التصحيح المفصل للموضوع الأول البكالوريا الإفتراضية(01) 2020

شعبة العلوم التجريبية

من إعداد السيد حجاج براهيم

التمرين الأول(04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=2$، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{5u_n-1}{u_n+3}$.

1)أ–عين العددين الحقيقين a و b بحيث : $u_{n+1}=a+\dfrac{b}{u_n+3}$.

لدينا $u_{n+1}=a+\dfrac{b}{u_n+3}$ ومنه $u_{n+1}=\dfrac{au_n+3a+b}{u_n+3}$ ومنه بالمطابقة نجد $\begin{cases}a=5\\3a+b=-1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=5\\b=-16\end{cases}$

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=5-\dfrac{16}{u_n+3}$.

أ – برهن بالتراجع أنه من أجل كل طبيعي n : $u_n>1$.

من أجل $u_0=2$ فإن $u_0\geq 1$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل $n=0$

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$ أي $u_{n+1}>1$

لدينا $u_n>1$ اذن $u_n+3>4$

اذن اذن $\dfrac{1}{u_n+3}<\dfrac{1}{4}$

اذن $-\dfrac{16}{u_n+3}>\dfrac{-16}{4}$.

اذن $5-\dfrac{16}{u_n+3}>5-4$.

اذن $u_{n+1}>1$

اذن الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ اذن حسب مبدا البرهان بالتراجع الخاصية صحيحة أي من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n>1$

ب- بيّن أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على واستنتج أنها متقاربة.

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

لدينا $u_{n+1}-u_n=\dfrac{5u_n-1}{u_n+3}-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n=u_{n+1}=\dfrac{5u_n-1-u_n^2-3u_n}{u_n+3}$

ومنه $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^2+2u_n-1}{u_n+3}$

ومنه $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n-1)^2}{u_n+3}$

إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ من إشارة $-(u_n-1)^2$

u_n	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$U_{n+1}-U_n$	$-$

بما $\frac{-(u_n-1)^2}{u_n+3}<0$ و بتالي $u_{n+1}-u_n<0$ نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الاسفل بالعدد 1 فهي متقاربة

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\frac{1}{u_n-1}$.

ب − بين ان (v_n) متتالية حسابية يطلب تعين اساسها و حدها الاول .

(v_n) متتالية حسابية أساسها r معناه من اجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}-v_n=r$

لدينا $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-1}$ ومنه $v_{n+1}=\frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1}$.

ومنه $v_{n+1}=\frac{1}{\frac{5u_n-1-u_n-3}{u_n+3}}$

ومنه $v_{n+1}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}$

لدينا $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{1}{u_n-1}$ ومنه $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{4}{4u_n-4}$.

ومنه $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-1}{4u_n-4}$.

ومنه $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-1}{4(u_n-1)}$.

ومنه $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{4}$.

(v_n) متتالية جسابية أساسها $\frac{1}{4}$ حدها الأول $v_0=\frac{1}{u_0-1}=\frac{1}{2-1}=1$.

ب- عبر بدلالة n عن v_n و u_n ، واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا $v_n=v_0+nr$ ومنه $v_n=1+\frac{1}{4}n$ ومنه $v_n=\frac{4+n}{4}$

لدينا $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$ ومنه $v_nu_n-v_n=1$ ومنه $v_nu_n=v_n+1$ ومنه $u_n=\dfrac{v_n+1}{v_n}$

ومنه $u_n=\dfrac{\dfrac{4+n}{4}+1}{\dfrac{4+n}{4}}$

ومنه $u_n=\dfrac{\dfrac{4+n+4}{4}}{\dfrac{4+n}{4}}$

ومنه $u_n=\dfrac{n+8}{n+4}$

واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+8}{n+4}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n}\right)=1$

جـ- أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=e^{\frac{4}{4}}+e^{\frac{5}{4}}+\cdots+e^{\frac{n+4}{4}}$.

لدينا $S_n=e^{\frac{4}{4}}+e^{\frac{5}{4}}+\cdots+e^{\frac{n+4}{4}}$ ومنه $S_n=e^{v_0}+e^{v_1}+\cdots+e^{v_n}$

ومنه $S_n=e^1+e^{1+\frac{1}{4}}+e^{1+2\times\frac{1}{4}}\cdots+e^{1+n\times\frac{1}{4}}$

ومنه $S_n=e^1\left(1+e^{\frac{1}{4}}+e^{2\times\frac{1}{4}}\cdots+e^{n\times\frac{1}{4}}\right)$

ومنه $S_n=e^1\left(1+\left(e^{\frac{1}{4}}\right)^1+\left(e^{\frac{1}{4}}\right)^2\cdots+\left(e^{\frac{1}{4}}\right)^n\right)$

ومنه $S_n=e^1\times\dfrac{1-\left(e^{\frac{1}{4}}\right)^{n+1}}{1-e^{\frac{1}{4}}}$

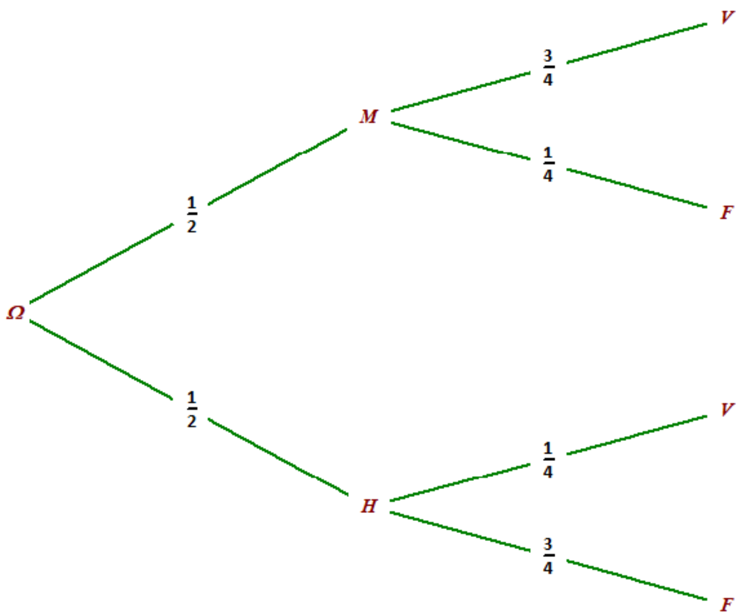
ومنه $S_n=e^1\times\dfrac{1-e^{\frac{n+1}{4}}}{1-e^{\frac{1}{4}}}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في لعبة يطرح سؤال واحد في أحد الموضوعين الرياضيات و التاريخ .

