الفهرس

(*) للأستاذ المهدي عنيس anissmaths.ift.cx

(**) ذ.عزالدين شهبي www.madariss.fr

(***) ذ.المصطفى إقطان www.madariss.fr

R

سلسلات تمارين محلولة من إنجاز الأستاذ سمير لخريسي

سلسلة تمارين المتطابقات الهامة	الحلول
سلسلة تمارين القوى	الحلول
سلسلة تمارين الجذور المربعة	الحلول
سلسلة تمارين مبرهنة فيتاغورس	الحلول
سلسلة تمارين الترتيب والعمليات	الحلول
سلسلة تمارين مبرهنة طاليس	الحلول
سلسلة تمارين الحساب المثلثي	الحلول
سلسلة تمارين الزوايا المحيطية	الحلول
سلسلة تمارين المثلثات: المتقايسة المتشابهة	الحلول
سلسلة تمارين الإزاحة المتجهات	الحلول
سلسلة تمارين المعادلات - المتراجحات	الحلول
سلسلة تمارين المعلم في المستوى	الحلول
سلسلة تمارين معادلة مستقيم	الحلول
سلسلة تمارين الدالة الخطية	الحلول
سلسلة تمارين الدالة التآلفية	الحلول
سلسلة تمارين نظمة معادلتين	الحلول
سلسلة تمارين الإحصاء	الحلول
سلسلة تمارين الهندسة الفضائية: المساحات والحجوم	الحلول

R

المتطابقات الهامـــة

تمرين 1

أنشر و بسط : $A=2(x+5)$ ، $B=(5-x)(7+x)$ ، $C=\frac{2}{3}(5+7x)-\frac{1}{2}(-x+1)$ ، $D=(x+3)(x^2-3x+5)$

تمرين 2

أنشر و بسط : $A=(x+3)^2$ ، $B=(3x-1)^2$ ، $C=5(1-x)^2$ ، $D=(3x+7)(3x-7)+4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

تمرين 3

عمل ما يلي :

$A=ab+5b$ ، $B=12x+18$ ، $C=5x-x^2$ ، $D=x+5x^2+11x^3$

$E=5(x+1)+(x+1)^2$ ، $F=(x-3)(x+7)-(5-x)(x-3)$ ، $G=x^2-49+x(x-7)$

$H=x^2+4x+4$ ، $I=x^2-\frac{9}{121}$ ، $J=(2x-3)^2-(x+1)^2$ ، $K=\frac{x^2}{8}-8$

$L=-7x^2+14x-7$ ، $M=x^{12}-1+5(x^6-1)$

تمرين 4

حل المعادلات التالية :

$2x+5=-3x+8$ ، $\frac{x+1}{5}=\frac{-x+2}{3}$ ، $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1+7x}{6}$ ، $5\left(x+\frac{1}{3}\right)+3=4-\frac{2x}{3}$

$x^2-100=0$ ، $(x+1)^2-60=4$ ، $x^2=2x-1$ ، $(x-3)^2=2x-6$ ، $x^2-4x-5=0$

تمرين 5

حدد x و y علما أن :

x و y متناسبان على التوالي مع 7 و 3 و $2x+7y=40$

تمرين 6

حدد x و y علما أن :

x و y متناسبان على التوالي مع $\frac{5}{3}$ و $\frac{-1}{4}$ و $2x=13-3y$

تمرين 7

من أولمبياد الرياضيات

❶ x عدد حقيقي غير منعدم .

علما أن $x+\frac{1}{x}=7$ احسب $x^2+\frac{1}{x^2}$

❷ x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا حيث $x>y$.

علما أن : $x^2+y^2=3xy$ احسب النسبة $\frac{x+y}{x-y}$

❸ x و y و z أعداد حقيقية حيث :

x و y متناسبان على التوالي مع 12 و 14

y و z متناسبان على التوالي مع 21 و 24

احسب x و y علما أن : $x+y+z=42$

R

المتطابقات الهامـــة - حلول

تمرين 1

انتبه ← تعليق ←

لننشر و نبسط :

$A = 2(x+5)$ $A = 2x+10$	$B = (5-x)(7+x)$ $B = 35+5x-7x-x^2$ $B = 35-2x-x^2$: ⤶ لا يمكن تسبيط 35 و $2x$ و x^2 فيما بينها لأننا بصدد الجمع و الطرح و ليس الضرب ⤶ لايجوز كتابة $x7$ بل $7x$	$C = \frac{2}{3}(5+7x)-\frac{1}{2}(-x+1)$ $C = \frac{10}{3}+\frac{14x}{3}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ $C = \frac{20+28x+3x-3}{6}$ $C = \frac{28x+3x+20-3}{6}$ $C = \frac{31x+17}{6}$: ⤶ أثناء النشر يجب مراعاة الإشارات باستعمال إشارة جذاء.	$D = (x+3)(x^2-3x+5)$ $D = x^3-3x^2+5x+3x^2-9x+15$ $D = x^3+5x-9x+15$ $D = x^3-4x+15$: ⤶ أثناء النشر نستعمل قاعدة القوى $x^n \times x^m = x^{n+m}$ ⤶ في السطر الثالث اختزلنا الأعداد المتقابلة.

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

لننشر و نبسط :

$A = (x+3)^2$ $A = x^2+2\times x\times 3+3^2$ $A = x^2+6x+9$	$B = (3x-1)^2$ $B = (3x)^2-2\times 3x\times 1+1^2$ $B = 9x^2-6x+1$: ⤶ لا تنس وضع الأقواس للعدد $3x$ ⤶ لحذف الأقواس نستعمل قاعدة القوى $(ab)^n = a^n\ b^n$	$C = 5(1-x)^2$ $C = 5(1-2x+x^2)$ $C = 5-10x+5x^2$: ⤶ ننشر أولا المتطابقة ثم ننشر النتيجة بالعدد5	$D = (3x+7)(3x-7)+4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ $D = (3x)^2-7^2+4\left(x^2-2\times\frac{1}{2}\times x+\frac{1}{4}\right)$ $D = 9x^2-49+4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)$ $D = 9x^2-49+4x^2-4x+1$ $D = 13x^2-4x-48$: ⤶ جذاء عدد و مقلوبه يساوي 1 أي $2\times\frac{1}{2}=1$ و $4\times\frac{1}{4}=1$

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

لنعمــل :

$A = ab+5b$ $A = b(a+5)$	$B = 12x+18$ $B = 6(2x+3)$: يمكن اختيار 2 أيضا كعامل مشترك	$C = 5x-x^2$ $C = x(5-x)$	$D = x+5x^2+11x^3$ $D = x(1+5x+11x^2)$: ⤶ معامل x بعد التعميل هو 1
$E = 5(x+1)+(x+1)^2$ $E = (x+1)[5+(x+1)]$ $E = (x+1)(5+x+1)$ $E = (x+1)(x+6)$	$F = (x-3)(x+7)-(5-x)(x-3)$ $F = (x-3)[(x+7)-(5-x)]$ $F = (x-3)(x+7-5+x)$ $F = (x-3)(2x+2)$: لا تنس قاعدة حذف الأقواس المسبوقة برمز ناقص "-"	$G = x^2-49+x(x-7)$ $G = (x-7)(x+7)+x(x-7)$ $G = (x-7)(x+7+x)$ $G = (x-7)(2x+7)$	$H = x^2+4x+4$ $H = (x+2)^2$: نعمل مباشرة باستعمال المتطابقة الأولى

R

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

لنعمــل :

$I=x^2-\frac{9}{121}$ $I=\left(x-\frac{3}{11}\right)\left(x+\frac{3}{11}\right)$	$J=(2x-3)^2-(x+1)^2$ $J=[(2x-3)+(x+1)][(2x-3)-(x+1)]$ $J=(2x-3+x+1)(2x-3-x-1)$ $J=(3x-2)(x-4)$	$K=\frac{x^2}{8}-8$ $K=\frac{x^2-64}{8}$ $L=\frac{(x-8)(x+8)}{8}$	$L=-7x^2+14x-7$ $L=-7(x^2-2x+1)$ $L=-7(x-1)^2$

$$M=x^{12}-1+5(x^6-1)=(x^6)^2-1+5(x^6-1)=(x^6-1)(x^6+1)+5(x^6-1)=(x^6-1)(x^6+1+5)=(x^6-1)(x^6+6)$$

تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

لنحل المعادلات :

$2x+5=-3x+8$ $2x+3x=-5+8$ $5x=3$ $x=\frac{3}{5}$ **إذن حل المعادلة هو** $\frac{3}{5}$	$\frac{x+1}{5}=\frac{-x+2}{3}$ $3(x+1)=5(-x+2)$ $3x+1=-5x+10$ $3x+5x=10-1$ $8x=9$ $x=\frac{9}{8}$ **إذن حل المعادلة هو** $\frac{9}{8}$: للتخلص من المقامات استعملنا قاعدة التناسب "جذاء الطرفين يساوي جذاء الوسطين"	$\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1+7x}{6}$ $\frac{2x}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1+7x}{6}$ $2x-3=1+7x$ $2x-7x=1+3$ $-5x=4$ $x=\frac{4}{-5}$ $x=\frac{-4}{5}$ **إذن حل المعادلة هو** $\frac{-4}{5}$: للتخلص من المقامات وحدنا المقامات	$5\left(x+\frac{1}{3}\right)+3=4-\frac{2x}{3}$ $5x+\frac{5}{3}+3=4-\frac{2x}{3}$ $\frac{15x}{3}+\frac{5}{3}+\frac{9}{3}=\frac{12}{3}-\frac{2x}{3}$ $15x+5+9=12-2x$ $15x+2x=12-9-5$ $17x=-2$ $x=\frac{-2}{17}$ **إذن حل المعادلة هو** $\frac{-2}{17}$
$x^2-100=0$ $(x-10)(x+10)=0$ $x-10=0$ $x-10=0$ $x=10$ $x=10$ **إذن حلا المعادلة هما** 10 **و** -10	$(x+1)^2-60=4$ $(x+1)^2-60-4=0$ $(x+1)^2-64=0$ $(x+1-8)(x+1+8)=0$ $(x-7)(x+9)=0$ $x-7=0$ $x+9=0$ $x=7$ $x=-9$ **إذن حلا المعادلة هما** -9 **و** 7	$x^2=2x-1$ $x^2-2x+1=0$ $(x-1)^2=0$ $x-1=0$ $x=1$ **إذن حل المعادلة هو** 1	$(x-3)^2=2x-6$ $(x-3)^2=2(x-3)$ $(x-3)^2-2(x-3)=0$ $(x-3)(x-3-2)=0$ $(x-3)(x-5)=0$ $x-3=0$ $x-5=0$ $x=3$ $x=5$ **إذن حلا المعادلة هما** 5 **و** 3

