ليكن $x$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام التي تحملها الكرات الثلاث .

- عين قانون الاحتمال ثم الامل الرياضي بدلالة $y$
- ما هي قيمة $y$ حتى يكون : $E(x) = 20$

**التمرين رقم 20 :**

تستقبل ثانوية التلاميذ الجدد المتوجهين الى السنة الأولى ثانوي من ثلاث متوسطات $M_1$ ، $M_2$ ، $M_3$ من بينهم 30 % من $M_1$ ، 15 % من $M_2$ ، والباقي من $M_3$ .

في أخر سنة نحصي عدد التلاميذ الذين يعيدون السنة

10% من تلاميذ المتوسطة $M_1$ يعيدون السنة .

25 % من تلاميذ المتوسطة $M_2$ يعيدون السنة .

5 % من تلاميذ المتوسطة $M_3$ يعيدون السنة .

نسمي $R$ " التلميذ الذي يعيد السنة "

نختار عشوائيا تلميذا من السنة أولى

1- شكل شجرة الإحتمالات .
2- ما احتمال أن يكون التلميذ المختار معيدا للسنة ؟
3- ما احتمال أن يكون التلميذ المختار من المتوسطة $M_3$ علما أنه معيد للسنة ؟

**التمرين 21 :**

الرقم السري لبطاقة بنكية عبارة عن عدد مكون من أربع ارقام مأخوذة من المجموعة$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ .

1- كم رقما سريا يمكن تشكيله ؟
2- الرقم السري للبطاقة مختار بطريقة عشوائية عن طريق الكمبيوتر .

- أحسب احتمال كل الحوادث التالية :
- $A$ " الرقم السري عبارة عن عدد زوجي " .
- $B$–" الرقم السري مكون من الارقام الزوجية فقط " .
- $C$- " الرقم السري يشمل مرة واحدة الرقم 1 " .
- $D$ -" الرقم السري مكون من ارقام مختلفة "

**التمرين 22 :**

**1- يحتوي كيس $U_1$ على 5 كرات ، ثلاث منها تحمل الرقم 2 وكرتان تحملان الرقم 3 .**

**ويحتوي كيس ثاني $U_2$ على 5 كرات : ثلاث منها بيضاء واثنان حمراء لايمكن التمييز بينها**

- **نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس $U_1$ ونسجل رقمه ، ثم نسحب عشوائيا و في آن واحد n كرة من الكيس $U_2$ بحيث n هو الرقم الذي تحمله الكرة المسحوبة من الكيس $U_1$ .**

**أ- ماهو إحتمال الحصول على ثلاثة كرات بيضاء .**

**ب-ماهو إحتمال الحصول على كرتين حمراء علما ان رقم الكرة المسحوبة من $U_1$ هو 3 .**

**2- ليكن $x$ المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة**

- **ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي $x$ .**
- **بين أن : $P(x=0)=\frac{11}{5\ 0}$**
- **حدد قانون إحتمال المتغير العشوائي $x$ .**
- **أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي $x$ .**

**التمرين 23 :**

لدينا كيسان يحتوي كل منهما على 5 كرات ، كرات الكيس الأول تحمل على التوالي الأرقام : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 2 وكرات الكيس الثاني تحمل على التوالي الأرقام : 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3

1- نسحب عشوائيا كرة من كل كيس و نعتبر المتغير العشوائي $x$ الذي يساوي مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين .

أ- حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي $x$ ؟

ب-اعط قانون احتمال المتغير العشوائي $x$ ؟

ت-أحسب احتمال الحصول على مجموع زوجي ؟

2- نكرر عملية السحب السابقة أربع مرات مع ارجاع الكرية المسحوبة الى الكيس المسحوبة منه في كل مرة .

- ما هو احتمال الحصول على ثلاثة مجاميع زوجية بالضبط ؟

**التمرين 24 :**

ثلاث صناديق $A\ ,B,C$ يحوي كل منها 10 كريات متماثلة بحيث :

الصندوق $A$ يحوي : كرتين حمراء و 8 خضراء

الصندوق $B$ يحوي : 3 كريات حمراء و 7 خضراء

الصندوق $C$ يحوي : 4 كريات حمراء و 6 خضراء

نأخذ عشوائيا أحد الصناديق ونسحب منه عشوائيا كرية واحدة .

1- شكل شجرة الاحتمالات لهذه الوضعية .
2- مااحتمال ان تكون الكرية المسحوبة حمراء ؟
3- مااحتمال ان تكون الكرية المسحوبة حمراء و آتية من الصندوق الأول ؟
4- اذا كانت الكرية المسحوبة حمراء فما هو احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق الأول ؟

**<u>التمرين 25 : بكالوريا 2018 شعبة ع ت</u>**

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس ، منها 4 كرات بيضاء مرقمة بـ : 1 ، 2 ، 2 و 3 كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات خضر مرقمة بـ : 2 ، 3 ، 3 .

نسحب عشوائيا في ان واحد 3 كريات من هذا الصندوق .

نعتبر الحادثتين $A$ : " الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني ".

و $B$ : " الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم " .

1) أ) أحسب : $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين $A$ و $B$ على الترتيب .

ب) بين أن : $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$ .

2) ليكن المتغير العشوائي $x$ الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا .

عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي $x$ و أحسب أمله الرياضياتي $E(x)$ .

**<u>التمرين 26: تمرين مع الحل المفصل</u>**

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء ، ثلاث كرات حمراء و كرتين سوداوين متشابهة لا نفرق بينها باللمس .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من الصندوق ، نعتبر الحدثين الاتيين :

$A$ : " الحصول على كرة حمراء واحدة فقط ".

و $B$ : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل " .

1) بين أن احتمال الحدث $A$ هو $P(A) = \frac{1}{2}$ ثم أحسب $P(B)$ إحتمال الحدث $B$ .
2) ليكن المتغير العشوائي $x$ الذي يرفق بكل مخرج عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ- عين قيم المتغير العشوائي $X$ .

ب- بين أن : $P(X=0)=\frac{1}{6}$ و $P(X=2)=\frac{3}{10}$ .

ت- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي $x$ و أحسب أمله الرياضياتي $E(x)$ .

# حلول السلسلة الخاصة بالاحتمالات
# طلبة البكالوريا

حل التمرين الأول :

عناصر A هي مضاعفات العدد 3 :

$$A = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,49\}$$

عناصر B هي مضاعفات العدد 4 :

$$B = \{0,4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,39,44,48\}$$

عناصر C هي مضاعفات العدد 3 و مضاعفات العدد 4 :

$$C = A \cap B = \{0,12,24,36,48\}$$

عناصر D هي مضاعفات العدد 3 او مضاعفات العدد 4 :

$$D = A \cup B = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,$$

$$42,45,49,4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,39,44,48\}$$

ب- حساب النسبة المئوية لكل لكل جزء منها في $\Omega$ :

$$P(B) = \frac{13}{100} \times 50 = 26\% ، P(A) = \frac{17}{100} \times 50 = 34\%$$

$$P(C) = \frac{25}{100} \times 50 = 50\% \quad ، P(C) = \frac{5}{100} \times 50 = 10\%$$

ج- التعبير عن النسب السابقة بكسر ناطق غير قابل للإختزال :

$$P(B) = \frac{26}{100} = \frac{13}{50} \quad ، P(A) = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$$

$$P(C) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \quad ، \quad P(C) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

2 - حساب احتمالي الحادثتين :

$$F = \{11,22,33,44\}$$

$$E = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\}$$

$$P(F) = \frac{4}{50} = \frac{2}{25} \quad ، \quad P(E) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

حل التمرين الثاني :

اللعبة الاولى :

| $x$ | 10 | -10 |
|---|---|---|
| $p(X=x)$ | $\frac{18}{37}$ | $\frac{19}{37}$ |

$$\overline{x_1} = 10 \times \frac{18}{37} - 10 \times \frac{19}{37} = -\frac{10}{37}$$

اللعبة الثانية :

| $x$ | 350 | -10 |
|---|---|---|
| $p(X=x)$ | $\frac{1}{37}$ | $\frac{36}{37}$ |

$$\overline{x_2} = 350 \times \frac{1}{37} - 10 \times \frac{36}{37} = -\frac{10}{37}$$

حل التمرين الثالث :

أ: $6 \times 6 \times 6 = 216$ أي: $6^3 = 216$.

ب: $6 \times 5 \times 4 = 120$ونرمز الى العدد $6 \times 5 \times 4$ ب : $A_6^3$ أي : $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4$

ج : $A_6^6 = 720$ نرمز الى العدد $A_6^6$ ب : $6!$ أي : $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ .

حل التمرين الرابع :

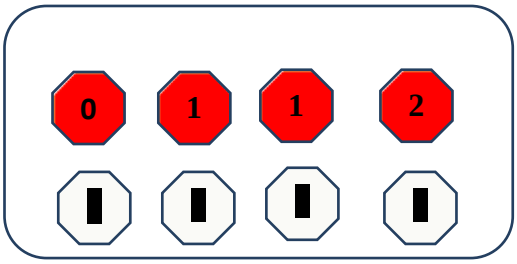
1- عدد الطرائق الممكنة : $a = \frac{20 \times 19}{2} = 190$ نرمز الى هذا العدد ب: $C_{20}^2 = \frac{20 \times 19}{2}$

2- اختيار تلميذين من القسم شريطة ألا يكون أحدهما أحمد : $C_{19}^2 = \frac{19 \times 18}{2} = 171$

3- اختيار تلميذين من القسم شريطة أن يكون أحدهما أحمد هو: $c = 1 \times 19 = 19$

4- نلاحظ أن : $a = b + c$ أي : $C_{20}^2 = C_{19}^2 + C_{19}^1$.