تقدمم إبراهيم لهذه اللعبة و هو يعلم أن إحتمال أن يجيب إجابة صحيحة في الرياضيات هو $\frac{3}{4}$ و إحنمال أن يجيب إجابة صحيحة في سؤال التاريخ هو $\frac{1}{4}$

1)ماهو إحتمال ان ان يعطي إبراهيم إجابة صحيحة ؟



لدينا $P(V)=P(M\cap V)+P(H\cap V)$ ومنه $P(V)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{4}{8}$

2)علما أن إبراهيم أعطب إجابة صحيحة ما إحتمال أن يكون أجابة عن سؤال الرياضيات ؟

$$P_V(M)=\frac{P(M\cap V)}{P(V)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

3)حتى يشارك إبراهيم في اللعبة يدفع α دينار حيث α عدد طبيعي غير معدوم فإذا أجاب جوايا صحيحا عن سؤال الرياضيات يربح 200دينار دينار أما إذا أجاب جوايا صحيحا عن سؤال التاريخ يربح 100دينار دينار جزائري ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة الربح الجبري

أ)عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$ و الإنحراف المعياري σ .

$X\in\{-\alpha;100-\alpha;200-\alpha\}$

$$P(X=200-\alpha)=P(M\cap V)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8} \quad P(X=100-\alpha)=P(H\cap V)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

$$P(X=-\alpha)=P(M\cap F)+P(H\cap F)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{4}{8}$$

X	$-\alpha$	$100-\alpha$	$200-\alpha$
$P(X_i)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

الأمل الرياضياتي

$E(X)=\sum x_i p(x_i)$ ومنه $E(X)=-\alpha\times\frac{4}{8}+(100-\alpha)\times\frac{1}{8}+(200-\alpha)\times\frac{3}{8}$

و منه $E(X)=\frac{700-8\alpha}{8}$

و منه $E(X)=\frac{175}{2}-\alpha$

$V(X)=\sum x_i^2 p(x_i)-E(X)^2$ ومنه $V(X)=(-\alpha)^2\times\frac{4}{8}+(100-\alpha)^2\times\frac{1}{8}+(200-\alpha)^2\times\frac{3}{8}-\left(\frac{175}{2}-\alpha\right)^2$

و منه $V(X)=\frac{8\alpha^2-1400\alpha+13000}{8}-\left(\frac{175}{2}-\alpha\right)^2$

الأنحراف المعياري

لدينا $\sigma=\sqrt{V(X)}$ معناه $\sigma=\sqrt{\frac{8\alpha^2-1400\alpha+13000}{8}-\left(\frac{175}{2}-\alpha\right)^2}$

ت) عين قيمة عدد طبيعي α حت تكون اللعبة مربحة.

تكون اللعبة مربحة معناه $E(X)>0$.

$E(X)>0$ ومنه $\frac{175}{2}-\alpha>0$ ومنه $\alpha<\frac{175}{2}$ ومنه $\alpha<87.5$ ومنه $\alpha\le 87$ ومنه $0<\alpha\le 87$

5) نضع $\alpha=100$ أحسب إحتمال ان $E(X)-\sigma<X<E(X)+\sigma$

من أجل $\alpha=100$ فإن $E(X)=-12.5$ فإن $V(X)=8593.75$ فإن $\sigma=\sqrt{V(X)}=92.70$

لدينا $E(X)-\sigma<X<E(X)+\sigma$ معناه $-105.7<X<80.2$

معناه $-100\le X\le 0$

لدينا $P(E(X)-\sigma<X<E(X)+\sigma)=P(-100\le X\le 0)$

معناه $P(E(X)-\sigma<X<E(X)+\sigma)=P(X=-100)+P(X=0)$

معناه $P(E(X)-\sigma<X<E(X)+\sigma)=\frac{4}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي :

1) مجموعة حلول المعادلة $z^3=16\sqrt{2}$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي $S=\{2\sqrt{2}\}$.

خطأ لأن

لدينا $z^3-16\sqrt{2}=0$ ومنه $z^3-16\sqrt{2}=(z-2\sqrt{2})(z^2-2\sqrt{2}z+8)$

لدينا $z^3-16\sqrt{2}=0$ ومنه $(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$; أو $(z-2\sqrt{2})=0$

ومنه $z=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$ أو $z=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$; أو $z=2\sqrt{2}$

مجموعة حلول المعادلة $z^3=16\sqrt{2}$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي $S=\{\sqrt{2}-i\sqrt{6};\sqrt{2}+i\sqrt{6};2\sqrt{2}\}$.

2) قيم العدد طبيعي n حتى يكون $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^n$ تخيليا صرفا هي ، $n=6k+3;k\in\mathbb{N}$.

صحيح لأن

لدينا $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{6}}$ ومنه يكون $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^n$ تخيليا صرفا معناه $Arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\pi}{2}+k\pi$

معناه $\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$

معناه $n=6k+3;k\in\mathbb{N}$

3) أ- إذا كان: $\frac{z_A-z_C}{z_C-z_B}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ فإن المثلث ABC متقايس الاضلاع.

صحيح لأن

لدينا $\frac{z_A-z_C}{z_C-z_B}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=-e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=e^{i\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)}$ ومنه $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$

ومنه $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=e^{-i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

المثلث ABC متقايس الاضلاع.

ب- النقطة B صورة النقطة A بدوران مركزه النقطة C و زاويته $-\frac{2\pi}{3}$.

لدينا $\frac{z_A-z_C}{z_C-z_B}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ومنه $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=e^{-i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ ومنه النقطة B صورة النقطة A بدوران مركزه النقطة C و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

خطأ

1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z حيث: $Arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=\pi+2k\pi$ حيث k عدد صحيح . هي محور التراتيب بإستثناء المبدأ. (العدد $\overline{z}$ هو مرافق العدد z).

لدينا $Arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=\pi+2k\pi$ ومنه $Arg(z)-Arg(\overline{z})=\pi+2k\pi$

ومنه $Arg(z)-(-Arg(z))=\pi+2k\pi$

ومنه $2Arg(z)=\pi+2k\pi$

ومنه $Arg(z)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

ومنه $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$

مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z حيث: $Arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)=\pi+2k\pi$ حيث k عدد صحيح . هي محور التراتيب بإستثناء المبدأ.

صح

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $g(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-1}$. وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

لدينا $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=1$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=1$

ومنه $y=1$ معادلة للمستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل .

بما ان $\begin{cases} \lim_{x \overset{>}{\to} -1} (x-2)^2=9 \\ \lim_{x \overset{>}{\to} -1} x^2-1=0^- \end{cases}$ فإن $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} g(x)=-\infty$

بما ان $\begin{cases} \lim_{x \overset{<}{\to} -1} (x-2)^2=9 \\ \lim_{x \overset{<}{\to} -1} x^2-1=0^+ \end{cases}$ فإن $\lim_{x \overset{<}{\to} -1} g(x)=+\infty$

ومنه $x=-1$ معادلة للمستقيم المقارب الموازي لحامل محور التراتيب

بما ان $\begin{cases} \lim_{x \overset{>}{\to} 1} (x-2)^2=1 \\ \lim_{x \overset{>}{\to} 1} x^2-1=0^+ \end{cases}$ فإن $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} g(x)=+\infty$

بما ان $\begin{cases} \lim_{x \overset{<}{\to} -1} (x-2)^2=1 \\ \lim_{x \overset{<}{\to} -1} x^2-1=0^- \end{cases}$ فإن $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} g(x)=-\infty$

ومنه $x=1$ معادلة للمستقيم المقارب الموازي لحامل محور التراتيب

g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ ودالتها المشتقة g' حيث

لدينا $g'(x)=\frac{(x^2-1)\times 2(x-2)-(2x)(x-2)^2}{(x^2-1)^2}$ ومنه $g'(x)=\frac{(x-2)\left((x^2-1)\times 2-(2x)(x-2)\right)}{(x^2-1)^2}$

ومنه $g'(x)=\frac{(x-2)(4x-2)}{(x^2-1)^2}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x-2)(4x-2)$ لأن $(x^2-1)^2>0$ من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$

لدينا $(x-2)(4x-2)=0$ ومنه $(4x-2)=0$ أو $(x-2)=0$ و بتالي $x=\frac{1}{2}$ أو $x=2$.

جدول الإشارة

$x=2$	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

ومنه g متزايدة تماما على مجالات $]-\infty;-1[$ و $\left]-1;\frac{1}{2}\right]$ و $[2;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالات $\left[\frac{1}{2};1\right[$ و $]1;2]$

جدول التغيرات

$x=2$	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1 ↗		$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	↘	0	↗	1

2) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) حيث: $(\Delta): y=1$ و إحداثيات A نقطة تقاطع (C) و (Δ) .

ندرس إشارة الفرق $(f(x)-1)$

لدينا $(f(x)-1)=\frac{(x-2)^2}{x^2-1}-1$ ومنه $(f(x)-1)=\frac{-4x+5}{x^2-1}$

إشارة الفرق $(f(x)-1)$ من إشارة $\frac{4x+5}{x^2-1}$ نستنتج مما سبق

x	$-\infty$	-1		1		$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$f(x)-1$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

ومنه $(f(x)-1)>0$ من أجل $x\in]-\infty;-1[\cup\left]1;\frac{5}{4}\right[$ و المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ)

ومنه $(f(x)-1)<0$ من أجل $x\in]-1;1[\cup\left]\frac{5}{4};+\infty\right[$ و المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ)

ومنه $(f(x)-1)=0$ من أجل $x=0$ و المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة ذات الإحداثيات $A\left(\frac{5}{4},1\right)$

2)أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة A .

$$(T): y=f'\left(\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{5}{4}\right)+f\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$(T): y=-\frac{64}{9}\left(x-\frac{5}{4}\right)+1$$

$$(T): y=-\frac{64}{9}x+\frac{89}{9}$$

3) عين إحداثيات نقط تقاطع (C) مع محوري الإحداثيات ثم أرسم (Δ)، (T) والمنحنى (C).

إحداثيات نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل معناه $y=0$

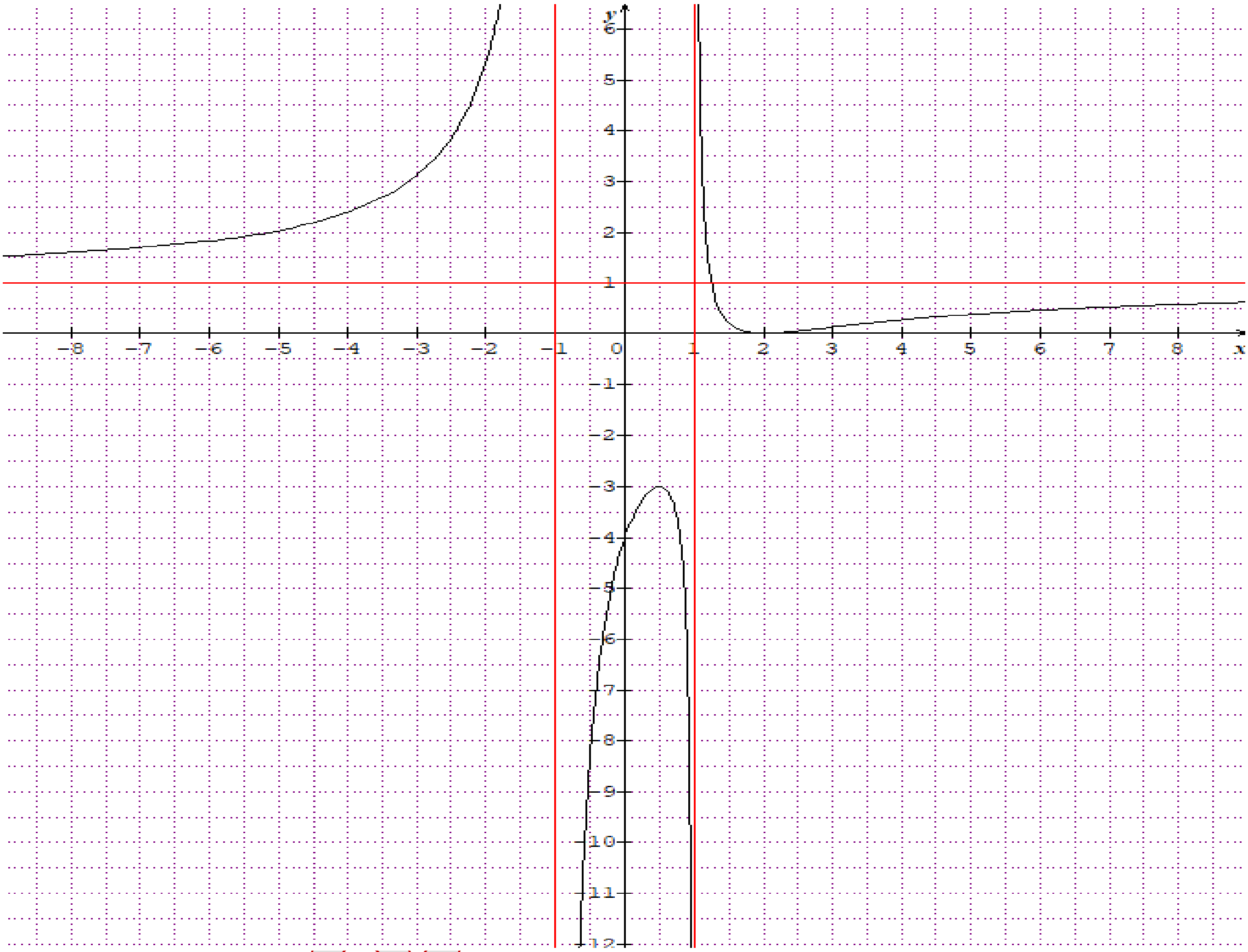
لدينا $f(x)=0$ ومنه $(x-2)=0$ ومنه $x=2$