$x^2-4x-5=0$
$x^2-4x+4-4-5=0$
$(x-2)^2-9=0$
$(x-2-3)(x-2+3)=0$
$(x-5)(x+1)=0$
$x-5=0$ $x+1=0$
$x=5$ $x=-1$

إذن حلا المعادلة هما -1 **و** 5

R

تمرين 5

انتبه ← تعليق ←

حدد x و y علما أن : x و y متناسبان على التوالي مع 7 و 3 و $2x+7y=40$

لدينا x و y متناسبان على التوالي مع 7 و 3 منه : $\frac{x}{7}=\frac{y}{3}$ منه $\frac{x}{7}=\frac{y}{3}=\frac{2x+7y}{2\times7+7\times3}=\frac{40}{14+21}=\frac{40}{35}=\frac{8}{7}$

منه : $\frac{x}{7}=\frac{8}{7}$ و $\frac{y}{3}=\frac{8}{7}$ أي : $\underline{x=8}$ و $\underline{y=\frac{24}{7}}$

تمرين 6

انتبه ← تعليق ←

حدد x و y علما أن : x و y متناسبان على التوالي مع $\frac{5}{3}$ و $\frac{-1}{4}$ و $2x=13-3y$

لدينا x و y متناسبان على التوالي مع $\frac{5}{3}$ و $\frac{-1}{4}$ و $2x=13-3y$

منه : $\frac{x}{\frac{5}{3}}=\frac{y}{\frac{-1}{4}}$ منه $\frac{3x}{5}=\frac{4y}{-1}$ منه $-3x=20y$ منه $\frac{x}{20}=\frac{y}{-3}$ منه $\frac{x}{20}=\frac{y}{-3}=\frac{2x+3y}{2\times20+3\times(-3)}=\frac{13}{40-9}=\frac{13}{31}$

منه : $\frac{x}{20}=\frac{13}{31}$ و $\frac{y}{-3}=\frac{13}{31}$ أي : $\underline{x=\frac{260}{31}}$ و $\underline{y=\frac{-39}{31}}$

تمرين 7

انتبه ← تعليق ←

1 لدينا علما أن $x+\frac{1}{x}=7$ و نعلم أن : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\,x\,\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2$

بعد التعويض باستعمال المعطيات نجد أن : $49=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ بالتالي $\underline{x^2+\frac{1}{x^2}=49-2=47}$

2 لدينا : $x^2+y^2=3$ منه $x^2+y^2+2xy=3xy+2xy$ منه $(x+y)^2=5xy$ (1)

و أيضا لدينا : $x^2+y^2=3$ منه $x^2+y^2-2xy=3xy-2xy$ منه $(x-y)^2=xy$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(x+y)^2=5(x-y)^2$ منه $\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}=5$ منه $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2=5$

و حيث أن $x>y>0$ فإن $\frac{x+y}{x-y}>0$ بالتالي $\frac{x+y}{x-y}=\sqrt{5}$

3 لدينا x و y متناسبان على التوالي مع : 12 و 14 ، منه : $\frac{x}{y}=\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$ منه $\frac{x}{y}=\frac{6}{7}$ منه $\frac{x}{6}=\frac{y}{7}$ (1)

لدينا y و z متناسبان على التوالي مع : 21 و 24 ، منه : $\frac{y}{z}=\frac{21}{24}=\frac{7}{8}$ منه $\frac{y}{7}=\frac{z}{8}$ منه $\frac{y}{7}=\frac{z}{8}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $\frac{x}{6}=\frac{y}{7}=\frac{z}{8}$ منه $\frac{x}{6}=\frac{y}{7}=\frac{z}{8}=\frac{x+y+z}{6+7+8}=\frac{42}{21}=2$

منه : $\frac{x}{6}=2$ و $\frac{y}{7}=2$ و $\frac{z}{8}=2$ بالتالي : $\underline{x=12}$ و $\underline{y=14}$ و $\underline{z=16}$

R

القـــــــــوى

تمرين 1

احسب ما يلي : $(-2)^3$ ، $(-2007)^0$ ، 4^{-1} ، $(-10)^{-2}$ ، $\left(\frac{-5}{2}\right)^{-3}$ ، $(-1)^{2007}$ ، $(-1)^{2000}+(-1)^{2001}$

تمرين 2

بسط ما يلي :

$a^5 \times a^{13} \times a^{-7}$ ، $(a^4)^{-2} \times (a^{-3})^{-7}$ ، $2^7 \times 10^{-17} \times 5^7$ ، $\left(\frac{3}{4}\right)^{-7} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{-10}$ ، $\frac{8^5}{100000^3}$ ،

$\frac{a^4\ b^{-2}\ a\ b^{-3}}{a^{-3}\ b^2\ a^5\ b}$ ، $\left((a^4)^{-2} \times b^{-3}\right)^{-3}$ $(a^{-3} \times b^2 \times c^{-5})^3$

تمرين 3

بسط العدد K :
ثم احسب قيمته
من أجل :
$b = 1000$
و $a = 0{,}01$

$$K = \frac{ab^{-2}\ (a^{-1}\ b^2)^3\ a^{-2}\ b^3}{a^{-2}\ (a^2\ b^{-1})^2\ (a^3\ b^2)}$$

تمرين 4

من أولمبياد الرياضيات

بين أن : $1+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^9+2^{10}=2^{11}-1$

القـــــــــوى - حلول

تمرين 1

انتبه ← تعليق ←

لننشر و نبسط :

$(-2)^3 = (-2)\times(-2)\times(-2)$ $= -8$	$4^{-1} = \frac{1}{4}$: $x^{-1} = \frac{1}{x}$ $(\ x \neq 0\ )$	$\left(\frac{-5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{-5}\right)^3 = \frac{2}{-125}$: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$(-10)^{-2} = \frac{1}{(-10)^2}$ $= \frac{1}{(-10)\times(-10)}$ $= \frac{1}{100}$: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ $(\ x \neq 0\ )$
$(-2007)^0 = 1$: $x^0 = 0$ $(\ x \neq 0\ )$	$(-1)^{2007} = -1$	$(-1)^{2000} + (-1)^{2001} = 1 + (-1)$ $= 0$	

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

لننشر و نبسط :

$$a^5 \times a^{13} \times a^{-7} = a^{5+13+(-7)} = a^{11}$$

$$(a^4)^{-2} \times (a^{-3})^{-7} = a^{-8} \times a^{21} = a^{13}$$

$$2^7 \times 10^{-17} \times 5^7 = 2^7 \times 5^7 \times 10^{-17} = 10^7 \times 10^{-17} = 10^{-10}$$

: $a^n \times b^n = (ab)^n$; $a^n \times a^m = a^{n+m}$

$$K = \left(\frac{3}{4}\right)^{-7} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{-10} = \left(\frac{4}{3}\right)^{7} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{-10} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$$

: لاتخلط بين قواعد جمع و ضرب الأعداد النسبية.

تذكـــير :

أمثلة الجمع :	أمثلة الضرب :
$13 + 2 = +15$	$13 \times 2 = +26$
$(-13) + (-2) = -15$	$(-13)\times(-2) = +26$
$(-13) + 2 = -11$	$(-13) \times 2 = -26$
$13 + (-2) = +11$	$13 \times (-2) = -26$

$$\frac{8^5}{100000^3} = \frac{(2^3)^5}{(10^5)^3} = \frac{2^{15}}{10^{15}} = \left(\frac{2}{10}\right)^{15} = \left(\frac{1}{5}\right)^{15}$$

$$\frac{a^4\ b^{-2}\ a\ b^{-3}}{a^{-3}\ b^2\ a^5\ b} = \frac{a^4 \times a^1 \times b^{-2} \times b^{-3}}{a^{-3} \times a^5 \times b^2 \times b} = \frac{a^5 \times b^{-5}}{a^2 \times b^3} = a^{5-2} \times b^{-5-3} = a^3\ b^{-8}$$

$$\begin{aligned}(a^{-3} \times b^2 \times c^{-5})^3 \left((a^4)^{-2} \times b^{-3}\right)^{-3} &= (a^3)^3 \times (b^2)^3 \times (c^{-5})^3 \times (a^{-8} \times b^{-3})^{-3} \\ &= a^{-9} \times b^6 \times c^{-15} \times (a^{-8})^{-3} \times (b^{-3})^{-3} \\ &= a^{-9} \times b^6 \times c^{-15} \times a^{24} \times b^9 \\ &= a^{15} \times b^{15} \times c^{-15} \\ &= \left(\frac{ab}{c}\right)^{15}\end{aligned}$$

R

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

لنحسب K حيث : $b = 1000$ و $a = 0{,}01$	لنبسط :
لدينا : $b = 10^{3}$ و $a = 10^{-2}$ إذن : $K = \left(10^{-2}\right)^{-9} \times \left(10^{3}\right)^{7}$ $K = 10^{18} \times 10^{21}$ $K = 10^{39}$	$K = \dfrac{ab^{-2}\left(a^{-1}b^{2}\right)^{3} a^{-2}\ b^{3}}{a^{-2}\left(a^{2}\ b^{-1}\right)^{2}\left(a^{3}\ b^{2}\right)}$ $K = \dfrac{a \times b^{-2} \times \left(a^{-1}\right)^{3} \times \left(b^{2}\right)^{3} \times a^{-2} \times b^{3}}{a^{-2} \times \left(a^{2}\right)^{2} \times \left(b^{-1}\right)^{2} \times a^{3} \times b^{2}}$ $K = \dfrac{a \times b^{-2} \times a^{-3} \times b^{6} \times a^{-2} \times b^{3}}{a^{-2} \times a^{4} \times b^{-2} \times a^{3} \times b^{2}}$ $K = \dfrac{a^{1+(-3)+(-2)} \times b^{-2+6+3}}{a^{-2+4+3} \times b^{-2+2}}$ $K = \dfrac{a^{-4} \times b^{7}}{a^{5} \times b^{0}}$ $K = \dfrac{a^{-4-5} \times b^{7}}{1}$ $K = a^{-9}\ b^{7}$

تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

لنبين أن : $1 + 2^{2} + 2^{3} + 2^{4} + \ldots + 2^{9} + 2^{10} = 2^{11} - 1$

نضع : $a = 1 + 2^{2} + 2^{3} + 2^{4} + \ldots + 2^{9} + 2^{10}$ منه

$2 \times a = 2 \times \left(1 + 2^{2} + 2^{3} + 2^{4} + \ldots + 2^{9} + 2^{10}\right)$

$2a = 2 + 2^{3} + 2^{4} + \ldots + 2^{10} + 2^{11}$

$2a = 1 + 2 + 2^{3} + 2^{4} + \ldots + 2^{10} + 2^{11} - 1$

$2a = a + 2^{11} - 1$

منه $2a - a = 2^{11} - 1$ بالتالي : $a = 2^{11} - 1$

R

الجذور المربعة

تمرين 1

احسب ما يلي : $A=\sqrt{1000000}$ ، $B=\dfrac{\sqrt{9}+\sqrt{121}}{\sqrt{49}}$ ، $C=\sqrt{\dfrac{50}{98}}$ ، $D=\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{9+\sqrt{49}}}}$

تمرين 2

بسط ما يلي :

$A=\sqrt{50}$ ، $B=\sqrt{363}$ ، $C=5\sqrt{27}$ ، $D=\sqrt{24}+7\sqrt{6}+2\sqrt{54}$

$E=\sqrt{3}\times\sqrt{21}\times\sqrt{7}$ ، $F=\sqrt{5^3\times7^5\times1000}$ ، $G=\sqrt{242}\times\sqrt{128}$ ، $H=\sqrt{7}\left(\sqrt{700}+\left(\sqrt{7}\right)^3\right)$

$I=\left(\sqrt{13}-5\right)\left(\sqrt{13}+5\right)$ ، $J=\left(\sqrt{5}+2\right)^2$ ، $K=\left(\sqrt{3}-1\right)^4$ ، $L=\left(\sqrt{3}+5\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$

تمرين 3

بسط ما يلي : $A=\sqrt{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}$ ، $B=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-7\right)^2}$ ، $C=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ، $D=\sqrt{8-2\sqrt{12}}$

تمرين 4

اجعل مقام الأعداد التالية عددا صحيحا : $A=\dfrac{3}{\sqrt{2}-1}$ ، $B=\dfrac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}}$ ، $C=\dfrac{5}{\sqrt{7}-2}-\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ ، $D=\dfrac{3+\sqrt{5}}{7+\sqrt{5}}-\dfrac{3-\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}$

الجذور المربعة - حلول

تمرين 1

انتبه ← تعليق ←

لنحسب :

$A=\sqrt{1000000}$ $A=\sqrt{10^6}$ $A=\sqrt{\left(10^3\right)^2}$ $A=10^3$	$B=\dfrac{\sqrt{9}+\sqrt{121}}{\sqrt{49}}$ $B=\dfrac{3+11}{7}$ $B=\dfrac{14}{7}$ $B=2$	$C=\sqrt{\dfrac{50}{98}}$ $C=\sqrt{\dfrac{25}{49}}$ $C=\dfrac{5}{7}$: نختزل أولا	$D=\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{9+\sqrt{49}}}}$ $D=\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{9+7}}}$ $D=\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{16}}}$ $D=\sqrt{31+\sqrt{21+4}}$ $D=\sqrt{31+\sqrt{25}}$ $D=\sqrt{31+5}$ $D=\sqrt{36}=6$:نبدأ بتبسيط الأقواس الداخلية

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

لنحسب :

$A=\sqrt{50}=\sqrt{25\times 2}=5\sqrt{2}$	$B=\sqrt{363}=\sqrt{121\times 3}=11\sqrt{3}$	$C=5\sqrt{27}=5\times\sqrt{9\times 3}$ $C==5\times 3\sqrt{3}=15\sqrt{3}$	$D=\sqrt{24}+7\sqrt{6}+2\sqrt{54}$ $D=\sqrt{4\times 6}+7\sqrt{6}+2\sqrt{9\times 6}$ $D=2\sqrt{6}+7\sqrt{6}+2\times 3\sqrt{6}$ $D=2\sqrt{6}+7\sqrt{6}+6\sqrt{6}$ $D=(2+7+6)\sqrt{6}$ $D=15\sqrt{6}$
$E=\sqrt{3}\times\sqrt{21}\times\sqrt{7}$ $E=\sqrt{3\times 7}\times\sqrt{21}$ $E=\sqrt{21}\times\sqrt{21}$ $E=\left(\sqrt{21}\right)^2$ $E=21$	$F=\sqrt{5^3\times 7^5\times 1000}$ $F=\sqrt{5^2\times 5\times 7^4\times 7\times 100\times 10}$ $F=5\times 7^2\times 10\sqrt{5\times 7\times 10}$ $F=5\times 49\times 10\sqrt{5\times 7\times 5\times 2}$ $F=5\times 490\times 5\sqrt{7\times 2}$ $F=12250\sqrt{14}$	$G=\sqrt{242}\times\sqrt{128}$ $G=\sqrt{121\times 2}\times\sqrt{64\times 2}$ $G=11\sqrt{2}\times 8\sqrt{2}$ $G=88\times\left(\sqrt{2}\right)^2$ $G=88\times 2$ $G=176$	
$H=\sqrt{7}\left(\sqrt{700}+\left(\sqrt{7}\right)^3\right)$ $H=\sqrt{7}\left(\sqrt{100\times 7}+\left(\sqrt{7}\right)^2\sqrt{7}\right)$ $H=\sqrt{7}\left(10\sqrt{7}+7\sqrt{7}\right)$ $H=\sqrt{7}\left(17\sqrt{7}\right)$ $H=17\times 7$ $H=119$	$L=\left(\sqrt{3}+5\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$ $L=\left(6+\sqrt{3}+10\sqrt{3}+5\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$ $L=\left(11+11\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$ $L=11+11\sqrt{3}+11\sqrt{3}+33$ $L=44+22\sqrt{3}$	$I=\left(\sqrt{13}-5\right)\left(\sqrt{13}+5\right)$ $I=\left(\sqrt{13}\right)^2-5^2$ $I=13-5$ $I=8$	$K=\left(\sqrt{3}-1\right)^4$ $K=\left(\left(\sqrt{3}-1\right)^2\right)^2$ $K=\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-2\times\sqrt{3}\times 1+1^2\right)^2$ $K=\left(3-2\sqrt{3}+1\right)^2$ $K=\left(4-2\sqrt{3}\right)^2$ $K=4^2-2\times 4\times 2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2$ $K=16-16\sqrt{3}+4\times 3$ $K=16-16\sqrt{3}+12$ $K=28-16\sqrt{3}$
	:بسطنا مباشرة أثناء النشر	$J=\left(\sqrt{5}+2\right)^2$ $J=\left(\sqrt{5}\right)^2+2\times\sqrt{5}\times 2+2^2$ $J=5+4\sqrt{5}+4$ $J=9+4\sqrt{5}$	

R

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

لنبسط :

$A=\sqrt{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}=\left|\sqrt{7}-3\right|$

و لدينا $\left(\sqrt{7}\right)^2=7$ و $3^2=9$ و $7<9$

منه $\sqrt{7}<3$ منه $\sqrt{7}-3<0$

بالتالي $A=-\left(\sqrt{7}-3\right)=3-\sqrt{7}$

لدينا $\sqrt{5}>1$ منه

$\sqrt{5}-1>0$

لدينا $\sqrt{5}<7$ منه

$\sqrt{5}-7<0$

بالتالي :

$B=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-7\right)^2}$

$B=\left|\sqrt{5}-1\right|+\left|\sqrt{5}-7\right|$

$B=\sqrt{5}-1+7-\sqrt{5}$

$B=6$

$C=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{1+2\sqrt{2}+2}$

$C=\sqrt{1^2+2\times1\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}$

$C=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$ لأن $1+\sqrt{2}>0$

$C=\left|1+\sqrt{2}\right|$

$C=1+\sqrt{2}$

$D=\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{2+2\sqrt{2}\times\sqrt{6}+6}$ لأن $\sqrt{2}+\sqrt{6}>0$

$D=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}\times\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}\right)^2}$

$D=\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}$

$D=\left|\sqrt{2}+\sqrt{6}\right|$

$D=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

لتبسيط العددين C و D يجب كتابة مابداخل الجذر مربع على شكل المتطابقة هامة $(a+b)^2$ أو $(a-b)^2$

تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

$$A=\frac{3}{\sqrt{2}-1}=\frac{3\times\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\times\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{3\sqrt{2}+3}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\frac{3\sqrt{2}+3}{2-1}=3\sqrt{2}+3$$

$$B=\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{5}-3\right)\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{5-3\sqrt{5}}{5}$$

$$C=\frac{5}{\sqrt{7}-2}-\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{5\left(\sqrt{7}+2\right)}{\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)}-\frac{2\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}+10}{7-4}-\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{5\sqrt{7}+10}{3}-\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{7\left(5\sqrt{7}+10\right)}{21}-\frac{3\left(2\sqrt{7}\right)}{21}=\frac{35\sqrt{7}+70-6\sqrt{7}}{21}=\frac{29\sqrt{7}+70}{21}$$

$$D=\frac{3+\sqrt{5}}{7+\sqrt{5}}-\frac{3-\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(7-\sqrt{5}\right)}{\left(7+\sqrt{5}\right)\left(7-\sqrt{5}\right)}-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(7+\sqrt{5}\right)}{\left(7-\sqrt{5}\right)\left(7+\sqrt{5}\right)}=\frac{21-3\sqrt{5}+7\sqrt{5}-5}{49-5}-\frac{21+3\sqrt{5}-7\sqrt{5}-5}{49-5}$$

$$D=\frac{21-3\sqrt{5}+7\sqrt{5}-5-21-3\sqrt{5}+7\sqrt{5}+5}{44}=\frac{\left(-3-3+7+7\right)\sqrt{7}}{44}=\frac{8\sqrt{7}}{44}=\frac{2\sqrt{7}}{11}$$

R

مبرهنة فيتاغورس

تمرين 1

$ABCD$ مستطيل حيث : $AB = 6cm$ و $AD = 9cm$.

و لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ و J نقطة من القطعة $[AD]$: حيث $AJ = 1cm$

① احسب المسافات IJ و IC و JC ② بين أن المثلث IJC : قائم الزاوية في النقطة I

③ احسب محيط و مساحة المثلث IJC

تمرين 2

ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث : $AB = 6cm$ و $AC = 8cm$.

و لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

① احسب المسافة BC

② احسب المسافة AH (احسب مساحة المثلث ABC بطريقتين)

③ احسب المسافات BH و CH

تمرين 3

من أولمبياد الرياضيات

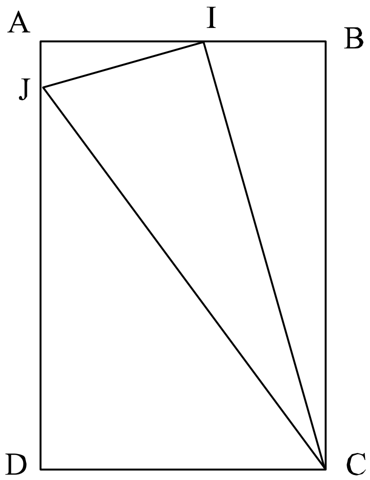
$ABCD$ مستطيـل و M نقطة داخلـه .

◈ بين أن : $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$

R

مبرهنة فيتاغورس-حلول

تمرين 1 — انتبه ← — تعليق ←



① لنحسب المسافات IJ و IC و JC

لدينا في المثلث القائم الزاوية AIJ حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$IJ^2 = AI^2 + AJ^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 1^2 = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$ منه $IJ = \sqrt{10}\ cm$

لدينا في المثلث القائم الزاوية IBC حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$IC^2 = BI^2 + BC^2 = 3^2 + 9^2 = 9 + 81 = 90$ منه $IC = \sqrt{90}\ cm$

لدينا في المثلث القائم الزاوية JDC حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$JC^2 = DC^2 + DJ^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ منه $JC = \sqrt{100} = 10\ cm$

② لنبين أن المثلث : IJC قائم الزاوية في النقطة I

لدينا : $JC^2 = 10^2 = 100$ و $IC^2 = \left(\sqrt{90}\right)^2 = 90$ و $IJ^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$

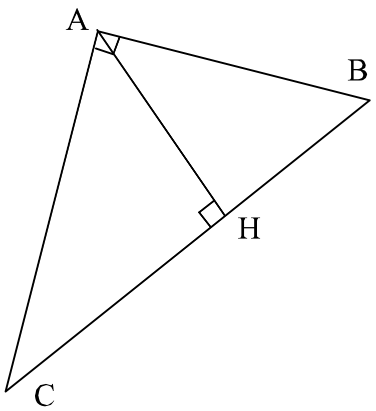
إذن : $IJ^2 + IC^2 = JC^2$ ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية نستنتج أن المثلث IJC قائم الزاوية في النقطة I

③ احسب محيط و مساحة المثلث IJC

محيط المثلث IJC هو : $p = IJ + JC + CI = \sqrt{10} + 10 + \sqrt{90} = \sqrt{10} + 10 + 3\sqrt{10} = 4\sqrt{10} + 10\ cm$

بما أن المثلث IJC قائم الزاوية في النقطة I فإن مساحته هي : $S = \frac{IJ \times IC}{2} = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{90}}{2} = \frac{\sqrt{900}}{2} = \frac{30}{2} = 15\ cm^2$

تمرين 2 — انتبه ← — تعليق ←



① لنحسب المسافة BC

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABC حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ منه $BC = \sqrt{100} = 10\ cm$

② احسب المسافة AH

بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في النقطة A فإن مساحته هي : $S = \frac{AB \times AC}{2}$

و أيضا بما أن $[AH]$ ارتفاع للمثلث ABC فإن مساحته أيضا هي : $S = \frac{AH \times BC}{2}$

نستنتج إذن أن : $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{AH \times BC}{2}$ منه $AH \times BC = AB \times AC$

نعوض نجد : $AH \times 10 = 6 \times 8$ أي $AH = 48$ 10 ، بالتالي : $AH = \frac{48}{10} = 4,8\ cm$

③ لنحسب BH و CH

* لدينا في المثلث القائم الزاوية ABH حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ منه $6^2 = 4,8^2 + BH^2$ منه $36 = 23,04 + BH^2$

منه : $BH^2 = 36 - 23,04$ ، $BH^2 = 12,96$ منه $BH = \sqrt{12,96}$ (باستعمال آلة حاسبة نجد $BH = 3,6\ cm$)

* لدينا : $CH = BC - BH = 10 - 3,6 = 6,4\ cm$

← رغم أننا نبحث عن المسافة BH إلا أن المتساوية $BH^2 = AH^2 + AB^2$ **خاطئة** لأن الوتر هو AB و ليس BH

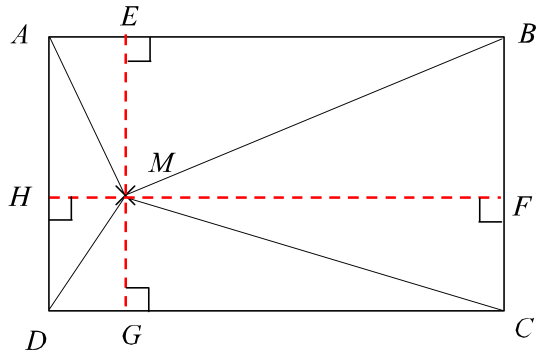
R

تمرين 3 / من أولمبياد الرياضيات

تمرين 3 :

لتكن E و F و G و H هي على التوالي المساقط العمودية للنقطة M على (AB) و (BC) و (CD) و (AD) على التوالي .

لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :



$AM^2 = EM^2 + AE^2$ و $CM^2 = FM^2 + CF^2$

$AM^2 = EM^2 + MH^2$ و $CM^2 = FM^2 + MG^2$

و $BM^2 = EM^2 + BE^2$ و $DM^2 = MG^2 + DG^2$

$BM^2 = EM^2 + FM^2$ و $DM^2 = MG^2 + MH^2$

نستنتج إذن أن :

$$AM^2 + CM^2 = EM^2 + MH^2 + FM^2 + MG^2$$

و $BM^2 + DM^2 = EM^2 + FM^2 + MG^2 + MH^2$

بالتالـــي : $\underline{AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2}$

R

الترتيب و العمليات

تمرين 1

x و y عددان حقيقيان حيث: $x \le y$

① قارن $3x-7y$ و $-5y+x$

② قارن $-\frac{2y+8x}{5}$ و $\frac{7x-11y}{2}$

تمرين 2

x و y و z و t و k أعداد حقيقية حيث:	$3 \le x \le 6$	$-7 \le y \le -4$	$2 \le z \le 5$	$-10 \le t \le 1$	$-9 \le k \le -2$

أطر التعابير الآتية :

$x+y$	$z+t$	$x-y$	$z-x$	$6t+2y$	$-y+5x$
$5x$	$-6y$	$10y$	$-4t$	$-4y-16$	$x+y-t+6z+13$
x^2	y^2	t^2	xz	xy	yk
$\frac{z}{x}$	$\frac{y}{z}$	$\frac{x-t}{y+10z}$	$\frac{y^2+5}{t-10}$		

تمرين 3

قارن كل عددين مما يلي :

$\sqrt{37}$ و $3\sqrt{5}$	$-\sqrt{3}$ و $-2\sqrt{10}$	$\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$-7\sqrt{14}$ و $20\sqrt{2}$
$\sqrt{5}-\sqrt{40}$ و $\sqrt{17}-\sqrt{11}$		$6+\sqrt{3}$ و $6+\sqrt{5}$	$3+\sqrt{3}$ و $\sqrt{27}+1$

تمرين 4

إذا علمت أن : $\begin{cases} 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \\ 2,23 < \sqrt{5} < 2,24 \end{cases}$ فاعط تأطيرا للعددين : $A = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$ و $B = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

الترتيب و العمليات - حلول

تمرين 1

انتبه ← تعليق ←

معطيات : x و y عددان حقيقيان حيث: $x \le y$

① لنقارن $3x-7y$ و $-5y+x$

لدينا :

$(-5y+x)-(3x-7y) = -5y+x-3x+7y$

$= -2x+2y = 2(-x+y) = 2(y-x)$

و بما أن $x \le y$ فإن $x-y \le 0$ منه $2(x-y) \le 0$

بالتالي : $-5y+x \le 3x-7y$

② لنقارن $-\frac{2y+8x}{5}$ و $\frac{7x-11y}{2}$

لدينا :

$\frac{7x-11y}{2} + \frac{2y+8x}{5} = \frac{5(7x-11y)+2(2y+8x)}{10}$

$= \frac{35x-55y+4y+16x}{10} = \frac{51x-51y}{10} = \frac{51(x-y)}{10}$

و بما أن $x \le y$ فإن $x-y \le 0$ منه $\frac{51(x-y)}{2} \le 0$

بالتالي : $\frac{7x-11y}{2} \le -\frac{2y+8x}{5}$

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

معطيات	$3 \le x \le 6$	$-7 \le y \le -4$	$2 \le z \le 5$	$-10 \le t \le 1$	$-9 \le k \le -2$

لنؤطر $x+y$

لدينا : $3 \le x \le 6$ و $-7 \le y \le -4$

إذن : $-7+3 \le x+y \le -4+6$

إذن : $-4 \le x+y \le 2$

لنؤطر $z+t$

لدينا : $2 \le z \le 5$ و $-10 \le t \le 1$

إذن : $2+(-10) \le z+t \le 5+1$

إذن : $-8 \le z+t \le 6$

لنؤطر $5x$

لدينا $3 \le x \le 6$ منه : $15 \le 5x \le 30$

لنؤطر $-6y$

لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $24 \le -6y \le 42$

لنؤطر $10y$

لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $-70 \le 10y \le -40$

لنؤطر $-4t$

لدينا $-10 \le t \le 1$ منه : $-4 \le -4t \le 40$

انتبه ← تذكر أنه عندما نضرب متفاوتة في عدد سالب فإننا نغير ترتيب الأطراف.