حل التمرين الخامس :




رسم توضيحي :

الحالات الممكنة لسحب 3 كرات هي :

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = 56$$

1- أ- نسمي $A$ حادثة الحصول على "ثلاث كرات من نفس اللون "

$$P(A) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_4^3 + C_4^3}{56} = \frac{4+4}{56} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

ب- نسمي $B$ حادثة الحصول على " ثلاث كرات تحمل نفس الرقم "

$$P(B) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_4^3 + C_3^3}{56} = \frac{4+1}{56} = \frac{5}{56}$$

ت- نسمي $C$ حادثة الحصول على " ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى "

$$P(C) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_1^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{56} = \frac{1*4*3}{56} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

2- أ – قيم المتغير العشوائي هي : $x = \{0,1,2,3\}$

$$P(x=0) = \frac{C_4^3}{56} = \frac{4}{56}$$

$$P(x=1) = \frac{C_4^1 * C_4^2}{56} = \frac{6*4}{56} = \frac{24}{56}$$

$$P(x=2) = \frac{C_4^2 * C_4^1}{56} = \frac{4*6}{56} = \frac{24}{56}$$

$$P(x=3) = \frac{C_4^3}{56} = \frac{4}{56}$$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x = xi)$ | $\frac{4}{56}$ | $\frac{24}{56}$ | $\frac{24}{56}$ | $\frac{4}{56}$ | 1 |

ب- حساب الأمل الرياضي :

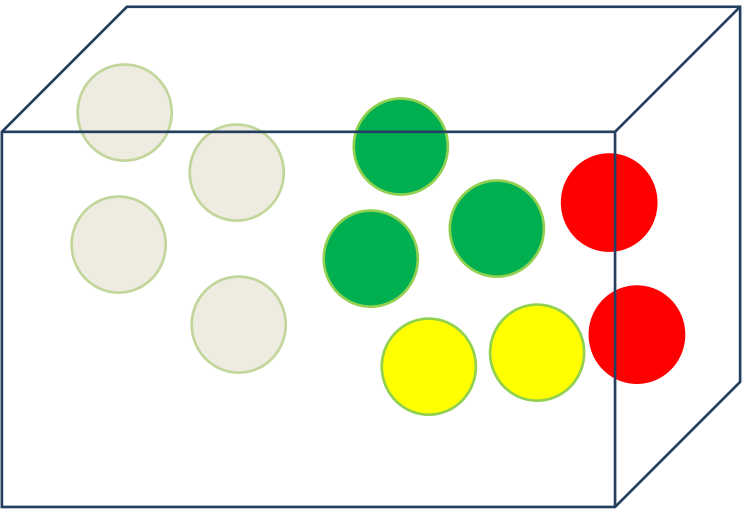
$$E(x) = \left(0 * \frac{4}{56}\right) + \left(1 * \frac{24}{56}\right) + \left(2 * \frac{24}{56}\right) + \left(3 * \frac{4}{56}\right) = 1.5$$

ت-حساب التباين والانحراف المعياري :

$$v(x) = \sum_{i=1}^{4} \left(xi - E(x)\right)^2 * pi = \frac{15}{28}$$

الانحراف المعياري : $\delta = \sqrt{v(x)} = 0.73$

حل التمرين السادس:



رسم توضيحي :

عدد الحالات الممكنة هو :

$$C_{11}^{2} = \frac{11!}{2!\,9!} = 55$$

1-نسمي $A$ حادثة سحب كرتين لونهما أحمر :

$$P(A) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_2^2}{C_{11}^2} = \frac{1}{55}$$

2-نسمي $B$ حادثة سحب كرتين لونهما أبيض :

$$P(B) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_4^2}{C_{11}^2} = \frac{6}{55}$$

3- نسمي $C$ حادثة سحب كرتين لونهما أصفر :

$$P(C) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_2^2}{C_{11}^2} = \frac{1}{55}$$

4- نسمي $D$ حادثة سحب كرتين لونهما أخضر :

$$P(D) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{3}{55}$$

1- احتمال سحب كرتين من نفس اللون :

نسمي الحادثة T"سحب كرتين من نفس اللون "

الطريقة 1 :

$$P(\mathrm{T}) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_2^2 + C_4^2 + C_3^2 + C_2^2}{C_{11}^2} = \frac{11}{55} = \frac{1}{5}$$

الطريقة 2 : بمأن الحوادث $A$، $B$، $C$ ، $D$ مستقلة فيمكننا حساب :

$$P(\mathrm{T}) = P(A) + P(\mathrm{B}) + P(\mathrm{C}) + P(\mathrm{D}) = \frac{11}{55} = \frac{1}{5}$$

-3- احتمال سحب كرتين مختلفتي اللون :

نسمي الحادثة $H$ " سحب كرتين مختلفتي اللون "

$$P(H) = 1 - P(\mathrm{T}) = \frac{4}{5}$$

4-- احتمال سحب كرتين لونهما ليس أبيض ولا أصفر:

نسمي الحادثة $R$ " سحب كرتين لونهما ليس أبيض ولا أصفر "

$$P(R) = \frac{C_5^2}{C_{11}^2} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$$

5—احتمال ان تكون احداهما على الاقل خضراء :

نسمي الحادثة $Z$ " ان تكون احداهما على الاقل خضراء "

$$P(Z) = \frac{C_3^1 C_8^1 + C_3^2 C_8^0}{C_{11}^2} = \frac{3 * 8 + 3}{55} = \frac{27}{55}$$

حل التمرين السابع :

رسم توضيحي :

1-أ-الحالات اللمكنة لسحب 3 كرات هي :

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = 56$$

-ب-$A$ حادثة الحصول على " ثلاث كرات من نفس اللون "

$$P(A) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_3^3 + C_4^3}{56} = \frac{1+4}{56} = \frac{5}{56}$$

$B$ حادثة الحصول على "كرة على الأقل حمراء "

$$P(B) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_4^1 \times C_4^2 + C_4^2 \times C_4^1 + C_4^3 \times C_4^0}{56} = \frac{24+24+4}{56}$$
$$= \frac{52}{56} = \frac{13}{14}$$

$C$ حادثة الحصول على "كرتين على الأكثر حمراء "

$$P(C) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_4^1 \times C_4^2 + C_4^2 \times C_4^1 + C_4^3 \times C_4^0}{56} = \frac{24+24+4}{56} = \frac{52}{56}$$
$$= \frac{13}{14}$$

2ـــتعيين قيم $x$ : $x = \{1,2,3\}$

$$P(x=1) = P(A) = \frac{5}{56}$$

$$P(x=3) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_1^1}{56} = \frac{12}{56}$$

استنتاج : $P(x=2) = ?$

لدينا : $P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = 1$

$$P(x=2) = 1 - (P(x=1)P(x=3))$$

$$P(x=2) = \frac{39}{56}$$

ج ـــ <u>حساب الامل الرياضي و التباين والانحراف المعياري :</u>

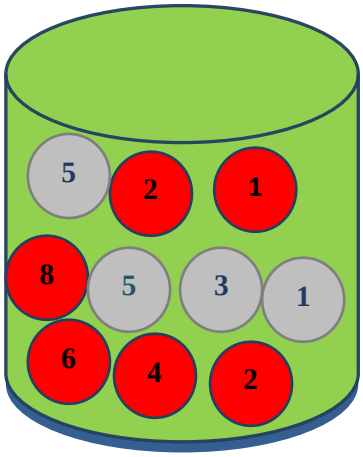
$$E(x) = \left(1 * \frac{5}{56}\right) + \left(2 * \frac{39}{56}\right) + \left(3 * \frac{12}{56}\right) = 2.12$$

ت-حساب التباين والانحراف المعياري :

$$v(x) = \sum_{i=1}^{3} \left(xi - E(x)\right)^2 * pi = 0.28$$

الانحراف المعياري : $\delta = \sqrt{v(x)} = 0.53$

<u>حل التمرين الثامن :</u>




نرمز الى القريصات الحمراء ب : $R$

نرمز الى القريصات البيضاء ب : $B$

<u>رسم توضيحي للعلبة :</u>

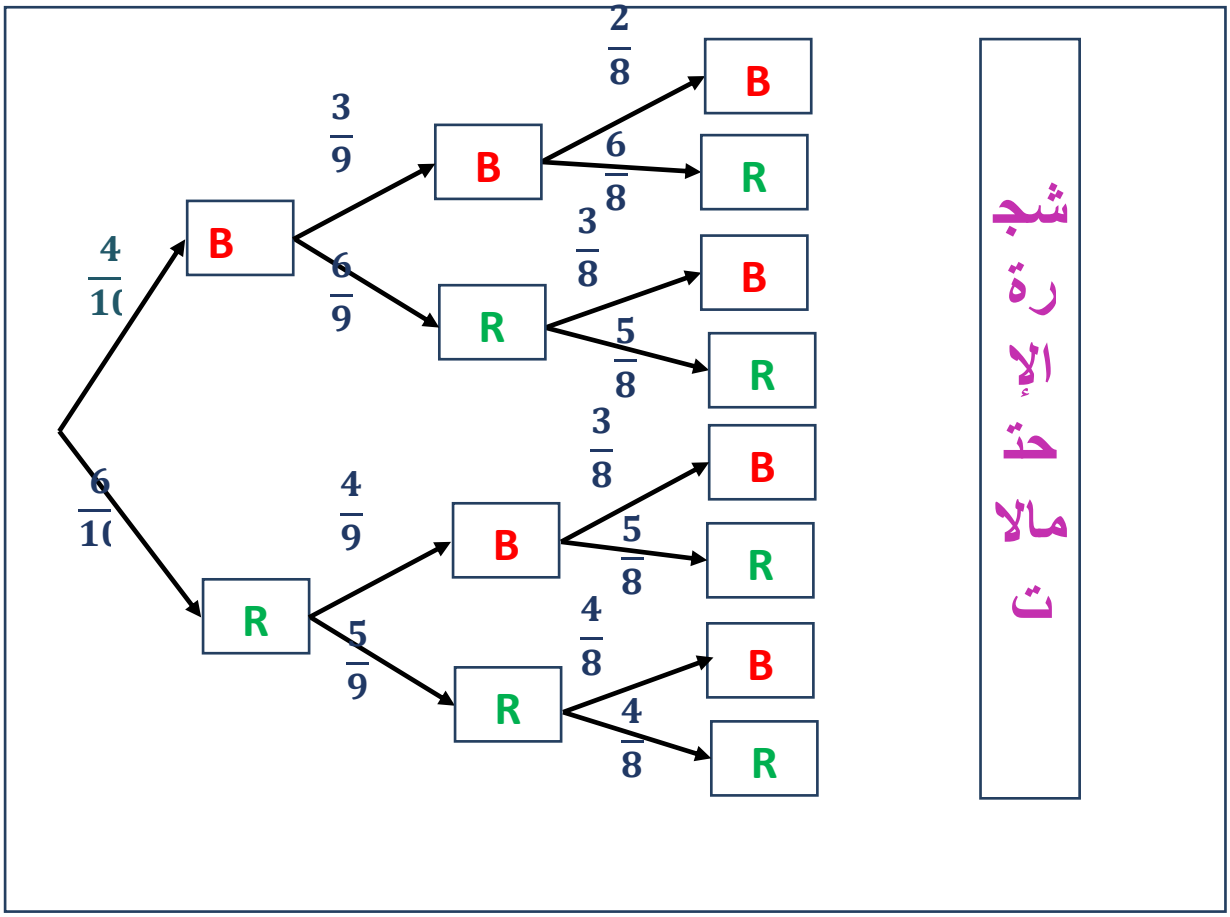
أ- شجرة الإحتمال :