ومنه (C) يقطع محور الفواصل غي النقطة ذات الفاصلة $x=2$.

إحداثيات نقط تقاطع (C) مع محور التراتيب معناه $x=0$

لدينا $f(0)=-4$

ومنه (C) يقطع محور التراتيب غي النقطة ذات الإحداثيات $(0,-4)$.



II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{(e^x-2)^2}{(e^x-1)(e^x+1)}$. وليكن (C') تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5) أ)أحسب النهايات عند أطراف مجال التعريف و أكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C') .

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(e^x-2)^2}{(e^x-1)(e^x+1)}=\dfrac{(0-2)^2}{(0-1)(0+1)}=-4$

ومنه $y=-4$ معادلة للمستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل بجوار $-\infty$.

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{2}{e^x}\right)^2}{\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}=1$

ومنه $y=1$ معادلة للمستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل بجوار $+\infty$.

بما ان $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(e^x-2\right)^2=1\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)=0^+\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$

بما ان $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left(e^x-2\right)^2=1\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)=0^-\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-\infty$

ومنه $x=0$ معادلة للمستقيم المقارب الموازي لحامل محور التراتيب

ب)بيّن أنه من أجل $x\in\mathbb{R}-\{0\}$: $f'(x)=e^x\times g'\left(e^x\right)$ ، ثمّ أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

لدينا $f(x)=g\left(e^x\right)$ ومنه $f'(x)=e^x\times g'\left(e^x\right)$

ومنه $f'(x)=e^x\times\dfrac{\left(e^x-2\right)\left(4e^x-2\right)}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $\left(e^x-2\right)\left(4e^x-2\right)$ لأن $\left(e^{2x}-1\right)^2>0$ من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{0\}$

لدينا $\left(e^x-2\right)\left(4e^x-2\right)=0$ ومنه $e^x=\dfrac{1}{2}$ أو $e^x=2$ و بتالي $x=\ln\dfrac{1}{2}$ أو $x=\ln 2$.

جدول الإشارة

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه f متزايدة تماما على مجالات $]\ln 2;+\infty[$ و $\left]-\infty;\ln\dfrac{1}{2}\right]$ و $[2;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالات $\left[\ln\dfrac{1}{2};0\right[$ و $]0;\ln 2]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	1

ج) أحسب $f(x)+f(-x)$ ثم فسر هندسيا النتيجة .

لدينا $f(x)=\dfrac{\left(e^x-2\right)^2}{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}$ ومنه $f(x)=\dfrac{e^{2x}-4e^x+4}{e^{2x}-1}$

ومنه $f(-x)=\dfrac{e^{-2x}-4e^{-x}+4}{e^{-2x}-1}\times\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}}$

ومنه $f(-x)=\dfrac{1-4e^x+4e^{2x}}{1-e^{2x}}$

ومنه $f(-x)=\dfrac{-1+4e^{x}-4e^{2x}}{e^{2x}-1}$

لدينا $f(x)+f(-x)=\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+4}{e^{2x}-1}+\dfrac{-1+4e^{x}-4e^{2x}}{e^{2x}-1}$ ومنه $f(x)+f(-x)=\dfrac{-3e^{2x}+3}{e^{2x}-1}$

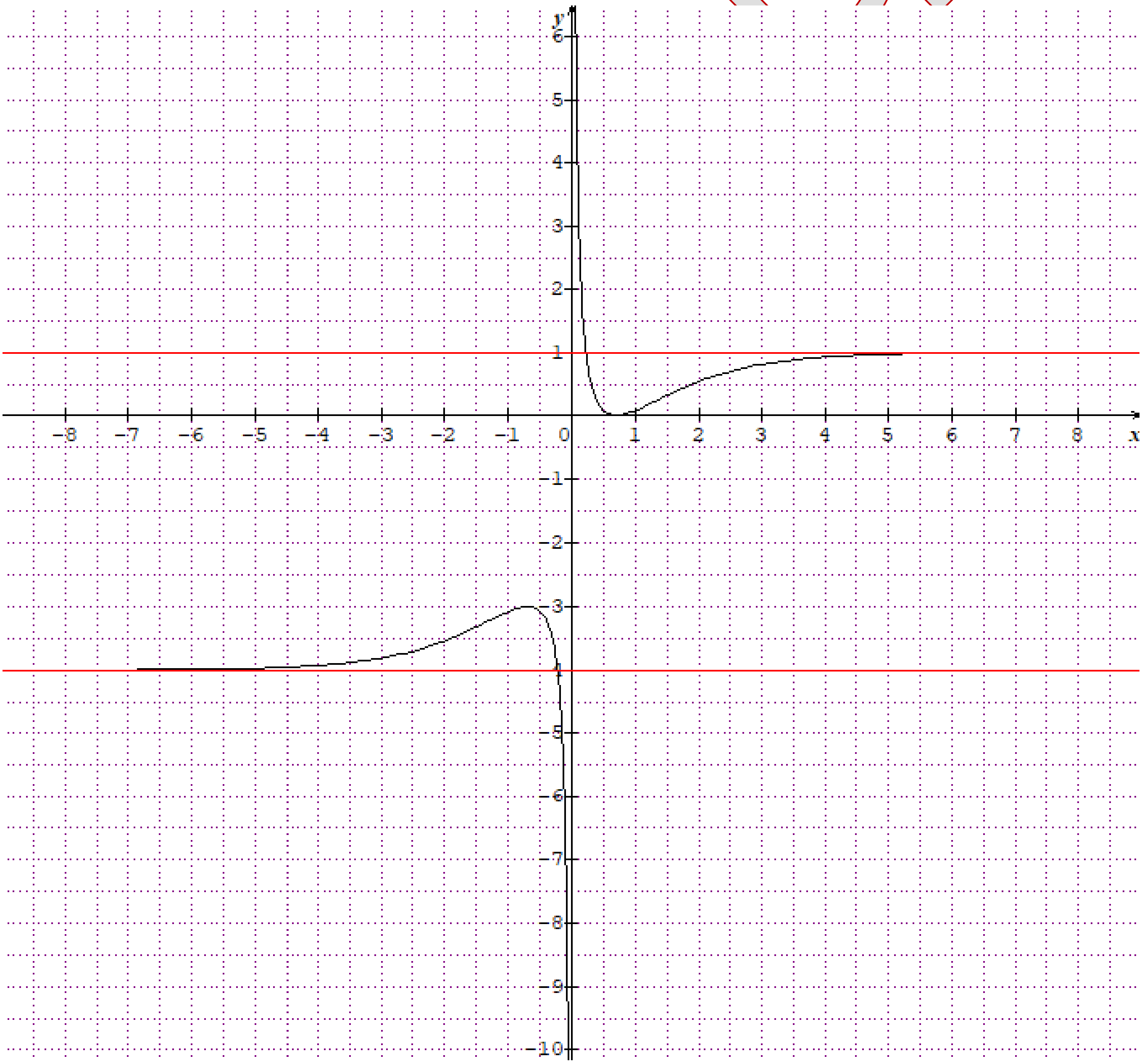
ومنه $f(x)+f(-x)=\dfrac{-3\left(e^{2x}-1\right)}{e^{2x}-1}$