لنؤطر $x-y$

لدينا : $x-y = x+(-y)$

و لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$

و لدينا : $3 \le x \le 6$

إذن : $3+4 \le x+(-y) \le 6+7$

بالتالي : $7 \le x-y \le 13$

لنؤطر $z-x$

لدينا : $z-x = z+(-x)$

و لدينا $3 \le x \le 6$ منه : $-6 \le -x \le -3$

و لدينا : $2 \le z \le 5$

إذن : $2+(-6) \le z+(-x) \le 5+(-3)$

بالتالي : $-4 \le z-x \le 2$

انتبه ← لانستطيع التأطير مباشرة لأنه لاتوجد قاعدة تسمح بتأطير الفرق

لنؤطر x^2

لدينا $3 \le x \le 6$ منه : $9 \le x^2 \le 36$

لنؤطر y^2

لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$

منه : $16 \le (-y)^2 \le 49$

بالتالي : $16 \le y^2 \le 49$

تعليق ← لانستطيع تأطير y^2 مباشرة لأن المتفاوتة $-7 \le y \le -4$ تحتوي على أعداد سالبة، لذلك نؤطر $-y$ فنحصل على متفاوتة كل أطرافها موجبة، ثم نؤطر $(-y)^2$ ، ثم نستعمل الخاصية: $(-y)^2 = y^2$

لنؤطر $6t+2y$

لدينا $-10 \le t \le 1$ منه : $-60 \le 6t \le 6$

لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $-14 \le 2y \le -8$

إذن : $-60+(-14) \le 6t+2y \le 6+(-8)$

بالتالي : $-74 \le 6t+2y \le -2$

لنؤطر $-y+5x$

لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$

لدينا $3 \le x \le 6$ منه : $15 \le 5x \le 30$

إذن : $4+15 \le -y+5x \le 7+30$

بالتالي : $19 \le -y+5x \le 37$

لنؤطر $-4y-16$

لدينا : $-4y-16 = -4y+(-16)$

لدينا $-7 \le y \le -4$ منه : $16 \le -4y \le 28$

منه: $16+(-16) \le -4y+(-16) \le 28+(-16)$

بالتالي : $0 \le -4y-16 \le 12$

لنؤطر $x+y-t+6z+13$

لدينا :

$x+y-t+6z+13 = x+y+(-t)+6z+13$

لدينا : $3 \le x \le 6$

و : $-7 \le y \le -4$

و لدينا: $-10 \le t \le 1$ منه : $-1 \le -t \le 10$

و لدينا: $2 \le z \le 5$ منه : $12 \le 6z \le 30$

نجمع المتفاوتات فنجد :

$20 \le x+y+(-t)+6z+13 \le 55$

R

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

لنؤطر t^2

لدينا $-10 \le t \le 1$ منه :

$-10 \le t \le 0$ أو $0 \le t \le 1$

$0 \le -t \le 10$ أو $0 \le t \le 1$

منه $0 \le t^2 \le 1$ أو $0 \le (-t)^2 \le 100$

منه $0 \le t^2 \le 1$ أو $0 \le t^2 \le 100$

بالتالي: $0 \le t^2 \le 100$

← صعوبة هذا التأطير تكمن في كون العدد t مؤطر بين عدد سالب و آخر موجب ، مما يعيق استعمال قاعدة تأطير المربع مباشرة أو حتى تأطير $-t$ ، لذلك نستعمل الحالات : فنؤطر t في الحالة الموجبة ثم في الحالة السالبة ثم نستنتج التأطير من النتائج المحصل عليها.

← تذكر أننا نؤطر مستعملين قواعد التأطير و ليس بتطبيق تعبير المجهول على الأعداد.

لنؤطر $\frac{x-t}{y+10z}$

لدينا : $\frac{x-t}{y+10z} = (x+(-t))\times\frac{1}{y+10z}$

لدينا : $-10 \le t \le 1$ منه : $-1 \le -t \le 10$

و لدينا : $3 \le x \le 6$

إذن : $2 \le x+(-t) \le 16$

لدينا : $2 \le z \le 5$ منه: $20 \le 10z \le 50$

و لدينا : $-7 \le y \le -4$

إذن : $13 \le y+10z \le 46$

إذن : $\frac{1}{46} \le \frac{1}{y+10z} \le \frac{1}{13}$

منه :

$$2\times\frac{1}{46} \le (x+(-t))\times\frac{1}{y+10z} \le 16\times\frac{1}{13}$$

بالتالي : $\frac{1}{23} \le \frac{x-t}{y+10z} \le \frac{16}{13}$

← لاحظ أن التعابير الأخيرة مركبة لذلك فتأطيرها يتطلب كتابتها على شكل جذاءات و مجاميع قصد التمكن من تطبيق قواعد الترتيب.

لنؤطر xz

لدينا : $3 \le x \le 6$ و $2 \le z \le 5$

منه : $6 \le xz \le 30$

لنؤطر xy

لدينا : $-9 \le k \le -2$ و $-7 \le y \le -4$

منه : $2 \le -k \le 9$ و $4 \le -y \le 7$

منه : $4\times 2 \le (-y)\times(-k) \le 7\times 9$

بالتالي : $8 \le yk \le 63$

← لاحظ أننا استعملنا نفس تقنية تأطير xy ، لكننا استفدنا من كون : $(-x)\times(-y) = xy$

لنؤطر $\frac{z}{x}$

لدينا : $\frac{z}{x} = z\times\frac{1}{x}$

لدينا : $3 \le x \le 6$ منه : $\frac{1}{6} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{3}$

و لدينا : $2 \le z \le 5$

منه : $2\times\frac{1}{6} \le z\times\frac{1}{x} \le 5\times\frac{1}{3}$

بالتالي : $\frac{2}{6} \le \frac{z}{x} \le \frac{5}{3}$ أو أيضا : $\frac{1}{3} \le \frac{z}{x} \le \frac{5}{3}$

لنؤطر $\frac{y^2+5}{t-10}$

لدينا : $\frac{y^2+5}{t-10} = (y^2+5)\times\frac{1}{t+(-10)}$

لدينا : $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$

منه : $16 \le (-y)^2 \le 49$ أي: $16 \le y^2 \le 49$

منه : $21 \le y^2+5 \le 54$

لدينا : $-10 \le t \le 1$ منه :

$-20 \le t-10 \le -9$

منه : $9 \le -(t-10) \le 20$

منه : $\frac{1}{20} \le \frac{1}{-(t-10)} \le \frac{1}{9}$

إذن :

$$21\times\frac{1}{20} \le (y^2+5)\times\frac{1}{-(t-10)} \le 54\times\frac{1}{9}$$

أي : $\frac{21}{20} \le \frac{-(y^2+5)}{t-10} \le 6$

بالتالي : $-6 \le \frac{(y^2+5)}{t-10} \le -\frac{21}{20}$

لنؤطر yk

لدينا : $3 \le x \le 6$ و $-7 \le y \le -4$

منه : $4 \le -y \le 7$

منه : $3\times 4 \le x\times(-y) \le 6\times 7$

منه : $12 \le -xy \le 42$

بالتالي : $-42 \le xy \le -12$

← بما أن قاعدة تأطير جذاء تستوجب أن تكون كل الأعداد موجبة ، فإننا اعتمدنا التقنية التالية : أطرنا $-y$ فتصبح أطراف المتفاوتة $4 \le -y \le 7$ كلها موجبة (حتى $-y$ لأن y سالب)، مما سمح لنا بتأطير الجذاء $-xy$ ، و باستعمال قاعدة تأطير المقابل نستطيع تأطير xy .

لنؤطر $\frac{y}{z}$

لدينا : $\frac{y}{z} = y\times\frac{1}{z}$

لدينا : $-7 \le y \le -4$ منه : $4 \le -y \le 7$

و لدينا : $2 \le z \le 5$

منه : $\frac{1}{5} \le \frac{1}{z} \le \frac{1}{2}$

منه : $4\times\frac{1}{5} \le (-y)\times\frac{1}{z} \le 7\times\frac{1}{2}$

أي : $\frac{4}{5} \le \frac{-y}{z} \le \frac{7}{2}$

بالتالي : $\frac{-7}{2} \le \frac{y}{z} \le \frac{-4}{5}$

R

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

نقارن $\sqrt{37}$ و $3\sqrt{5}$

لدينا : $\left(\sqrt{37}\right)^2 = 37$ و $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 9\times 5 = 45$

بما أن : $45 > 37$

فإن : $3\sqrt{5} > \sqrt{37}$

نقارن $\sqrt{5}-\sqrt{40}$ و $\sqrt{17}-\sqrt{11}$

لدينا $\sqrt{5}<\sqrt{40}$ منه $\sqrt{5}-\sqrt{40}<0$

لدينا $\sqrt{17}>\sqrt{11}$ منه $\sqrt{17}-\sqrt{11}>0$

بالتالي : $\sqrt{5}-\sqrt{40} < \sqrt{17}-\sqrt{11}$

نقارن $3+\sqrt{3}$ و $\sqrt{27}+1$

لدينا : $\left(3+\sqrt{3}\right)^2 = 3^2 + 2\times 3\times\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2$
$= 9+6\sqrt{3}+3 = 12+6\sqrt{3}$

و $\left(\sqrt{27}+1\right)^2 = \left(\sqrt{27}\right)^2 + 2\times\sqrt{27}\times 1 + 1^2$
$= 27+2\sqrt{9\times 3}+1 = 28+6\sqrt{3}$

بما أن : $12+6\sqrt{3} < 28+6\sqrt{3}$

فإن : $3+\sqrt{3} < \sqrt{27}+1$

نقارن $-\sqrt{3}$ و $-2\sqrt{10}$

لدينا : $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

و $\left(2\sqrt{10}\right)^2 = 4\times 10 = 40$

بما أن : $40 > 3$

فإن : $2\sqrt{10} > \sqrt{3}$

بالتالي : $-2\sqrt{10} < -\sqrt{3}$

← لاحظ أن العددان سالبان لذلك قارنا مقابليهما قبل مقارنتهما.