ب- $P(B) = 1 - P(A) = \frac{576}{720}$

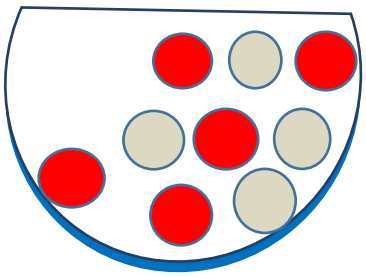
احتمال الحصول على 3 قريصات من نفس اللون :

$$P(A) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{144}{720}$$

ت-احتمال الحصول على 3 قريصات بلونين مختلفين :



حل التمرين التاسع :



الحالات اللمكنة لسحب 3 كرات هي :

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

نسمي $A$ حادثة الحصول على3 كرات بيضاء :

$$P(A) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_4^3}{120} = \frac{1}{30}$$

نسمي $B$ حادثة الحصول على الأقل على كرية حمراء:

$$P(B) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_6^1 C_4^2 + C_6^2 C_4^1 + C_6^3 C_4^0}{120} = \frac{36 + 60 + 20}{120} = \frac{29}{30}$$

2-قيم المتغير العشوائي هي : $x = \{0,1,2,3\}$

$$P(x = 0) = \frac{C_6^3}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$P(x = 1) = \frac{C_6^2 C_4^1}{120} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

$$P(x = 2) = \frac{C_6^1 C_4^2}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

$$P(x = 3) = \frac{C_6^0 C_4^3}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

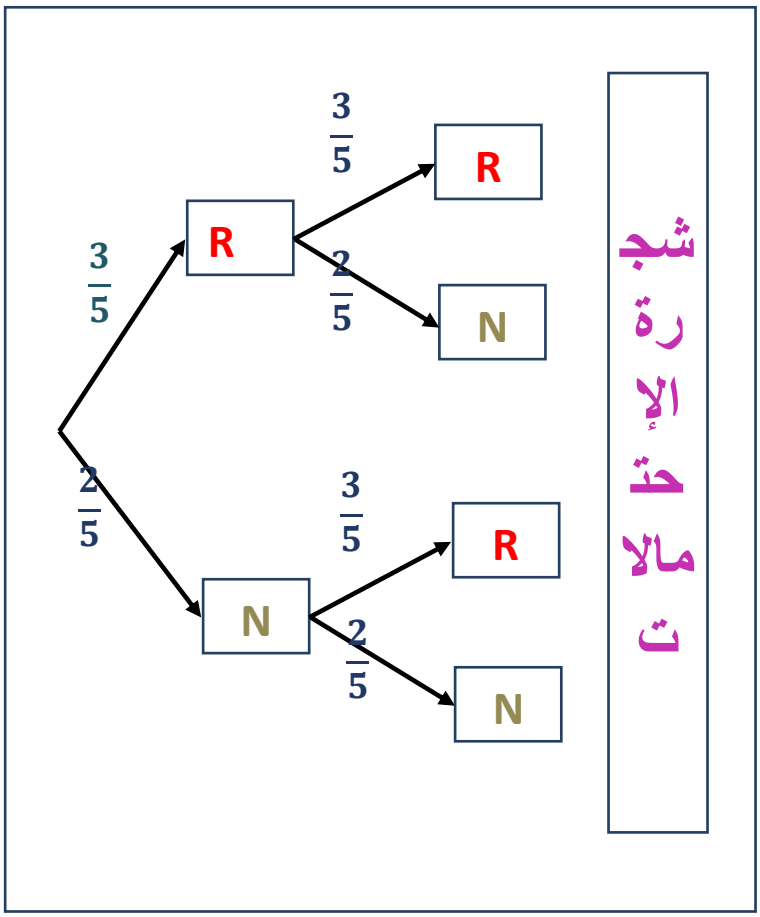
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x = xi)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{30}$ | 1 |

حساب الأمل الرياضي :

$$E(x) = \left(0 * \frac{1}{6}\right) + \left(1 * \frac{1}{2}\right) + \left(2 * \frac{3}{10}\right) + \left(3 * \frac{1}{30}\right) = \frac{6}{5}$$

<u>حل التمرين العاشر :</u>

التجربة 1 :




احتمال كرتين حمراويتين :

$$P(A) = \frac{3}{5} * \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

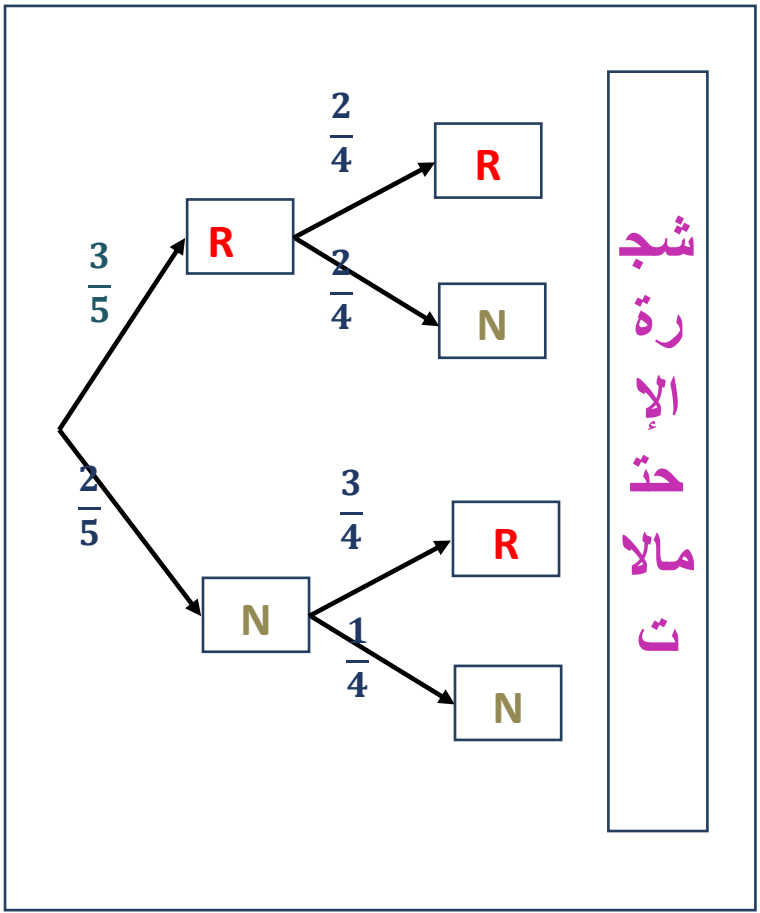
احتمال كرتين سوداوين :

$$P(B) = \frac{2}{5} * \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

احتمال كرتين ذو لونين مختلفين :

$$P(C) = \frac{3}{5} * \frac{2}{5} + \frac{3}{5} * \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

التجربة 2 :




احتمال كرتين حمراويتين :

$$P(A) = \frac{3}{5} * \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$

احتمال كرتين سوداوين :

$$P(B) = \frac{2}{5} * \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

احتمال كرتين ذو لونين مختلفين :

$$P(C) = \frac{3}{5} * \frac{2}{4} + \frac{2}{5} * \frac{3}{4} = \frac{12}{20}$$

حل التمرين 11:

عدد الحالات الممكنة ، أي عدد اللجان هو :

- $C_{12}^{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = 220$
- $A$ : " تكوين لجنة تضم 3 رجال " : $P(A) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_8^3}{220} = \frac{14}{55}$
- $B$تكوين لجنة تضم رجل وامرأتين "

$$P(B) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_8^1 \times C_4^2}{220} = \frac{12}{55}$$

- $C$ تكوين لجنة تضم ابراهيم" : $P(C) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_1^1 \times C_{11}^2}{220} = \frac{1}{4}$
- $D$تكوين لجنة تضم اما ابراهيم أو فاطمة " : $P(C) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} =$

$$\frac{C_1^1 \times C_{10}^2 + C_1^1 \times C_{10}^2}{220} = \frac{9}{22}$$

تعيين قيم $x$ : $x = \{0,1,2,3\}$

- $P(x=0) = \frac{C_4^3}{220} = \frac{1}{55}$
- $P(x=1) = 1 - P(B) = \frac{12}{55}$

- $P(x=2)=\frac{C_4^1\times C_8^2}{220}=\frac{28}{55}$

- $P(x=3)=1-P(A)=\frac{14}{55}$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x=xi)$ | $\frac{1}{55}$ | $\frac{12}{55}$ | $\frac{28}{55}$ | $\frac{14}{55}$ | 1 |

حساب الامل الرياضي و التباين والانحراف المعياري :

- $E(x)=\left(1*\frac{12}{55}\right)+\left(2*\frac{28}{55}\right)+\left(3*\frac{14}{55}\right)=2$

-حساب التباين والانحراف المعياري :

$$v(x)=\sum_{i=1}^{3}\left(xi-E(x)\right)^2*pi=\frac{6}{11}$$

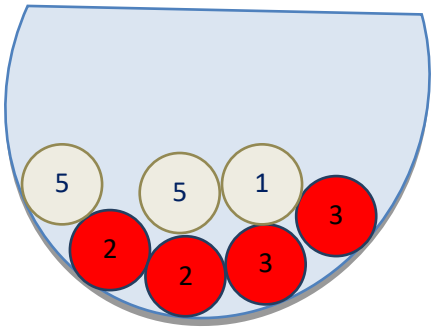
الانحراف المعياري : $\delta=\sqrt{\frac{6}{11}}$

حل التمرين 12:

- عدد الحالات الممكنة هي : $C_7^2=21$

1-احتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6 هو :

$$P(A)=\frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}}=\frac{C_2^1\times C_2^1+C_2^1\times C_2^1+C_2^2}{21}=\frac{9}{21}$$




ماهو احتمال أن يكون المجموع أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاوين :

2-

$$P(B)=\frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}}=\frac{C_2^2}{21}=\frac{1}{21}$$

أ - تعيين قيم المتغير العشوائي $x$ : $x=\{3,4,5,6,7,8,10\}$

ب - قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $x$ :

$$P(x=3)=\frac{C_1^1\times C_2^1}{21}=\frac{2}{21}$$

$$P(x=4)=\frac{C_2^2+C_1^1\times C_2^1+C_1^1\times C_2^1}{21}=\frac{3}{21}$$

$$P(x=5)=\frac{4}{21}$$

$$P(x=6)=\frac{3}{21}$$

$$P(x=7)=\frac{4}{21}$$

$$P(x=8)=\frac{4}{21}$$

$$P(x=10)=\frac{C_2^2}{21}=\frac{1}{21}$$

| $x$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x=xi)$ | $\frac{2}{21}$ | $\frac{3}{21}$ | $\frac{4}{21}$ | $\frac{3}{21}$ | $\frac{4}{21}$ | $\frac{4}{21}$ | $\frac{1}{21}$ | 1 |

- حساب الأمل الرياضي :

$$E(x)=\left(3*\frac{2}{21}\right)+\left(4*\frac{3}{21}\right)+\left(5*\frac{4}{21}\right)+\left(6*\frac{3}{21}\right)+\left(7*\frac{4}{21}\right)+\left(8*\frac{4}{21}\right)+\left(10*\frac{1}{21}\right)=$$

حساب التباين والانحراف المعياري :

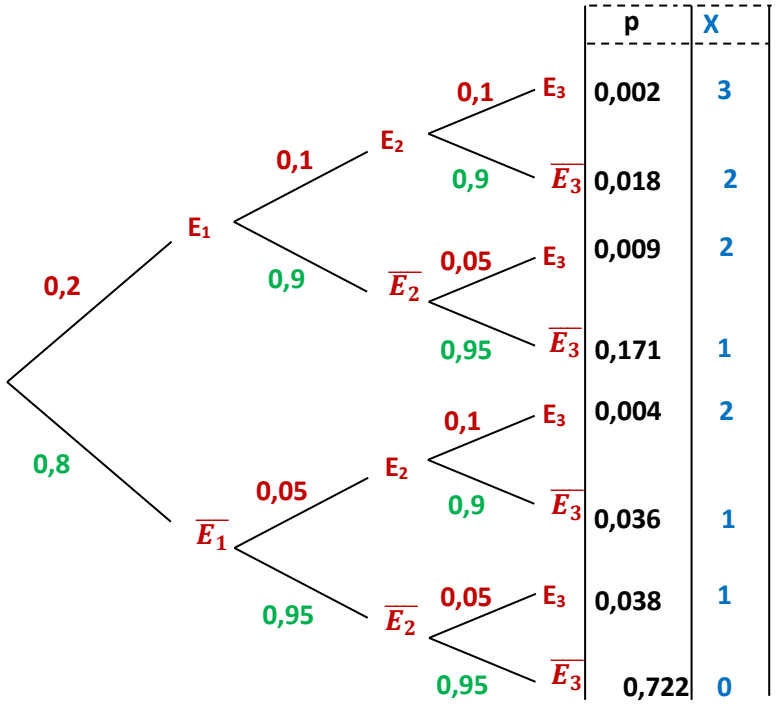
$$v(x)=\sum_{i=1}^{3}\left(xi-E(x)\right)^2*pi$$

الانحراف المعياري: $\delta=\sqrt{v}$

حل التمرين 13:-ملاحظة التمرين منقول -

1) $X$ :المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يخسر اللاعب خلال الجولات الثلاثة الأولى.

الشجرة المثقلة:




أ) قيم $X$: $X(\Omega)=\{0\,;1\,;2\,;3\}$

ب) نبين أن احتمال الحادثة $(X=2)$ يساوي $0,031$ و احتمال $(X=3)$ هو $0,002$:

$p(X=2)=0,018+0,009+0,004=0,031$

$p(X=3)=0,002$

ج) قانون احتمال $X$:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,722 | 0,245 | 0,031 | 0,002 | 1 |
| $x_i \cdot p_i$ | 0 | 0,245 | 0,062 | 0 ,006 | 0,313 |
| $x_i^2$ $p_i$ | 0 | 0,245 | 0,124 | 0,018 | 0,387 |

د) حساب الأمل الرياضي و التباين للمتغير $X$:

$E(X)=0,313$ ، $E(X^2)=0,387$

$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 = 0,387-(0,313)^2 = 0,289031$

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، نضع : $E_n$: الحادثة: " اللاعب يخسر الجولة $n$ "، $\overline{E_n}$ الحادثة المعاكسة لها و $p_n$ احتمال الحادثة $E_n$.

أ) عبارة احتمالات الحوادث $En \cap En+1$ و $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ بدلالة $p_n$:

لدينا: $p_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{p(E_{n+1} \cap E_n)}{p(E_n)}$ يكافئ $p(E_{n+1} \cap E_n) = p_{E_n}(E_{n+1}) \times p(E_n) = 0,1p_n$

و $p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{p(E_{n+1} \cap \overline{E_n})}{p(\overline{E_n})}$ يكافئ $p(E_{n+1} \cap \overline{E_n}) = p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \times p(\overline{E_n}) = 0,05(1-p_n)$

ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، $p_{n+1}=0,05p_n+0,05$ :

$$p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p\left(E_{n+1} \cap (E_n \cup \overline{E_n})\right) = p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \overline{E_n})$$

أي $p_{n+1} = 0,1p_n + 0,05(1 - p_n) = 0,05p_n + 0,05$

3) نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، أي $u_n = p_n - \frac{1}{19}$

$$p_n = u_n + \frac{1}{19}$$

أ) نبين أن $(u_n)$ متتالية هندسية:

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{19} = 0,05p_n + 0,05 - \frac{1}{19} = 0,05\left(u_n + \frac{1}{19}\right) - \frac{0,05}{19}$$
$$= 0,05u_n$$

ومنه $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=0,05$ و حدها الأول $u_1 = p_1 - \frac{1}{19} = 0,2 - -\frac{1}{19} = \frac{14}{95}$

.

ب) استنتاج، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، $u_n$ ثم $p_n$ بدلالة $n$:

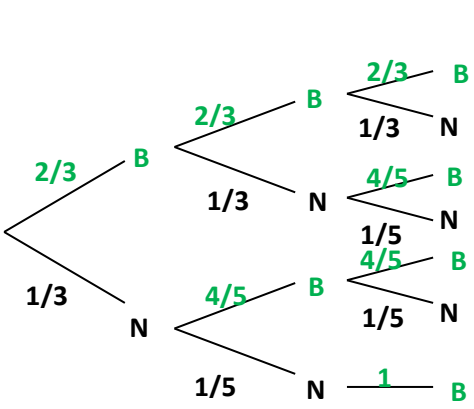
$$p_n = u_n + \frac{1}{19} = \frac{14}{95}(0,05)^{n-1} + \frac{1}{19} \quad \text{و} \quad u_n = u_1 q^{n-1} = \frac{14}{95}(0,05)^{n-1}$$

ج) حساب النهاية لـ $p_n$ لما $n$ يؤول إلى $+\infty$:

$$\lim_{+\infty} p_n = \frac{1}{19}$$

حل التمرين 14:

1) إنشاء شجرة:




| $p_i$ | X |
|---|---|
| 8/27 | 0 |
| 4/27 | 1 |
| 8/45 | 1 |
| 2/45 | 2 |
| 16/75 | 1 |
| 4/75 | 2 |
| 1/15 | 2 |

أ) قيم $X$:

$X(\Omega)=\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$

ب) حساب $p(X=0)$:

$$p(X = 0) = \frac{8}{27}$$

ج) نقترح حساب $p(X=1)$

- نبين أن احتمال الحصول على الكرة السوداء الوحيدة المسحوبة في السحب الثاني هو $\frac{8}{45}$.

$$p(BNB) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$$

- حساب $p(X=1)$:

$$p(X = 1) = \frac{4}{27} + \frac{8}{45} + \frac{16}{75} = \frac{364}{675}$$

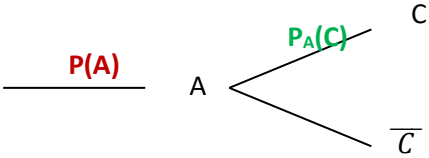
2) نرجع إلى الكيس في حالته الأصلية : 4 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء لا نفرق بينها عند اللمس. ليكن $n$ عدد طبيعي أكبر أو يساوي 3. نقوم بـ $n$ سحب متتابعة بنفس الطريقة السابقة.
ليكن $k$ عدد طبيعي محصور بين 1 و $n$.
لتكن $E$ الحادثة : " الكرة المسحوبة ذات الرتبة $k$ سوداء و كل الكرات الأخرى المسحوبة بيضاء"
لتكن $A$ الحادثة : " نحصل على كرة بيضاء في كل ا السحبات $k-1$ الأولى و كرة سوداء في السحبة ذات الرتبة $k$ "
لتكن الحادثة $C$: " نحصل على كرة بيضاء في كل من $(n-k)$السحبات الأخيرة"

- حساب $p(A)$ :

$$A = \left( \underbrace{BBB \dots B}_{\text{مرة}(k-1)} N \right)$$

$$p(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2^{k-1}}{3^k}.$$

- حساب $p_A(C)$:




نعلم أنه في السحب $k$ ، سحبنا كرة سوداء و بالتالي تبقى كرة سوداء و 4كرات بيضاء وبالتالي:

$$p_A(C) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$$

حساب $p(N)$:

$$E = A \cap C = \left( \underbrace{BBB \dots B}_{\text{مرة}(k-1)} N \underbrace{BB \dots .B}_{\text{مرة}\ (n-k)} \right)$$

لدينا:

$$p(E) = p(A) \times p_A(C) = \frac{2^{k-1}}{3^k} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} = \frac{2^{2n-k-1}}{3^k \times 5^{n-k}}$$ يكافئ $p_A(C) = \frac{p(A \cap C)}{p(A)} = \frac{p(N)}{p(A)}$

حل التمرين 15:

مربيان للطيور النادرة يقومان بتربية طيور يظهر لونها بعد شهر من تفقسها.

| النوع / المربي | يصبح ملون $C$ | يبقى أبيض $B$ | لا يبقى على قيد الحياة $M$ |
|---|---|---|---|
| $E1$ | $0,7$ | $0,1$ | $0,2$ |
| $E2$ | $0,8$ | $0,13$ | $0,07$ |

بالنسبة لبائع الطيور: 70% من المربي الأول و 30% من المربي الثاني.