ومنه $f(x)+f(-x)=-3$

ثم فسر هندسيا النتيجة .

تستنتج ان النقطة ذات الإحداثيات $\left(0,-\dfrac{3}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C')

6) أرسم و المستقيمات المقاربة و المنحنى (C').



7) عين قيم الوسيط الحقيقي m جتى تقبل المعادلة ذات المجهول x : $(1-m)e^{2x}-4e^{x}+m+4=0$.حلان متمايزان .

لدينا $(1-m)e^{2x}-4e^{x}+m+4=0$ ومنه $m\left(e^{2x}-1\right)=e^{2x}-4e^{x}+4$

ومنه $m=\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+4}{\left(e^{2x}-1\right)}$

ومنه $m=f(x)$

المعادلة ذات المجهول x : $(1-m)e^{2x}-4e^{x}+m+4=0$ حلان متمايزان من أجل $m\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]0;+\infty\right[$.

8) الدالة العددية h المعرفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ كما يلي: $h(x)=x+\dfrac{9}{2}\ln\left(e^{-x}+1\right)+\dfrac{1}{2}\ln\left(1-e^{-x}\right)$

– بين ان الدالة h هي دالة أصلية للدالة f على المجال $\left]0;+\infty\right[$.

h هي دالة أصلية للدالة f على المجال $\left]0;+\infty\right[$ معناه $h(x)=f(x)$

لدينا $h'(x)=1+\dfrac{9}{2}\times\dfrac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ ومنه $h'(x)=1+\dfrac{9}{2}\times\dfrac{-1}{e^{x}+1}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{e^{x}-1}$

ومنه $h'(x)=\dfrac{2\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}-1\right)-9\left(e^{x}-1\right)+\left(e^{x}+1\right)}{2\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}-1\right)}$

ومنه $h'(x)=\dfrac{\left(e^{x}-2\right)^{2}}{\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+1\right)}$

ومنه $h(x)=f(x)$

h هي دالة أصلية للدالة f على المجال $\left]0;+\infty\right[$

التصحيح المفصل للموضوع الثاني البكالوريا الإفتراضية(01) 2020

شعبة العلوم التجريبية

من إعداد السيد حجاج براهيم

التمرين الأول(04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=-3$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+3n-1$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل طبيعي $n\geq 3$ فإن: $u_n>0$.

من أجل $n=3$ نحسب $u_3;u_2;u_1$

لدينا $u_1=\frac{2}{3}u_0+3\times 0-1$ ومنه $u_1=\frac{2}{3}(-3)-1$ ومنه $u_1=-3$

لدينا $u_2=\frac{2}{3}u_1+3\times 1-1$ ومنه $u_2=\frac{2}{3}(-3)+2$ ومنه $u_2=0$

لدينا $u_3=\frac{2}{3}u_2+3\times 2-1$ ومنه $u_2=\frac{2}{3}(0)+5$ ومنه $u_2=5$

من أجل $n=3$ فإن $u_n>0$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل $n=3$

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$ أي $u_{n+1}>0$

لدينا $u_n>0$ اذن $\frac{2}{3}u_n>0$

اذن $\frac{2}{3}u_n+3n-1>3n-1$

لدينا $n\geq 3$ اذن $3n\geq 9$ $3n-1>0$; وبتالي $3n-1\geq 8$ وبتالي

اذن $u_{n+1}>0$

اذن الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ اذن حسب مبدا البرهان بالتراجع الخاصية صحيحة أي من اجل كل عدد طبيعي حيث n : $u_n>0$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$ فإن: $u_n>3n-4$ ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{2}{3}u_{n-1}+3(n-1)-1$.ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{2}{3}u_{n-1}+3n-4$.

من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$ فإن: $u_{n-1}>0$;ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$ فإن: $\frac{2}{3}u_{n-1}>0$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$ فإن: $\frac{2}{3}u_{n-1}+3n-4>3n-4$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$ فإن: $u_n>3n-4$

بما ان $\lim\limits_{n\to\infty}3n-4=+\infty$ و $u_n>3n-4$ ومنه $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$

2)نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 9n + 30$.

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

(v_n) متتاليةهندسية أساسها $\frac{2}{3}$ معناه من اجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} - 9(n+1) + 30$ ومنه $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3n - 1 - 9n + 21$.

ومنه $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 6n + 20$

ومنه $v_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n - 9n + 30)$

ومنه $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ حدها الأول $v_0 = u_0 - 9\times 0 + 30 = 27$.

ب- عبر بدلالة n عن v_n .

لدينا $v_n = v_0(q)^n$ ومنه $v_n = 27\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$

ج- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 9\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^n + n - \frac{10}{3}\right]$ ثم ، واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا $v_n = u_n - 9n + 30$ ومنه $u_n = v_n + 9n - 30$.

ومنه $u_n = 27\times\left(\frac{3}{2}\right)^n + 9n - 30$.

ومنه $u_n = 9\left[3\times\left(\frac{3}{2}\right)^n + n - \frac{10}{3}\right]$.