نقارن $-7\sqrt{14}$ و $20\sqrt{2}$

لدينا : $-7\sqrt{14} < 0$ و $20\sqrt{2} > 0$

منه : $20\sqrt{2} > -7\sqrt{14}$

← العدد الموجب أكبر من العدد السالب، لذلك لا نقارن المربعات

نقارن $\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

لدينا : $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

و $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2$
$= 2+2\sqrt{6}+3 = 5+2\sqrt{6}$

بما أن : $5+2\sqrt{6} > 5$

فإن : $\sqrt{2}+\sqrt{3} > \sqrt{5}$

نقارن $6+\sqrt{3}$ و $6+\sqrt{5}$

لدينا $\sqrt{5}>\sqrt{3}$ منه : $6+\sqrt{5} > 6+\sqrt{3}$

← لم نقارن المربعين و اكتفينا بمقارنة $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ لوجود العدد 6 في كلتا العددين.

تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

معطيات : $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ و $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$

① نؤطـر $A = 5\sqrt{2}+3\sqrt{5}$

لدينا : $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ منه $7{,}05 < 5\sqrt{2} < 7{,}1$

و لدينا : $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$ منه $4{,}46 < 2\sqrt{5} < 4{,}48$

بالتالـي : $11{,}51 < 5\sqrt{2}+3\sqrt{5} < 11{,}58$

أي : $11{,}51 < A < 11{,}58$

② نؤطـر $B = \dfrac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

نبسط B أولا:

$$B = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}+5}{5} = \frac{5\left(\sqrt{5}+1\right)}{5} = \sqrt{5}+1$$

لدينا: $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$ منه : $3{,}23 < \sqrt{5}+1 < 3{,}24$

بالتالي : $3{,}23 < B < 3{,}24$

R

مبرهنة طـــاليس

تمرين 1

ABCD رباعي محدب . M نقطة من [BD].

المستقيم المار من M و الموازي لـ (DC) يقطع (BC) فيE .

المستقيم المار من M و الموازي لـ (AD) يقطع (AB) فيF .

① قارن $\frac{BE}{BC}$ و $\frac{BM}{BD}$ ② قارن $\frac{BM}{BD}$ و $\frac{BF}{BA}$

③ برهن أن (EF) // (AC)

تمرين 2

ABCD شبه منحرف حيث : (AB)//(CD) .

AB=4cm و DC=8cm و AD=5cm و BC=6cm

H نقطة من [AD] حيث AH=2cm ، (BD) يقطع (HK) في M .

الموازي لـ (AB) و المار من H يقطع (BC) في K

① احسب BK و CK

② احسب MH

③ (AD) و (BC) يتقاطعان في E . احسب EA و EB

تمرين 3

ABCD متوازي أضلاع. M نقطة من [DB] . المستقيم (MC) يقطع (AD) في E و (AM) يقطع (DC) في F .

① قارن $\frac{MB}{MD}$ و $\frac{MA}{MF}$ ② قارن $\frac{MB}{MD}$ و $\frac{MC}{ME}$ ③ برهن أن (EF) // (AC)

تمرين 4

ABCD متوازي أضلاع. E نقطة من [BC] و F نقطة من [DC] حيث (DB) // (EF)

(AE) يقطع (DC) في I و (AF) يقطع (BC) في J .

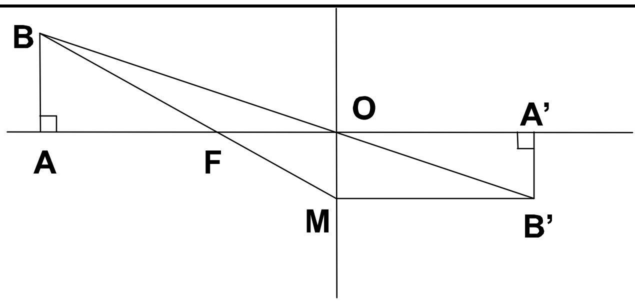
① قارن $\frac{AE}{AI}$ و $\frac{BE}{BC}$ ② قارن $\frac{BE}{BC}$ و $\frac{DF}{DC}$

③ قارن $\frac{DF}{DC}$ و $\frac{AF}{AJ}$ ④ برهن أن (EF) // (IJ)

R

مبرهنة طـــاليس

تمرين 5



انظر الشكل أعلاه حيث $(OM) \perp (OA')$ و $(MB') // (OA')$

① برهن أن $\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$ ② برهن أن $\frac{AB}{OM} = \frac{AF}{OF}$ ③ استنتج أن $\frac{1}{OF} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'}$

تمرين 6

ABC شبه منحرف قاعدتاه [AB] و [CD] (AB<CD) (AC) و (BD) يتقاطعان في O .
الموازي لـ (BC) و المار من D يقطع (AC) في E .

① أنشئ الشكل

② قارن $\frac{OA}{OC}$ و $\frac{OB}{OD}$ ثم $\frac{OC}{OE}$ و $\frac{OB}{OD}$

③ استنتج أن : $OC^2 = OA \times OE$

تمرين 7

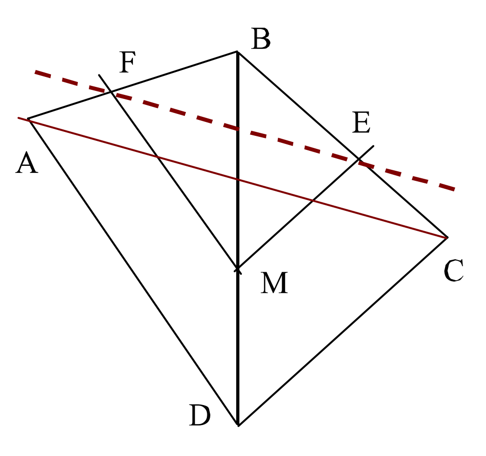
ABCD متوازي أضلاع و (Δ) مستقيم يمر من A و يقطع [BD] و (BC) و (CD) على التوالي في M و P و Q .

◈ أثبت أن : $MA^2 = MP \times MQ$

R

مبرهنة طــاليس - حلول

تمرين 1 ← انتبه ← تعليق



① لنقارن $\frac{BE}{BC}$ و $\frac{BM}{BD}$

لدينا في المثلث BDC ، $E \in (BC)$ و $M \in (BD)$ و $(EM)//(DC)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{BM}{BD} = \frac{BE}{BC}$

② لنقارن $\frac{BM}{BD}$ و $\frac{BF}{BA}$

لدينا في المثلث ADB ، $F \in (AB)$ و $M \in (BD)$ و $(FM)//(AD)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{BF}{BA} = \frac{BM}{BD}$

③ لنبرهن أن $(EF)//(AC)$

لدينا في المثلث ABC : $F \in (AB)$ و $E \in (BC)$

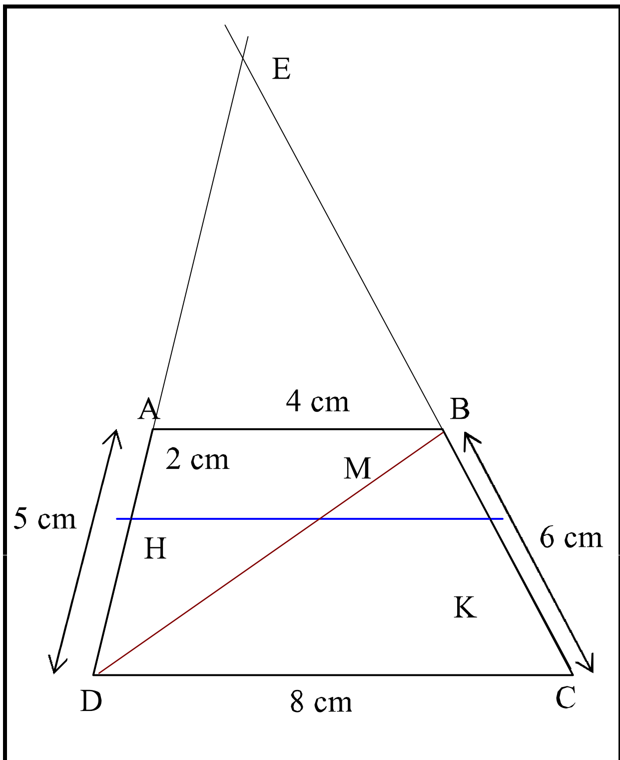
للنقط B و E و C نفس ترتيب النقط B و F و A

و لدينا حسب السؤالين السابقين : $\frac{BM}{BD} = \frac{BE}{BC}$ و $\frac{BF}{BA} = \frac{BM}{BD}$ منه : $\frac{BF}{BA} = \frac{BE}{BC}$

إذن و حسب مبرهنة طاليس العكسية : $(EF)//(AC)$

← يجب تحديد المثلث عند استعمال مبرهنة طاليس (المباشرة و العكسية)
عند استعمال مبرهنة طاليس العكسية يجب التأكيد على ترتيب النقط ، و اثبات التناسب باستعمال أسئلة سابقة أو باستعمال المعطيات.

تمرين 2 ← انتبه ← تعليق



① لنحسب BK و CK

لدينا في المثلث ADB، $H \in (AD)$ و $M \in (DB)$ و $(HM)//(AB)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{BM}{BD} = \frac{AH}{AD}$

لدينا في المثلث DBC، $K \in (BC)$ و $M \in (DB)$ و $(MK)//(DC)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{BM}{BD} = \frac{BK}{BC}$

نستنتج إذن أن : $\frac{AH}{AD} = \frac{BK}{BC}$ منه : $\frac{2}{5} = \frac{BK}{6}$

منه : $BK = \frac{6\times 2}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$ و $CK = BC - BK = 6 - 2{,}4 = 3{,}6$

← صعوبة السؤال تكمن في ضرورة استعمال مبرهنة طاليس في مثلثين للحصول على تناسب يحتوي على المطلوب و المعطيات.