1) يشتري طفل طائر من عند البائع يوم بعد وصولها إلى محل البائع، أي عمره يومان.

أ) نبين أن احتمال أن يكون الطائر حي بعد شهر هو $0,839$:

$$p(V)=0,8\times0,7+0,93\times0,3=0,839$$

ب) تعيين احتمال أن يكون الطائر ملون بعد شهر:

$$p(C)=0,7\times0,7+0,8\times0,3=0,73$$

ج) علما أن الطائر بقي أبيض بعد شهر، ما احتمال أن يكون من عند المربي الأول ؟

$$p_B(E1)=\frac{p(B\cap E1)}{p(B)}$$

$$p(B\cap E1)=0,1\times0,7=0,07$$

$$p(B)=0,1\times0,7+0,13\times0,3=0,109$$

$$p_B(E1)=\frac{p(B\cap E1)}{p(B)}=\frac{0,07}{0,109}\cong 0,642$$

2) يختار شخص عشوائيا و بطريقة مستقلة خمسة طيور من عند البائع يوم بعد وصولها إلى محل البائع.

احتمال أن تبقى بعد شهر، ثلاثة فقط على قيد الحياة :

لدينا اختبار برنولي ذات رتبة $n=5$ و احتمال $p=p(V)=0,839$.

نسمي $A$ الحادثة : " بعد شهر، تبقى ثلاثة فقط على قيد الحياة"

$$p(A)=C_5^3p^3(1-p)^3=10(0,839)^3(0,161)^2\cong 0,153$$

3) قرر بائع الطيور الاحتفاظ بالطيور حتى يظهر لونها أي بعد شهر، حتى يبيعها بلونها النهائي.

يربح $300\ DA$ عن كل طائر ملون و $50\ DA$ عن كل طائر أبيض و يخسر $10\ DA$ عن كل طائر لا يبقى على قيد الحياة. نسمي $X$ المتغير العشوائي المساوي للربح الجبري لبائع الطيور عن كل طائر اشتراه.

تعيين قانون الاحتمال لـ $X$ و أمله الرياضي.

- قيم $X$: $X=\{-10\ ;\ 50\ ;\ 300\}$

$$p(X=300)=p(C)=0,730$$

$$p(X=50)=p(B)=0,109$$

$$p(X=-10)=p(\overline{V})=1-p(V)=1-0,839=0,161$$

- قانون الاحتمال:

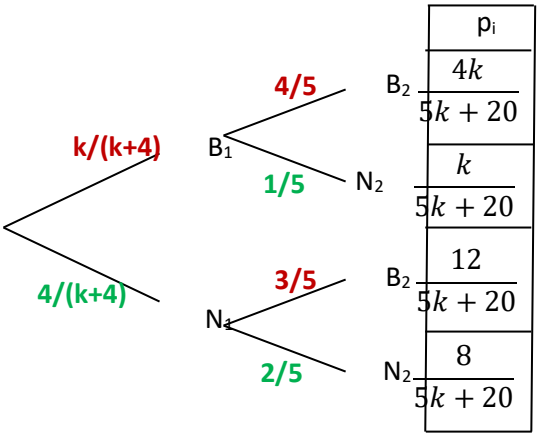
| $x_i$ | $-10$ | $50$ | $300$ | المجموع |
|---|---|---|---|---|

| $P_i$ | 0,161 | 0,109 | 0,730 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $x_i\ p_i$ | -1,61 | 5,45 | 219 | 222.84 |

$E(X)=222,84\ DA$

حل التمرين 16:

1) أ- إتمام الشجرة:




| $p_i$ |
|---|
| $\frac{4k}{5k+20}$ |
| $\frac{k}{5k+20}$ |
| $\frac{12}{5k+20}$ |
| $\frac{8}{5k+20}$ |

ب- نبين أن احتمال الحادثة $B_2$ يساوي $\frac{4K+12}{5K+20}$:

باستعمال قانون الاحتمالات الكلية نجد:

$p(B_2)=\frac{k}{k+4}\times\frac{4}{5}+\frac{4}{k+4}\times\frac{3}{5}=\frac{4k+12}{5k+20}$ و هو المطلوب ).

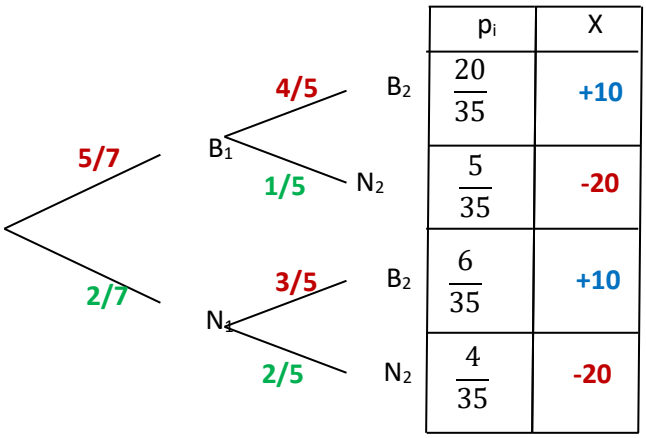
فيما تبقى نأخذ $k=10$. السؤالان 2 و 3 مستقلان و يمكن الإجابة عنهما في أي ترتيب.

2) راهن أحمد $20\ DA$ و قام باختبار ( سحب كرة من $U_1$ و وضعها في $U_2$. ثم سحب بعد ذلك ، كرة من $U_2$).

إذا كانت الكرة المسحوبة من $U_2$ بيضاء فيربح $30\ DA$ و إلا ، فلا يحصل على شيء و يخسر رهانه. ليكن $X$ المتغير العشوائي المساوي للربح الجبري لأحمد أي الفرق بين المبلغ المحصل علية و المبلغ الذي راهنه.

أ) تعيين قيم $X$:

$X(\Omega)=\{-20\ ;\ +10\}$




| $p_i$ | X |
|---|---|
| $\frac{20}{35}$ | +10 |
| $\frac{5}{35}$ | -20 |
| $\frac{6}{35}$ | +10 |
| $\frac{4}{35}$ | -20 |

ب) قانون احتمال $X$ و حساب أمله الرياضي:

| $x_i$ | -20 | +10 | المجموع |
|---|---|---|---|

| $P_i$ | $\frac{9}{35}$ | $\frac{26}{35}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $x_i\ p_i$ | $-\frac{180}{35}$ | $+\frac{260}{35}$ | $+\frac{80}{35}$ |

$$E(X) = \frac{80}{35} = \frac{16}{7} \cong 2{,}29\ \ DA$$

ج) هل اللعبة ملائمة لأحمد ؟

بما أن $E(X >) > 0$ فإن اللعبة ملائمة لأحمد.

3) يشارك أحمد $n$ مرة متتابعة لهذه اللعبة. في بداية كل لعبة $U_1$ يحتوي على $10$ كرات بيضاء و $4$ كرات سوداء و $U_2$ يحتوي على 3 كرات بيضاء و كرة سوداء و بالتالي الاختبارات المتتابعة مستقلة.

تعيين أصغر عدد طبيعي $n$ حتى يكون احتمال تحقيق على الأقل مرة الحادثة $B_2$ يكون أكبر أو يساوي $0{,}99$.

الاختبارات المتتابعة هي متطابقة و مستقلة ، لدينا نخطط برنولي و المتغير العشوائي $Y$ يتبع قانون ثنائي الحد $B(n, \frac{26}{35})$

لدينا: الحادثة " تحقيق على الأقل مرة الحادثة $B_2$" هي الحادثة المعاكسة للحادثة "الحادثة $B_2$ لا تتحقق "

أي : $(Y \geq 1) = \overline{(Y = 0)}$

ومنه $p\ (Y \geq 1\ ) \geq 0{,}99$ يكافئ $1 - p(Y=0) \geq 0{,}99$ أي $p(Y=0) \leq 0{,}01$ أي

$$\left(\frac{9}{35}\right)^n \leq 0{,}01$$

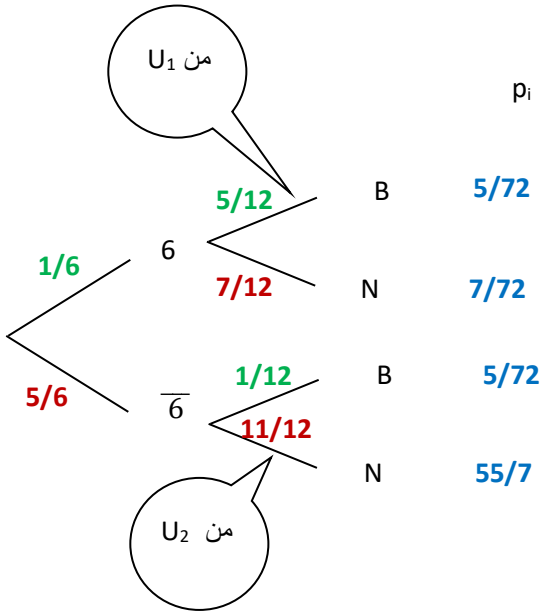
يكافئ $n \geq \frac{ln(0{,}01)}{ln\left(\frac{9}{35}\right)}$ أي $n \geq 9{,}01$.

أصغر عدد طبيعي $n$ حتى يكون احتمال تحقيق على الأقل مرة الحادثة $B_2$ يكون أكبر أو يساوي $0{,}99$ هو $10$.

حل التمرين 17:

يحتوي كيس $U_1$ على 5كرات بيضاء و 7كرات سوداء و يحتوي كيس $U_2$ على كرة بيضاء و $11$ كرة سوداء. كل الكرات غير معروفة عند اللمس.

1) للسيد أحمد زهرة نرد متجانسة تماما ذات ستة أوجه مرقمة من $1$ إلى $6$ . يرميه مرة: إذا حصل على الرقم $6$ ، يسحب عشوائيا كرة من الكيس $U_1$ ، و إلا يسحب عشوائيا كرة من الكيس $U_2$.