بما ان $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} n - \frac{10}{3} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3)احسب بدلالة n ، و المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

لدينا $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

ومنه $S_n = v_0 + 9\times 0 - 30 + v_1 + 9\times 1 - 30 + ... + v_n + 9n - 30$.

ومنه $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n + 9\times(0+1+2+...+n) - 30(n+1)$.

ومنه $S_n = 27\times\dfrac{1-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{2}{3}} + 9\times\dfrac{n(1+n)}{2} - 30(n+1)$.

ومنه $S_n = 27\times\dfrac{1-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}}{-\dfrac{1}{2}} + 3(1+n)\left(3\times\dfrac{n}{2} - 10\right)$.

ومنه $S_n = -54\times\left(1-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}\right) + 3(1+n)\left(\dfrac{3n-20}{2}\right)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحوي صندوق 7 كرات متماثلة لا نفرق بينها عن اللمس، منها 4 كرات بيضاء تحمل الرقم α و 3 كرات سوداء تحمل الرقم β حيث α و β عددان طبيعيان نسحب عشوائيا وفي آن واحد 4 كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحادثتين A : "نسحب ثلاث كريات من نفس اللون " و B : "نسحب على الاقل كرية بيضاء ".

A : "نسحب ثلاث كريات من نفس اللون "

$$P(A)=\frac{C_3^3\times C_4^1+C_3^1\times C_4^3}{C_7^3}=\frac{16}{35}$$

B : "نسحب على الاقل كرية سوداء ."

$$P(B)=\frac{C_3^3\times C_4^1+C_3^2\times C_4^2+C_3^1\times C_4^3+C_3^0\times C_4^4}{C_7^3}=\frac{35}{35}=1$$

ب- بيّن أن: $P(A\cap B)=\dfrac{16}{35}$ هل الحدثين A و B مستقلان .

$$P(A\cap B)=\frac{C_3^3\times C_4^1+C_3^1\times C_4^3}{C_7^3}=\frac{16}{35}$$

الحدثين A و B مستقلان معناه $P(A\cap B)=P(B)\times P(A)$.

لدينا $P(B)\times P(A)=1\times\dfrac{16}{35}$ و $P(A\cap B)=\dfrac{16}{35}$ و منه الحدثين A و B مستقلان

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب مجموع الرقمين التي تحملها الكريات المسحوبة .

– عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

$$X\in\{4\alpha;3\alpha+\beta;2\alpha+2\beta;\alpha+3\beta\}$$

$$P(X=2\alpha+2\beta)=\frac{C_4^2\times C_3^2}{35}=\frac{18}{35}\quad P(X=3\alpha+\beta)=\frac{C_4^3\times C_3^1}{35}=\frac{12}{35}\quad P(X=4\alpha)=\frac{C_4^4}{35}=\frac{1}{35}$$

$$P(X=\alpha+3\beta)=\frac{C_4^1\times C_3^3}{35}=\frac{4}{35}$$

X_i	4α	$3\alpha+\beta$	$2\alpha+2\beta$	$\alpha+3\beta$
$P(X_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

– بين ان $E(X)=\dfrac{80\alpha+60\beta}{35}$.

$E(X)=\sum x_i p(x_i)$ ومنه $E(X)=4\alpha\times\dfrac{1}{35}+(3\alpha+\beta)\times\dfrac{12}{35}+(2\alpha+2\beta)\times\dfrac{18}{35}+(\alpha+3\beta)\times\dfrac{4}{35}$ ه

و منه $E(X)=\dfrac{80\alpha+60\beta}{35}$

و منه $E(X)=\frac{4}{7}(4\alpha+3\beta)$

3)نرجع الصندوق إلى وضعه الاول ونسحب 3 كريات عشوائيا وفي آن واحد من الصندوق ثم نعيد سحب 4 كريات عشوائيا وفي آن واحد من الصندوق.

– بين ان إحتمال ان تبقي كرية بيضاء في الصندوق بعد السحب الثاني هو $\frac{19}{35}$

نسحب $3B$ ثم $3N$ ومنه $\frac{C_4^3}{C_7^3}\times\frac{C_3^3}{C_4^3}=\frac{1}{35}$

نسحب $2B;N$ ثم $2N;B$ ومنه $\frac{C_4^2\times C_3^1}{C_7^3}\times\frac{C_2^1\times C_2^2}{C_4^3}=\frac{9}{35}$

نسحب $B;2N$ ثم $N;2B$ ومنه $\frac{C_4^1\times C_3^2}{C_7^3}\times\frac{C_3^2\times C_1^1}{C_4^3}=\frac{9}{35}$

إحتمال ان تبقي كرية بيضاء في الصندوق بعد السحب الثاني هو

$$\frac{C_4^3}{C_7^3}\times\frac{C_3^3}{C_4^3}+\frac{C_4^2\times C_3^1}{C_7^3}\times\frac{C_2^1\times C_2^2}{C_4^3}+\frac{C_4^1\times C_3^2}{C_7^3}\times\frac{C_3^2\times C_1^1}{C_4^3}=\frac{9}{35}+\frac{9}{35}+\frac{1}{35}=\frac{19}{35}$$

الثالث: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث : $z_A=3-3i$ ، $z_B=3\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ و $z_C=-2z_A$.

2) أ) أكتب العدد المركب z_A على الشكل الآسي .

لدينا $z_A=3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فإن ان $\left(\frac{z_A}{3\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{z_C}{3\sqrt{2}}\right)^n=2\cos\frac{n\pi}{4}$ ثم إستنتج $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1441}+\left(\frac{z_C}{2\sqrt{3}}\right)^{1441}$.

لدينا $\left(\frac{z_A}{3\sqrt{2}}\right)^n=\left(\frac{3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{3\sqrt{2}}\right)^n$ ومنه $\left(\frac{z_A}{3\sqrt{2}}\right)^n=e^{-i\frac{n\pi}{4}}$

ومنه $\left(\frac{z_A}{3\sqrt{2}}\right)^n=\cos\frac{-n\pi}{4}+i\sin\frac{-n\pi}{4}$

ومنه $\left(\frac{z_A}{3\sqrt{2}}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}$

لدينا $\left(\frac{z_C}{3\sqrt{2}}\right)^n=\left(\frac{3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{3\sqrt{2}}\right)^n$ ومنه $\left(\frac{z_C}{3\sqrt{2}}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{4}}$

ومنه $\left(\frac{z_C}{3\sqrt{2}}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}$

لدينا $\left(\frac{z_A}{3\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{z_C}{3\sqrt{2}}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}$ ومنه $\left(\frac{z_A}{3\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{z_C}{3\sqrt{2}}\right)^n=2\cos\frac{n\pi}{4}$