② لنحسب MH

لدينا في المثلث ADB، $H \in (AD)$ و $M \in (DB)$ و $(HM)//(AB)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{HM}{AB} = \frac{DM}{DB} = \frac{DH}{DA}$

منه : $\frac{DH}{DA} = \frac{HM}{AB}$ أي : $\frac{5-2}{5} = \frac{HM}{4}$ بالتالي : $MH = \frac{4\times 3}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$

R

تمرين 2 انتبه ← تعليق ←

③ لنحسب EA و EB

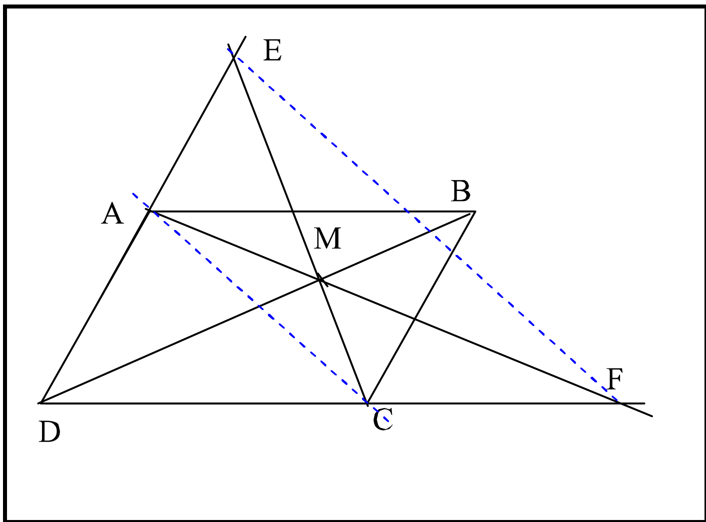
لدينا في المثلث EDC ، $A\in(ED)$ و $B\in(CE)$ و $(DC)//(AB)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{EA}{ED}=\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{DC}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ إذن : $ED=2\,EA$ و $EC=2\,EB$

و هذا يعني أن A منتصف $[DE]$ و B منتصف $[CE]$

و بالتالي : $\underline{EA=AD=5\,cm}$ و $\underline{EB=BC=6\,cm}$

تمرين 3 انتبه ← تعليق ←



① لنقارن $\frac{MB}{MD}$ و $\frac{MA}{MF}$

لدينا في المثلث MDF ، $A\in(MF)$ و $B\in(MD)$ و $(AB)//(DF)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{MB}{MD}=\frac{MA}{MF}$

② لنقارن $\frac{MB}{MD}$ و $\frac{MC}{ME}$

لدينا في المثلث MDE ، $C\in(EM)$ و $B\in(MD)$ و $(BC)//(DE)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة : $\frac{MB}{MD}=\frac{MC}{ME}$

③ لنبرهن أن $(EF)//(AC)$

لدينا في المثلث MEF : $A\in(MF)$ و $C\in(ME)$

للنقط A و M و F نفس ترتيب النقط C و M و E

و لدينا حسب السؤالين السابقين : $\frac{MB}{MD}=\frac{MA}{MF}$ و $\frac{MB}{MD}=\frac{MC}{ME}$ منه : $\frac{MA}{MF}=\frac{MC}{ME}$

إذن و حسب مبرهنة طاليس العكسية : $(EF)//(AC)$

← صعوبة السؤال تكمن في العثور على المثلث المناسب لتطبيق الخاصية ، سواء المباشرة أو العكسية ، لذلك حاول استعمال ألوان لتوضيح المثلث المناسب.

يتبـــع . . .

R

الحســـاب المثلثي

تمرين 1

ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث $AB=8$ و $AC=6$ ، I منتصف $[AB]$ و E مسقطها العمودي على (BC)

① احسب BC ثم $Cos(A\hat{B}C)$

② احسب $Cos(A\hat{B}C)$ بطريقة أخرى ثم استنتج حساب EB

③ احسب EC و IE

تمرين 2

ABC مثلث حيث $AB=8$ و $B\hat{A}C=30°$ و $B\hat{C}A=45°$. و لتكن H المسقط العمودي للنقطة B على (AC)

◈ احسب في هذا الترتيب المسافات : AH و BH و BC و CH و AC

تمرين 3

α قياس زاوية حادة غير منعدمة حيث $\sin(\alpha)=\frac{3}{5}$. احسب $Cos(\alpha)$ و $Tan(\alpha)$

تمرين 4

β قياس زاوية حادة غير منعدمة حيث $Tan(\beta)=\frac{\sqrt{5}}{2}$. احسب $Sin(\alpha)$ و $Cos(\alpha)$

تمرين 5

α قياس زاوية حادة غير منعدمة. بسط التعابير :

$$A=(Cos(\alpha)+Sin(\alpha))^2+(Cos(\alpha)-Sin(\alpha))^2 \quad ، \quad B=\frac{Sin^4(\alpha)-Cos^4(\alpha)}{Sin(\alpha)+Cos(\alpha)}$$

$$C=Cos(17°)+3\cos^2(20°)+Sin^2(60°)-\sin(73°)+3\cos^2(70°)+\frac{1}{\tan^2(30°)}$$

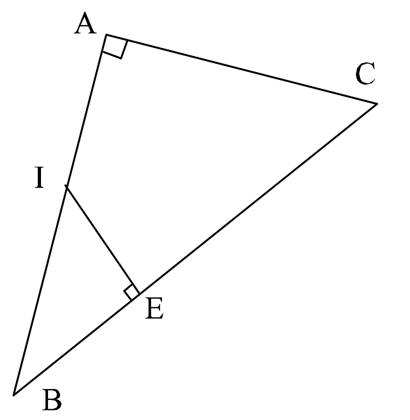
تمرين 6

x قياس زاوية حادة غير منعدمة. حدد قيمة x إذا علمت أن : $2\sin(x)-\tan(x)=0$

R

الحساب المثلثي-حلول

تمرين 1   انتبه ←   تعليق ←



① لنحسب BC ثم $Cos(A\hat{B}C)$

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABC حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$ منه $\underline{BC = \sqrt{100} = 10\,cm}$

منه : $\underline{Cos(A\hat{B}C) = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}}$

② لنحسب $Cos(A\hat{B}C)$ بطريقة أخرى ثم نحسب EB

لدينا في المثلث القائم الزاوية : IEB $Cos(A\hat{B}C) = \dfrac{BE}{BI}$

نستنتج إذن حسب السؤال السابق أن : $\dfrac{BE}{BI} = \dfrac{4}{5}$ أي : $\dfrac{BE}{4} = \dfrac{4}{5}$

($BI = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ لأن I منتصف $[AB]$) بالتالي : $\underline{BE = \dfrac{4\times 4}{5} = \dfrac{16}{5}}$

③ لنحسب EC و IE

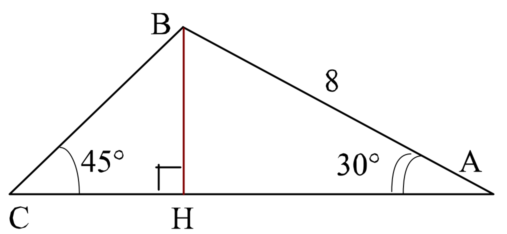
لدينا : $EC = BC - BE = 10 - \dfrac{16}{5} = \dfrac{50-16}{5} = \dfrac{34}{5}$

لحساب IE نحسب $Sin(A\hat{B}C)$ بطريقتين : لدينا في المثلث القائم الزاوية ABC : $Sin(A\hat{B}C) = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

لدينا في المثلث القائم الزاوية IEB : $Sin(A\hat{B}C) = \dfrac{IE}{BI}$ منه : $\dfrac{IE}{BI} = \dfrac{3}{5}$ أي : $\dfrac{IE}{4} = \dfrac{3}{5}$ بالتالي : $\underline{IE = \dfrac{4\times 3}{5} = \dfrac{12}{5}}$

← يمكن استعمال مبرهنة فيتاغورس المباشرة أيضا لحساب IE .

تمرين 2   انتبه ←   تعليق ←



① لنحسب AH

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABH : $Cos(H\hat{A}B) = \dfrac{AH}{AB}$

و بما أن : $H\hat{A}B = 30°$ و نحن نعلم أن : $Cos(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

فإن : $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ أي : $\dfrac{AH}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ بالتالي : $\underline{AH = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}}$

② لنحسب BH

لدينا في المثلث القائم الزاوية ABH : $Sins(H\hat{A}B) = \dfrac{BH}{AB}$

و بما أن : $H\hat{A}B = 30°$ و نحن نعلم أن : $Sin(30°) = \dfrac{1}{2}$

فإن : $\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{1}{2}$ أي : $\dfrac{BH}{8} = \dfrac{1}{2}$ بالتالي : $\underline{BH = \dfrac{8}{2} = 4}$

③ لنحسب BC

لدينا في المثلث القائم الزاوية BCH : $Sins(B\hat{C}H) = \dfrac{BH}{BC}$

و بما أن : $B\hat{C}H = 45°$ و نحن نعلم أن : $Sin(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

فإن : $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ أي : $\dfrac{4}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

بالتالي : $\underline{BC = \dfrac{2\times 4}{\sqrt{2}} = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = \dfrac{8\times\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}}$

④ لنحسب CH

لدينا في المثلث BCH : $C\hat{B}H = 180° - (45° + 90°) = 45°$

إذن فهو متساوي الساقين و منه : $\underline{CH = BH = 4}$

⑤ لنحسب AC

لدينا : $\underline{AC = CH + AH = 4 + 4\sqrt{3}}$

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

معطيات : $\sin(\alpha)=\frac{3}{5}$

① لنحسب $Cos(\alpha)$	② لنحسب $Tan(\alpha)$
نعلم أن : $Cos^2(\alpha)+Sin^2(\alpha)=1$ إذن : $Cos^2(\alpha)+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1$ منه : $Cos^2(\alpha)+\frac{9}{25}=1$ منه : $Cos^2(\alpha)=1-\frac{9}{25}=\frac{25-9}{25}=\frac{16}{25}$ و حيث أننا نعلم أن : $Cos(\alpha)>0$ فإن : $Cos(\alpha)=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$	نعلم أن : $Tan(\alpha)=\frac{Sin(\alpha)}{Cos(\alpha)}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$

تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

معطيات : $Tan(\beta)=\frac{\sqrt{5}}{2}$

① لنحسب $Sin(\alpha)$ و $Cos(\alpha)$

نعلم أن : $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ إذن : $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ منه $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{5}}=\frac{\cos\alpha}{2}$ منه $\frac{(\sin\alpha)^2}{5}=\frac{(\cos\alpha)^2}{4}$

منه $\frac{1}{9}=\frac{(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2}{5+4}=\frac{(\cos\alpha)^2}{4}=\frac{(\sin\alpha)^2}{5}$ ، نستنتج إذن أن :

$\frac{1}{9}=\frac{(\sin\alpha)^2}{5}$ منه $(\sin\alpha)^2=\frac{5}{9}$ و بالتالي $\sin\alpha=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ و $\frac{1}{9}=\frac{(\cos\alpha)^2}{4}$ منه $(\cos\alpha)^2=\frac{4}{9}$ و بالتالي $\cos\alpha=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

← هناك طرق أخرى لحساب $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$. لاحظ أن هذه الطريقة تعتمد على قواعد التناسب و قواعد النسب المثلثية.