أ) لتكن $B$ الحادثة: " السيد أحمد يحصل على كرة بيضاء ".

- نبين أن $p(B) = \frac{5}{36}$:

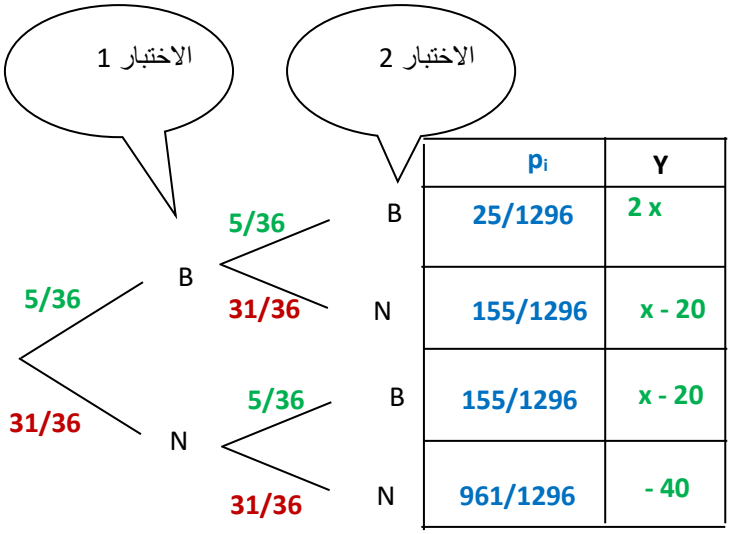
باستعمال قوانين الاحتمالات الكلية نجد: $p(B) = \frac{5}{72} + \frac{5}{72} = \frac{5}{36}$

ب) إذا حصل السيد أحمد على كرة بيضاء، هل احتمال أن تكون من $U_1$ أكبر من احتمال أن تكون من $U_2$؟

$p_B(U_1) = \frac{p(B \cap U_1)}{p(B)} = \frac{\left(\frac{5}{72}\right)}{\left(\frac{10}{72}\right)} = \frac{1}{2}$ و $p_B(U_2) = \frac{p(B \cap U_2)}{p(B)} = \frac{\left(\frac{5}{72}\right)}{\left(\frac{10}{72}\right)} = \frac{1}{2} = p_B(U_1)$

2) يكرر السيد أحمد الاختبار - *épreuve* – المعرفة في السؤال الأول مرتين ، في شروط متطابقة و مستقلة ( أي بعد الاختبار الأولى ، الكيسين يكون لهما نفس التركيبة الأولى ).

ليكن $x$ عدد طبيعي غير معدوم. أثناء كل اختبار من لاختبارين السيد أحمد يربح $x$ $DA$ إذا حصل على كرة بيضاء ويخسر $20$ $DA$ إذا حصل على كرة سوداء. نرمز بـ $Y$ للمتغير العشوائي المرفق بالربح الجبري بعد الانتهاء من الاختبارين.




| $p_i$ | Y |
|---|---|
| 25/1296 | 2 x |
| 155/1296 | x - 20 |
| 155/1296 | x - 20 |
| 961/1296 | - 40 |

أ) تعيين قيم $Y$:

$Y(\Omega)=\{ -40 ; x-20 ; 2x \}$

ب) قانون احتمال $Y$:

| $y_i$ | -40 | $x-20$ | $2x$ | المجموع |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 961/1296 | 310/1296 | 25/1296 | |
| $y_i p_i$ | -51840/1296 | $(310x-6200)/1296$ | $50x/1296$ | $(360x-58040)/1296$ |

ج) عين الأمل الرياضي $E(Y)$ بدلالة $x$:

$$E(Y)=\frac{360x-58040}{1296}$$

د) تعيين قيم للعدد $x$ حيث: $E(Y)\geq 0$:

$E(Y)\geq 0$ يكافئ $360x-58040\geq 0$ يكافئ $x\geq 161,24$

قيم $x$ حيث: $E(Y)\geq 0$ :هي الأعداد الطبيعية الأكبر أو تساوي 162.

حل التمرين 18:

رسم توضيحي :

1-أ-الحالات اللمكنة لسحب 3 كرات هي :

$$C_{10}^{2}=45$$

ب-$A$ حادثة الحصول على "كرتين من نفس اللون "

$$P(A)=\frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}}=\frac{C_5^2+C_4^2}{45}=\frac{10+6}{45}=\frac{16}{45}$$

$B$ حادثة الحصول على " كرتين من لونين مختلفين "

$$P(B)=\frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}}=\frac{C_1^1\times C_5^1+C_5^1\times C_4^1+C_1^1\times C_4^1}{45}=\frac{29}{45}$$

$C$ حادثة الحصول على "كرتين تحملان عددين جداءهما سالبا "

$$P(C) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_7^1 \times C_3^1}{45} = \frac{21}{45}$$

2ـــتعيين قيم $x$ : $x = \{-2, -1, 2, 3\}$

$$P(x = -2) = \frac{C_2^2}{45} = \frac{1}{45}$$

$$P(x = -1) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{45} = \frac{2}{45}$$

$$P(x = 2) = \frac{C_3^2 + C_3^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_2^1}{45} = \frac{12}{45}$$

$$P(x = 3) = \frac{C_4^2 + C_3^1 \times C_4^1 + C_4^1 \times C_2^1 + C_4^1 \times C_1^1}{45} = \frac{30}{45}$$

| $x$ | -2 | -1 | 2 | 3 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x = xi)$ | $\frac{1}{45}$ | $\frac{2}{45}$ | $\frac{12}{45}$ | $\frac{30}{45}$ | 1 |

ج ـــحساب الامل الرياضي و التباين والانحراف المعياري :

$$E(x) = \frac{22}{9}$$

حل تمرين 19 :

رسم توضيحي :

أ-الحالات الممكنة لسحب 3 كرات هي :

$$C_6^3 = 20$$

ب-$A$ حادثة الحصول على "3كرات من نفس اللون "

أي 3 كرات خضراء

$$P(A) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_3^3}{20} = \frac{1}{20}$$

$B$ حادثة الحصول على "3 كرات ألوانها مختلفة "

اي واحدة خضراء و واحدة حمراء و واحدة سوداء

$$P(B) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{20} = \frac{6}{20}$$

$C$ حادثة الحصول على "كرتان فقط من نفس اللون "

اي : كرتين خضراوين و 1 من البقية

أو

كرتين حمراوين و 1 من البقية .

$$P(C) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_3^2 \times C_3^1 + C_2^2 \times C_4^1}{20} = \frac{13}{20}$$

2—تعيين قيم $x$ : $x = \{0,5,10, y, y+5, y+10\}$

3 كرات خضراء

$$P(x=0) = P(A) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_3^3}{20} = \frac{1}{20}$$

$P(x=5) = \frac{C_3^2 \times C_2^1}{20} = \frac{6}{20}$ (اي كرتين خضراوين وواحدة حمراء )

$P(x=10) = \frac{C_2^2 \times C_3^1}{20} = \frac{3}{20}$(كرتين حمراوين وواحدة خضراء )

$(x=y) = \frac{C_3^2 \times C_1^1}{45} = \frac{3}{20}$ (اي 2 خضراوين و واحدة سوداء )

$P(x=y+5) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{45} = \frac{6}{20}$ (اي واحدة خضراء و واحدة حمراء و واحدة سوداء )

$(x=y+10) = \frac{C_2^2 \times C_1^1}{45} = \frac{1}{20}$ (اي 2حمراوين و واحدة سوداء )

| $x$ | 0 | 5 | 10 | $y$ | $y+5$ | 10+$y$ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| $p(x = xi)$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{6}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{6}{20}$ | $\frac{1}{20}$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

ج- كتابة الامل الرياضي بدلالة $y$ وقيمة $y$ حتى يكون : $E(x) = 20$:

$$E(x) = \left(0 * \frac{1}{20}\right) + \left(5 * \frac{6}{20}\right) + \left(10 * \frac{3}{20}\right) + \left(y * \frac{3}{20}\right) + \left((y+5) * \frac{6}{20}\right) + \left((y+10) * \frac{1}{20}\right) = 20$$

بعد التبسيط نجد :