ثم إستنتج $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1441}+\left(\frac{z_C}{2\sqrt{3}}\right)^{1441}$

لدينا $\left(\frac{z_A}{3\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{z_C}{3\sqrt{2}}\right)^n=2\cos\frac{n\pi}{4}$ ومنه $\left(\frac{z_A}{3\sqrt{2}}\right)^{1441}+\left(\frac{z_C}{3\sqrt{2}}\right)^{1441}=2\cos1441\frac{\pi}{4}$

ومنه $\left(\frac{z_A}{3\sqrt{2}}\right)^{1441}+\left(\frac{z_C}{3\sqrt{2}}\right)^{1441}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

ومنه $\left(\frac{z_A}{3\sqrt{2}}\right)^{1441}+\left(\frac{z_C}{3\sqrt{2}}\right)^{1441}=2\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $\left(\frac{z_A}{3\sqrt{2}}\right)^{1441}+\left(\frac{z_C}{3\sqrt{2}}\right)^{1441}=\sqrt{2}$

2)نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z$.

2) عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة ثم تحقق أن $B=T(A)$ و وحدد طبيعة المثلث OAB .

التحويل النقطي T هو دوران مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{3}$

لدينا $B=T(A)$ معناه $z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_A$ معناه $z_B=3\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ معناه $z_B=3\sqrt{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)}$ معناه $z_B=3\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

وحدد طبيعة المثلث OAB .

لدينا $B=T(A)$ معناه $z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_A$ معناه $\frac{z_B}{z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ معناه $\frac{OB}{OA}=1$ و $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=-\frac{\pi}{3}$ ومنه المثلث OAB متقايس الأضلاع

3)أ) أنشىء النقطتين A و B مبرزا خطوط الإنشاء .

ب)أكتب العدد المركب $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ على الشكل الجبري ثم إستنتج الشكل الجبري للعدد z_B .

لدينا $e^{-i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}$ معناه $e^{-i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ثم إستنتج الشكل الجبري للعدد z_B .

لدينا $z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_A$ معناه $(3-3i)$ $z_B=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3-3i)$ معناه $z_B=\frac{3+3\sqrt{3}}{2}+i\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$

ج) إستنتج القيمة المظبوطة لــ $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

لدينا $z_B=3\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ معناه $\tan\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\operatorname{Im} z_B}{\operatorname{Re} z_B}$ معناه $\tan\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\frac{3+3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3+3\sqrt{3}}{2}}$

معناه $\tan\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=2-\sqrt{3}$

لدينا $\tan\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=-\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ فإن $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-2+\sqrt{3}$

4) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $(z-z_A)(\overline{z}-z_C)=z_Az_C$.

عين طبيعة المجموعة (γ) ثم عين صورتها بالتحويل T.

لدينا $(z-z_A)(\overline{z}-z_C)=z_Az_C$ معناه $(z-z_A)\left(\overline{z-\overline{z_C}}\right)=z_A\overline{z_A}$

معناه $(z-z_A)\left(\overline{z-z_A}\right)=|z_A|^2$

معناه $|(z-z_A)|^2=|z_A|^2$

معناه $|(z-z_A)|=|z_A|$

معناه $AM=3\sqrt{2}$

مجموعة هي دائرة مركزها A طول نصف قطرها هو $3\sqrt{2}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-\frac{2}{x}+\ln x$.

أ) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

بما أن $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1-\frac{2}{x}=-\infty \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x=-\infty \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=-\infty$

بما أن $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 1-\frac{2}{x}=1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x=+\infty \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=+\infty$

g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة g' حيث

لدينا $g'(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}$ ومنه $g'(x)=\frac{2+x}{x^2}$

من اجل $x\in]0;+\infty[$: $g'(x)>0$ و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

جدول النغيرات

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$+\infty$ ↗	$+\infty$

. أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.4<\alpha<1.5$.

الدالة $g(1.5)=0.02$; $g(1.4)=-0.07$ الدالة $g(1.4)\times g(1.5)<0$

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ و بالأخص على المجال $[1.4;1.5]$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.4<\alpha<1.5$.

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

ج) استنتج إشارة $g(x+1)$ على $]0;+\infty[$.

x	-1	$\alpha-1$	$+\infty$
$g(x+1)$	$-$	0	$+$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=(x-1)\ln(x+1)$. وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) أ– أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

بما أن $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} (x-1) = -2 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \ln(x+1) = -\infty \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = +\infty$

ومنه المستقيم ذي المعادلة $x=-1$ هو مقارب للمنحنى (C)

بما أن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

5) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x) = g(x+1)$ ، ثمّ أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي f' :

لدينا $f'(x) = (x-1)\times\dfrac{1}{x+1} + \ln(x+1)$ ومنه $f'(x) = \dfrac{x+1-2}{x+1} + \ln(x+1)$

ومنه $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x+1} + \ln(x+1)$

ومنه $f'(x) = g(x+1)$

ب–ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

إشارة $f'(x)$ من إشارة $f'(x) = g(x+1)$

جدول الإشارة

x	$-1 \quad \alpha-1 \quad +\infty$
$f'(x)$	$- \quad 0 \quad +$

وبتالي f متزايدة تماما على المجال $[\alpha-1,+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-1,\alpha-1]$

جدول التغيرات

x	-1	$\alpha-1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$f(\alpha-1)$	$\nearrow +\infty$

6) بين ان $f(\alpha-1) = 4 - \alpha - \dfrac{4}{\alpha}$ ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha-1)$

لدينا $f(\alpha-1) = (\alpha-2)\ln(\alpha)$

لدينا $g(\alpha) = 0$ ومنه ا $1 - \dfrac{2}{\alpha} + \ln\alpha = 0$ ومنه ا $\ln\alpha = -1 + \dfrac{2}{\alpha}$

لدينا $f(\alpha-1) = (\alpha-2)\ln(\alpha)$ ومنه ا $f(\alpha-1) = (\alpha-2)\left(-1+\dfrac{2}{\alpha}\right)$

ومنه ا $f(\alpha-1) = -\alpha + 2 + 2 - \dfrac{4}{\alpha}$ ومنه ا $f(\alpha-1) = -\alpha + 4 - \dfrac{4}{\alpha}$

ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha-1)$

لدينا $1.4<\alpha<1.5$ ومنه ا $\frac{-4}{1.4}<\frac{-4}{\alpha}<\frac{-4}{1.5}$ ومنه ا $1.14<4-\frac{4}{\alpha}<1.33$

ومنه ا $1.14+1.4<\alpha+4-\frac{4}{\alpha}<1.33+1.5$

ومنه ا $2.54<f(\alpha-1)<2.83$

4) أ)أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) حيث: $(\Delta): y=-x+1$.