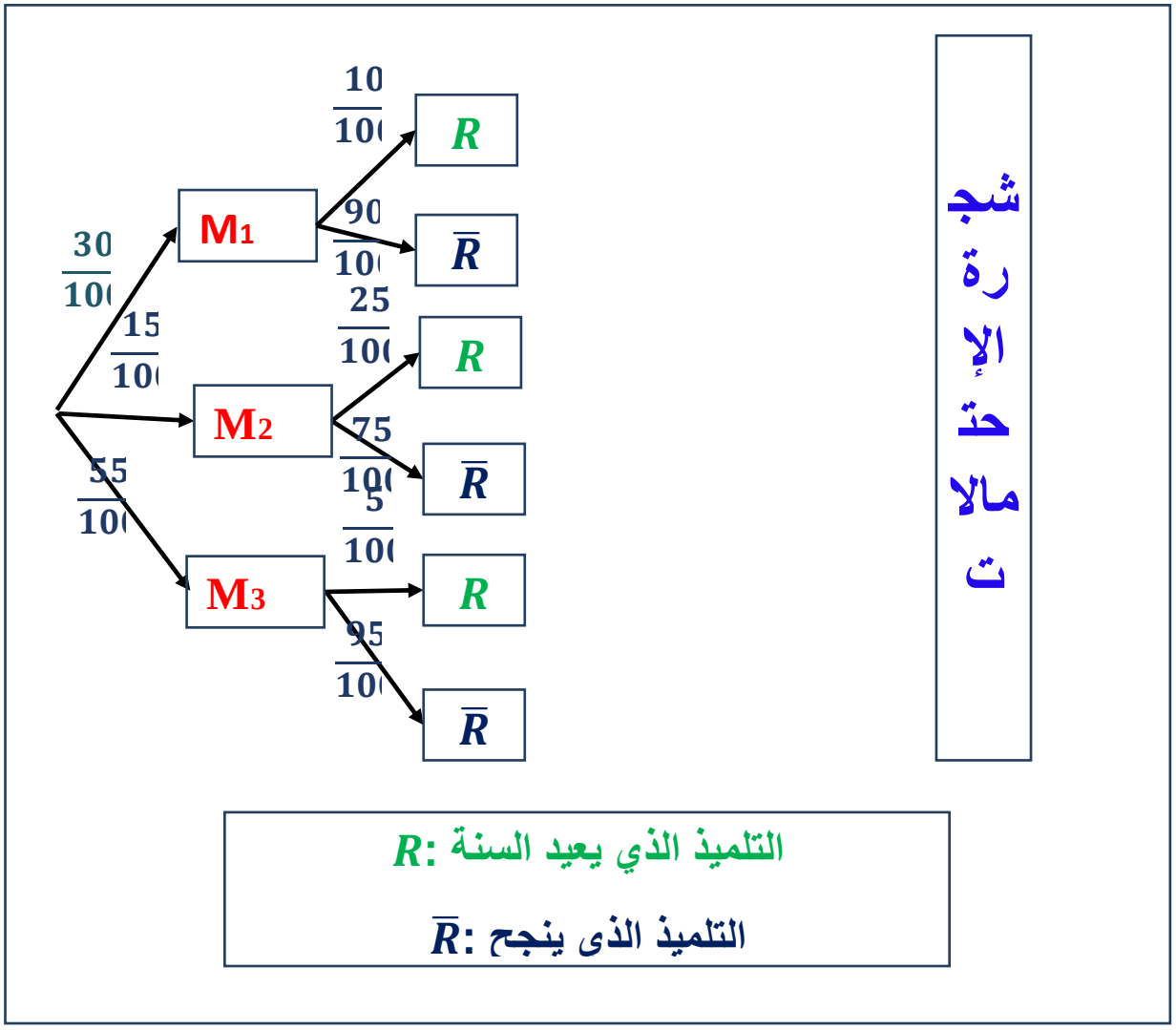
$$E(x) = \frac{1}{2}y + 5$$

قيمة $y$ حتى يكون : $E(x) = 20$:

$E(x) = \frac{1}{2}y + 5 = 0$ أي : $y = 30$ .

حل التمرين 20 :

1- رسم توضيحي لشجرة الإحتمالات :




2- احتمال أن يكون التلميذ المختار معيدا للسنة :

$$R = (M1 \cap R) \cup (M2 \cap R) \cup (M3 \cap R)$$

باستعمال نظرية الإحتمالات الكلية :

$$P(R) = P(M1 \cap R) \cup P(M2 \cap R) \cup P(M3 \cap R)$$

$$P(R) = \left(\frac{30}{100} \times \frac{10}{100}\right) + \left(\frac{15}{100} \times \frac{25}{100}\right) + \left(\frac{55}{100} \times \frac{5}{100}\right)$$

$$P(R) = 0.095$$

3- احتمال أن يكون التلميذ المختار من المتوسطة $M_3$ علما أنه معيد للسنة أي حساب الاحتمال الشرطي

$$P_R(\text{M3}) = \frac{P(\text{M3} \cap R)}{P(R)}$$

$$P_R(\text{M3}) = \frac{\left(\frac{55}{100} \times \frac{5}{100}\right)}{0.095} = 0.29$$

حل التمرين 21 :

1- عدد الأرقام السرية هي: $n^p = 9^4 = 6561$

2- الرقم السري عبارة عن عدد زوجي :

$$P(A) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{1^1 \times 9^3 + 1^1 \times 9^3 + 1^1 \times 9^3 + 1^1 \times 9^3}{9^4} = \frac{4}{9}$$

3- الرقم السري مكون من الارقام الزوجية فقط :

$$P(B) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{4^4}{9^4} = \frac{256}{6561}$$

4- الرقم السري يشمل مرة واحدة الرقم 1 :

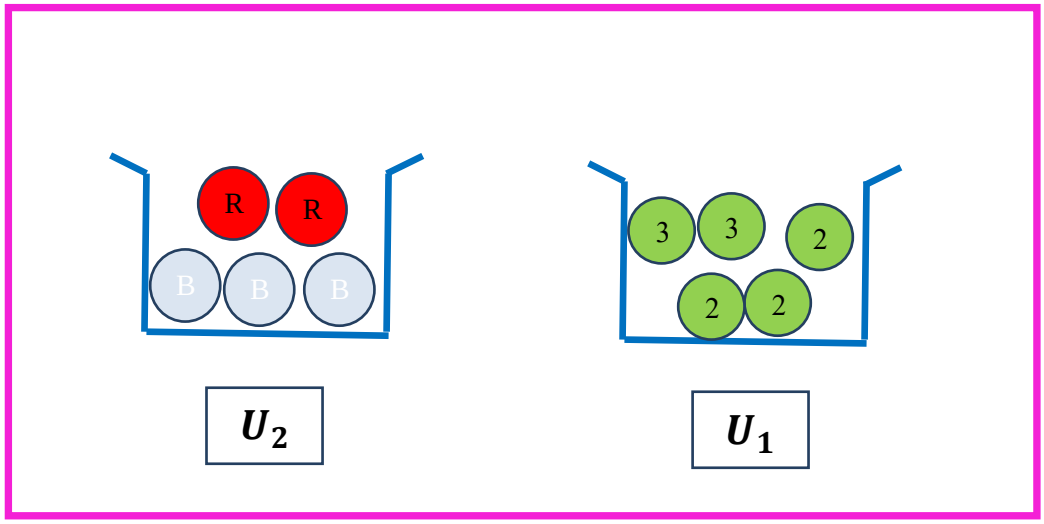
$$P(C) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{1^1 \times 8^3 + 1^1 \times 8^3 + 1^1 \times 8^3 + 1^1 \times 8^3}{9^4} = \frac{2048}{6561}$$

5- الرقم السري مكون من ارقام مختلفة :

$$P(D) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{A_9^4}{9^4} = \frac{3024}{6561}$$

حل التمرين 22 : يتم العمل عليه لإضافته

رسم توضيحي :




1- إحتمال الحصول على ثلاثة كرات بيضاء :

$$P(A) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_2^1}{C_5^1} \times \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{50}$$

2- إحتمال الحصول على كرتين حمراء علما ان رقم الكرة المسحوبة من $U_1$ هو 3 :

$$P_B(R) = \frac{p(R \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{C_2^1}{C_5^1} \times \frac{C_2^2 \times C_3^1}{C_5^3}}{\frac{C_2^1}{C_5^1}} = \frac{3}{10}$$

- القيم الممكنة ل $x$: بما أن عدد الكرات الحمراء هو 2 فانه مهما كانت قيمة $n$ (2 او 3 ) فإن عدد الكرات الحمراء التي يمكن سحبها في آن واحد هي : 0 او 1 او 2
- تبيان أن : $P(x = 0) = \frac{11}{50}$

الحادثة : $(x = 0)$ معناه عدم سحب اي كرة حمراء اذا :

سحب كرة تحمل الرقم 2 من U1 وسحب كرتين بيضاويتين من U2

أو

سحب كرة تحمل الرقم 3 من U1 وسحب 3 كرات بيضاء من U2

ومنه : $P(x = 0) = \left(\frac{C_3^1}{C_5^1} \times \frac{C_3^2}{C_5^2}\right) + \left(\frac{C_2^1}{C_5^1} \times \frac{C_3^3}{C_5^3}\right) = \frac{11}{50}$

3- قانون الاحتمال :

$$P(x = 1) = 1 - \left(\frac{11}{50} + \frac{9}{50}\right) = \frac{30}{50}$$

$$P(x=2)=\left(\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_2^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^2\times C_3^1}{C_5^3}\right)=\frac{9}{50}$$

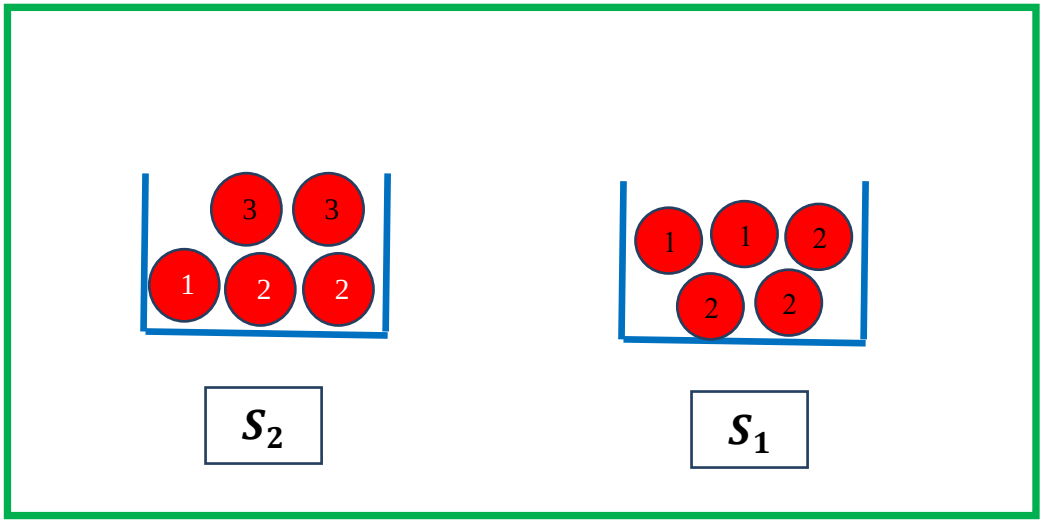
| $x$ | 0 | 1 | 2 | المجموع |
|---|---|---|---|---|
| $p(X=xi)$ | $\frac{11}{50}$ | $\frac{30}{50}$ | $\frac{9}{50}$ | 1 |

ج-حساب الامل الرياضياتي : $E(x)$:

$$E(x)=\left(0*\frac{11}{50}\right)+\left(1*\frac{30}{50}\right)+\left(2*\frac{9}{50}\right)=\frac{24}{25}$$

حل التمرين 23 :

-1




أ- القيم التي يأخذها $x$

الجدول التالي يعطي في كل حالة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين :

| سحبة1S / سحبة2S | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 |

القيم الممكنة هي : 2 ، 3 ، 4 ، 5

ب-قانون الاحتمال :

من الجدول نستنتج أن :

$$P(x=2)=\frac{2}{25}$$

$$P(x=3)=\frac{7}{25}$$

$$P(x=4)=\frac{10}{25}$$

$$P(x=5)=\frac{6}{25}$$

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $p(X=k)$ | $\frac{2}{25}$ | $\frac{7}{25}$ | $\frac{10}{25}$ | $\frac{6}{25}$ |

ج – احتمال الحصول على مجموع زوجي :

هذا الاحتمال هو :

$$P(s)=P(x=2)+P(x=4)=\frac{2}{25}+\frac{10}{25}=\frac{12}{25}$$

2- احتمال الحصول على ثلاثة مجاميع زوجية بالضبط :

$C_4^3\left(\frac{12}{25}\right)^3\left(1-\frac{12}{25}\right)^1$ أي : $\frac{89856}{390625}$

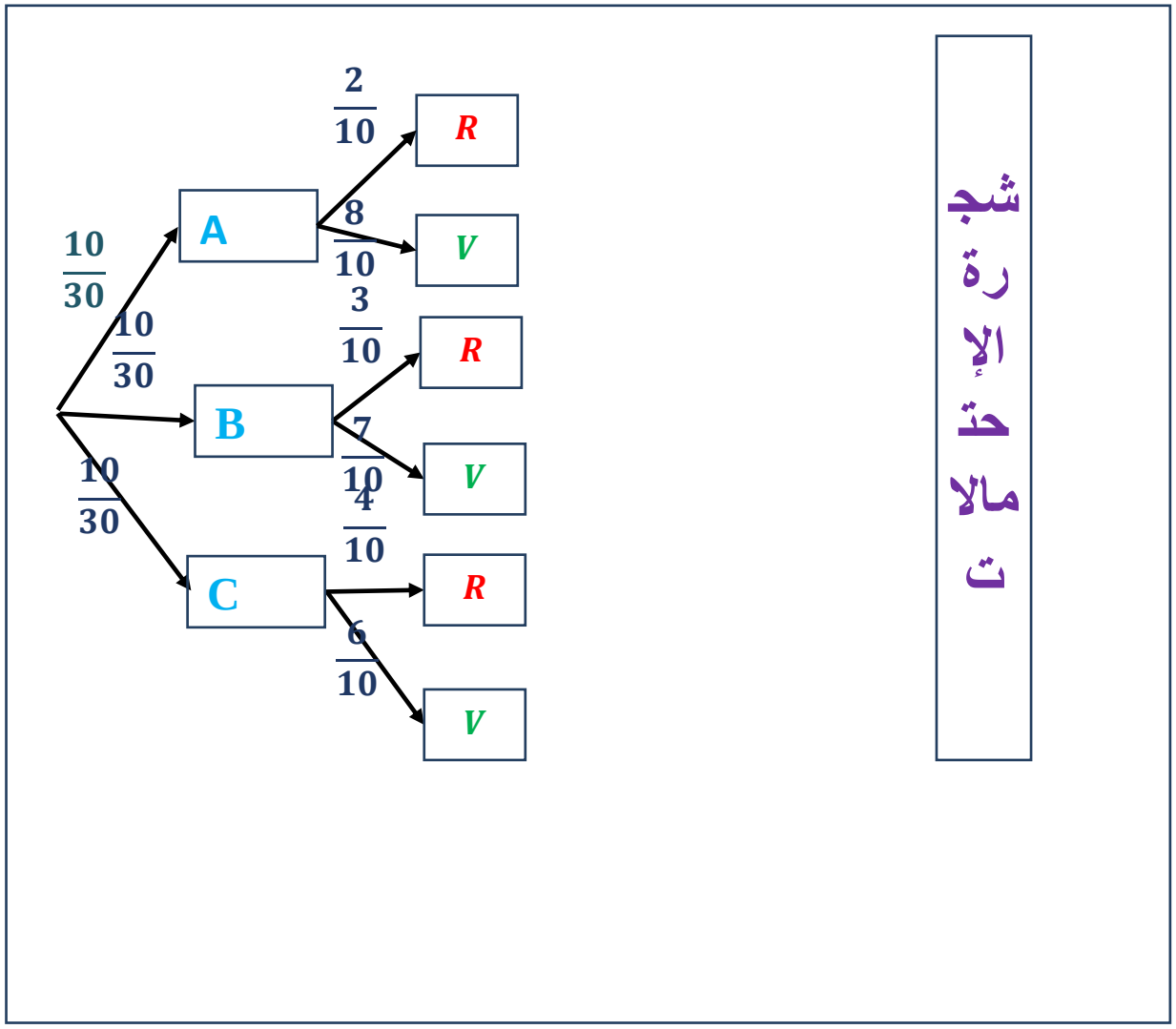
حل التمرين 24 : مقترح

1 – شجرة الاحتمالات :

نرمز الى الكرية الحمراء ب : $R$

نرمز الى الكرية الخضراء ب : $V$

2 -




احتمال ان تكون الكرية المسحوبة حمراء هي :

$$P(R) = \frac{10}{30} \times \frac{2}{10} + \frac{10}{30} \times \frac{3}{10} + \frac{10}{30} \times \frac{4}{10} = \frac{9}{30}$$

3- احتمال ان تكون الكرية المسحوبة حمراء و آتية من الصندوق الأول هي :

$$P(R \cap A) = \frac{10}{30} \times \frac{2}{10} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

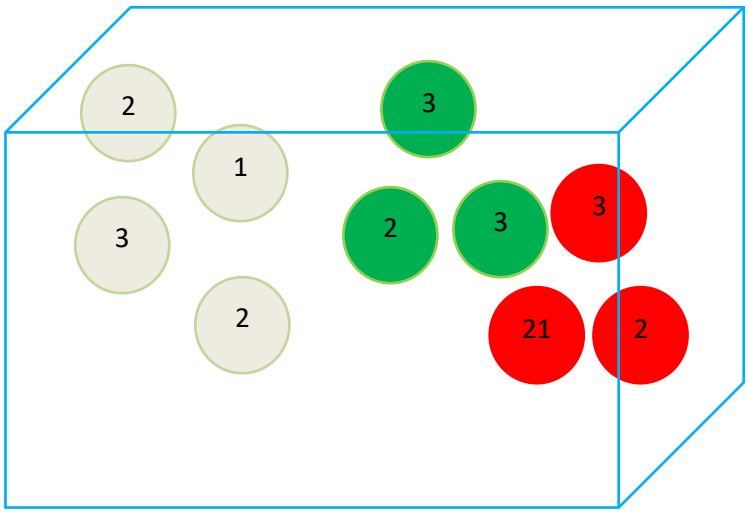
4- حساب احتمال اذا كانت الكرية المسحوبة حمراء علما انها قد سحبت من الصندوق الأول

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)}$$

$$P_R(A) = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{9}{30}} = \frac{2}{9}$$

حل التمرين 25 :

رسم توضيحي :




أ-الحالات الممكنة لسحب 3 كرات هي :

$$C_{10}^3 = 120$$

- حساب $P(A)$ :
- $P(A) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_4^1}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$
- حساب $P(B)$ :

$B$ حادثة الحصول على " 3 كرات من نفس الرقم "

$$P(B) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_5^3 + C_4^3}{120} = \frac{14}{120}$$

ب) بين أن : $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$:

حادثة $A \cap B$ معناه : " الكريات الثلاثة المسحوبة تحمل الوان العلم الوطني و لها نفس الرقم "

أي سحب : سحب كرة رقم 1 بيضاء و كرة رقم 1 خضراء و كرة رقم 1 حمراء (مستحيلة ) أو سحب كرة رقم 2 حمراء و كرة رقم 2 خضراء وكرة رقم 2 بيضاء ( ممكنة ) أو سحب كرة رقم 3 حمراء و كرة رقم 3 بيضاء و كرة رقم 3 خضراء (ممكنة )

ومنه :

$$P(A \cap B) = 0 + \frac{C_2^1 \times C_1^1 \times C_2^1}{120} + \frac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

استنتاج $P_A(B)$ :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{6}$$

واستنتاج $P(A \cup B)$ :

لدينا : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ أي :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{22}{60} = \frac{11}{30}$$

2—تعيين قيم $x$ : $x = \{0,1,2,3\}$

الحالة الاولى 0 كرة فردية :

$$P(x = 0) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_5^2}{120} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

الحالة الثانية 1 كرة فردية :

$$P(x = 1) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_4^1 \times C_5^2}{120} + \frac{C_1^1 \times C_5^2}{120} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

الحالة الثالثة 2 كرة فردية :

$$P(x = 2) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_4^2 \times C_5^1}{120} + \frac{C_1^1 \times C_4^1 \times C_5^1}{120} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

الحالة الرابعة 3 كرة فردية :

$$P(x = 3) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_4^3}{120} + \frac{C_4^2 \times C_1^1}{120} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x = xi)$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | 1 |

ج-حساب الامل الرياضي: $E(x)$:

$$E(x) = \left(0 * \frac{1}{12}\right) + \left(1 * \frac{5}{12}\right) + \left(2 * \frac{5}{12}\right) + \left(3 * \frac{1}{12}\right) = \frac{3}{2}$$

حل التمرين 26 :

1) تبيان أن احتمال الحدث $A$ هو $P(A) = \frac{1}{2}$ :

$$P(A) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_3^1 \times C_7^3}{C_{10}^4} = \frac{3 \times 35}{210} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$$

حساب $P(B)$ :

$B$ حادثة الحصول على " 3 كرات من نفس الرقم "

$$P(B) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_5^1 \times C_5^3 + C_5^2 \times C_5^2 + C_5^3 \times C_5^1 + C_5^4}{C_{10}^4} = \frac{205}{210}$$

2) أ- تعيين قيم $x$ : $x = \{0,1,2,3\}$

ب-تبيان أن : $P(X = 0) = \frac{1}{6}$ و $P(X = 2) = \frac{3}{10}$

لدينا :

$$P(x = 0) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_3^0 \times C_7^4}{210} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$$

و

$$P(x = 2) = \frac{\text{الملائمةالحالات}}{\text{الممكنةالحالات}} = \frac{C_3^2 \times C_7^2}{210} = \frac{3}{10}$$

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي :

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x = xi)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{30}$ | 1 |

ج- حساب الامل الرياضي : $E(x)$:

$$E(x) = \left(0 * \frac{1}{6}\right) + \left(1 * \frac{1}{2}\right) + \left(2 * \frac{3}{10}\right) + \left(3 * \frac{1}{30}\right) = 1{,}2A$$