ندرس إشارة الفرق $(f(x)+x-1)$

لدينا $f(x)+x-1=f(x)=(x-1)\ln(x+1)+x-1$ ومنه $f(x)+x-1=f(x)=(x-1)(\ln(x+1)+1)$ إشارة

الفرق $(f(x)-x+1)$ من إشارة $(x-1)(\ln(x+1)+1)$

لدينا $(x-1)(\ln(x+1)+1)=0$ ومنه $(x-1)=0$ أو $\ln(x+1)=-1$

ومنه $x=1$ أو $x=e^{-1}-1$

جدول الإشارة

x	-1	$-1+e-1$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$ln(x+1)+1$	$-$	0 $+$		$+$
$(x-1)ln(x+1)$	$+$	0 $-$	0	$+$

ومنه $(f(x)+x)>0$ من أجل $x\in]-1;e^{-1}-1[\cup]1,+\infty[$ و المنحنى (C_f) يقع فوق المنحنى (Δ)

ومنه $(f(x)+x)<0$ من أجل $x\in]e^{-1}-1;1[$ و المنحنى (C_f) يقع تحت المنحنى (Δ)

ومنه $(f(x)-x+1)=0$ من أجل $x=1$ او $x=e^{-1}-1$ المنحنى (C_f) يقطع المنحنى (Δ) في النقطتين ذات الإحداثيات . $(1,0)$

و النقطة ذات الإحداثيات . $(e^{-1}-1,-e^{-1}+2)$

أ) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة0.

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$(T): y=-1(x-0)+0$$

$$(T): y=-x$$

5) عين إحداثيات نقط تقاطع (C) مع محوري الإحداثيات ثم أرسم (Δ)، (T) والمنحنى (C).(نأخذ $f(\alpha)=-0.24$).

إحداثيات نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل معناه $y=0$

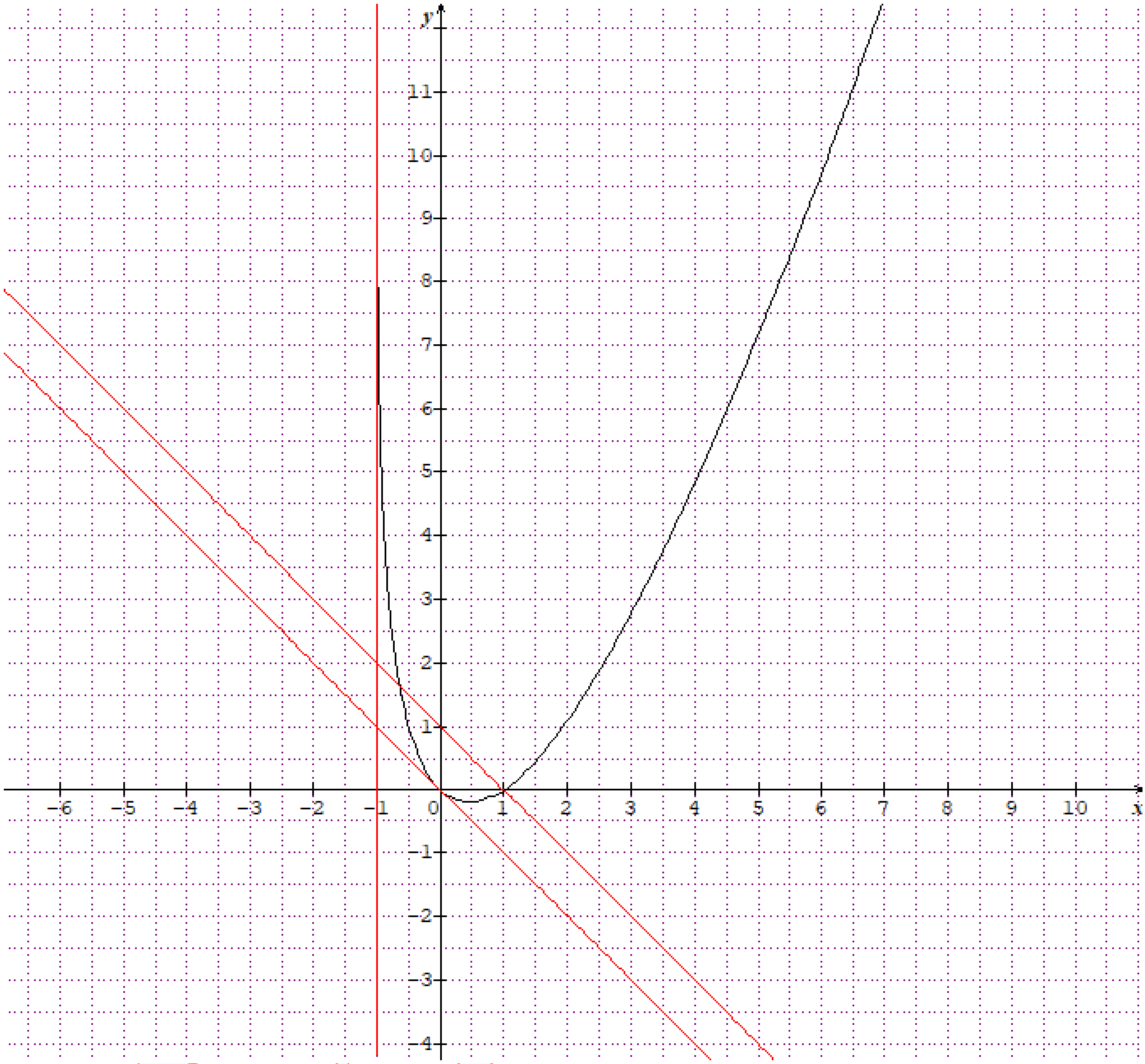
لدينا $f(x)=0$ ومنه $(x-1)\ln(x+1)=0$ ومنه $x=0$ او $x=1$;

ومنه (C) يقطع محور الفواصل غي النقطتين ذات الفاصلة $x=0$ و $x=1$.

إحداثيات نقط تقاطع (C) مع محور التراتيب معناه $x=0$

لدينا $f(0)=0$

ومنه (C) يقطع محور التراتيب غي النقطة ذات الإحداثيات $(0,0)$.



6) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة ذات المجهول x : $f\left(x\right)=m-x$ حلان أحدهما أكبر تماما من 1.

من البيان نلاحظ من أجل $m>1$ المعادلة ذات المجهول x : $f\left(x\right)=m-x$ حلان أحدهما أكبر تماما من 1.