تمرين 5

انتبه ← تعليق ←

① لنبسط :

$$A=(Cos(\alpha)+Sin(\alpha))^2+(Cos(\alpha)-Sin(\alpha))^2=Cos^2(\alpha)+2\times Cos(\alpha)\times Sin(\alpha)+Sin^2(\alpha)+Cos^2(\alpha)-2\times Cos(\alpha)\times Sin(\alpha)+Sin^2(\alpha)$$

$$A=Cos^2(\alpha)+Sin^2(\alpha)+Cos^2(\alpha)+Sin^2(\alpha)=1+1=2$$

$$B=\frac{Sin^4(\alpha)-Cos^4(\alpha)}{Sin(\alpha)+Cos(\alpha)}=\frac{(Sin^2(\alpha)-Cos^2(\alpha))\times(Sin^2(\alpha)+Cos^2(\alpha))}{Sin(\alpha)+Cos(\alpha)}=\frac{Sin^2(\alpha)-Cos^2(\alpha)}{Sin(\alpha)+Cos(\alpha)}=\frac{(Sin(\alpha)-Cos(\alpha))\times(Sin(\alpha)+Cos(\alpha))}{Sin(\alpha)+Cos(\alpha)}$$

$$B=Sin(\alpha)-Cos(\alpha)$$

$$C=Cos(17°)+3\cos^2(20°)+Sin^2(60°)-\sin(73°)+3Cos^2(70°)+\frac{1}{\tan^2(30°)}$$

$$C=Cos(17°)+3\cos^2(20°)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-Cos(17°)+3Sin^2(20°)+\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$C=Cos(17°)-Cos(17°)+3(\cos^2(20°)+\sin^2(20°))+\frac{3}{4}+\frac{1}{\frac{3}{9}}$$

$$C=\quad 0 \quad +3\times 1 \quad +\frac{3}{4}+\frac{9}{3}=3+\frac{3}{4}+3=6+\frac{3}{4}=\frac{24+3}{4}=\frac{27}{4}$$

←لاحظ أن التبسيط اعتمد على تطبيق الخاصية $Cos^2(\alpha)+Sin^2(\alpha)=1$ و على المتطابقات الهامة.

R

تمرين 6 | انتبه ← | تعليق ←

معطيات : $2\sin(x)-\tan(x)=0$ و $0<x<90°$

① لنحدد قيمة x

لدينا : $2\sin(x)-\tan(x)=0$ منه : $2\sin(x)-\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}=0$ منه : $\sin(x)\left(2-\dfrac{1}{\cos(x)}\right)=0$

إذن : $\sin(x)=0$ أو $2-\dfrac{1}{\cos(x)}=0$ ، و لكن لدينا حسب المعطيات $0<x<90°$ أي أن $\sin(x)>0$

إذن : $2-\dfrac{1}{\cos(x)}=0$ منه : $2=\dfrac{1}{\cos(x)}$ منه : $2\cos(x)=1$ منه : $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$

و بالتالي : $\underline{x=60°}$

← لاحظ أن إيجاد العدد x يعتمد على إيجاد إحدى نسبه المثلثية ثم استعمال جدول قيم النسب المثلثية الخاصية لتحديد قيمته.

R

الزوايا المحيطية

تمرين 1

A و M و B ثلاث نقط من دائرة (C) مركزها O في هذا الترتيب حيث $AOB=100°$.

① احسب $A\hat{M}B$

② لتكن N مماثلة A بالنسبة لـ O. احسب $B\hat{M}N$

تمرين 2

(C) دائرة مركزها O و قطرها $[AB]$. $M \in (C)$. منصف الزاوية $[A\hat{M}B]$ يقطع الدائرة (C) في النقطة I

◈ بين أن $(OI)\perp(AB)$

تمرين 3

A و M و B ثلاث نقط من دائرة (C) . منصف الزاوية $[A\hat{M}B]$ يقطع الدائرة (C) في النقطة I

◈ بين أن $AI=BI$

تمرين 4

$MNPQ$ رباعي محدب محاط بدائرة (C) حيث $N\hat{M}Q=80°$

◈ احسب $N\hat{P}Q$

تمرين 5

A و B نقطتان مختلفتان من دائرة (C) مركزها O.

ليكن (D) مماس الدائرة (C) في النقطة I و (Δ) مماس الدائرة (C) في النقطة J

(D) و (Δ) يتقاطعان في النقطة M

◈ بين أن $AM=BM$

الزوايـــا المحيطيـــة- حلول

تمرين 1

انتبه ← تعليق ←

① لنحسب $A\hat{M}B$

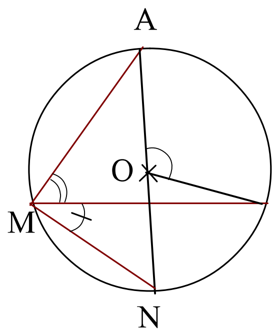
لدينا $A\hat{O}B$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطة $A\hat{M}B$

إذن : $A\hat{M}B = \dfrac{A\hat{O}B}{2} = \dfrac{100°}{2} = 50°$

② لنحسب $B\hat{M}N$

لدينا $B\hat{O}N$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطة $B\hat{M}N$

إذن : $B\hat{M}N = \dfrac{B\hat{O}N}{2} = \dfrac{180-100}{2} = \dfrac{80}{2} = 40°$



تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

① لنبين أن $(OI)\perp(AB)$

لكي نبين أن $(OI)\perp(AB)$ سنبين أن $B\hat{O}I = 90°$

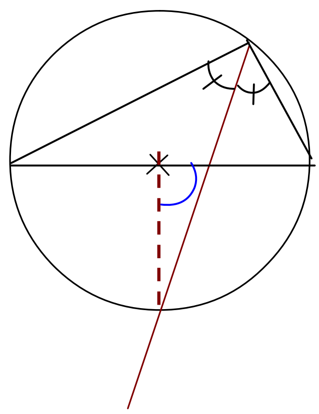
لدينا $[AB]$ قطر في الدائرة (C) و $A\hat{M}B$ زاوية محيطية تحصر هذا القطر ،

إذن : $A\hat{M}B = \dfrac{A\hat{O}B}{2} = \dfrac{180}{2} = 90°$

و بما أن : $[MI)$ هو منصف الزاوية $A\hat{M}B$ فإن : $I\hat{M}B = \dfrac{A\hat{M}B}{2} = \dfrac{90}{2} = 45°$

و لدينا $B\hat{O}I$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطة $I\hat{M}B$

إذن : $B\hat{O}I = 2\,B\hat{M}I = 2\times 45 = 90°$ و بالتالي : $(OI)\perp(AB)$



← تذكر الخاصية الهامة " كل زاوية محيطية تحصر القطر تكون قائمة"

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

① لنبين أن $AI = BI$

لكي نبين أن $AI = BI$ سنبين أن المثلث AIB متساوي الساقين في I

لدينا $A\hat{M}I$ و $A\hat{B}I$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AI

إذن : $A\hat{B}I = A\hat{M}I$ (1)

و لدينا $B\hat{M}I$ و $I\hat{A}B$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AI

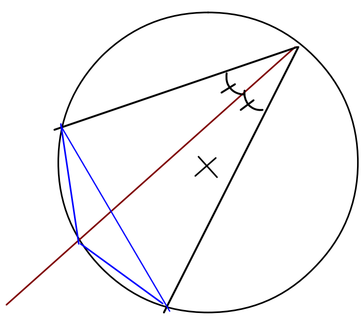
إذن : $I\hat{A}B = B\hat{M}I$ (2)

و بما أن $[MI)$ منصف $A\hat{M}B$ فإن : $A\hat{M}I = B\hat{M}I$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $I\hat{B}A = I\hat{A}B$

و هذا يعني أن : المثلث AIB متساوي الساقين في I

و بالتالي : $AI = BI$

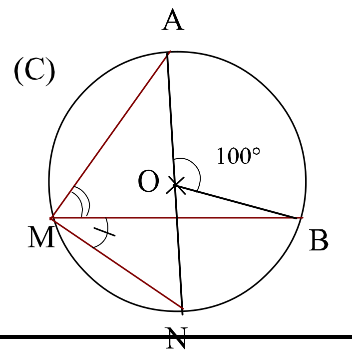


← تذكر الخاصية الهامة " كل زاوية محيطية تحصر القطر تكون قائمة"

R

تمرين 4

انتبه ← تعليق ←



① لنحسب $A\hat{M}B$

لدينا $A\hat{O}B$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $A\hat{M}B$

إذن : $A\hat{M}B = \frac{A\hat{O}B}{2} = \frac{100°}{2} = 50°$

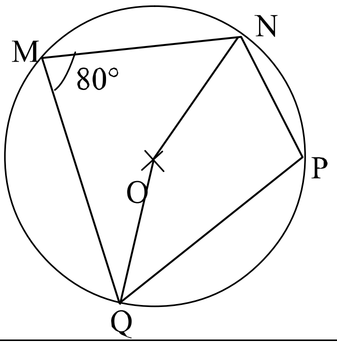
② لنحسب $B\hat{M}N$

لدينا $B\hat{O}N$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $B\hat{M}N$

إذن : $B\hat{M}N = \frac{B\hat{O}N}{2} = \frac{180-100}{2} = \frac{80}{2} = 40°$

تمرين 5

انتبه ← تعليق ←



① لنحسب $N\hat{P}Q$

لدينا $N\hat{O}Q$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $N\hat{M}Q$

إذن : $N\hat{O}Q = 2\,N\hat{M}Q = 2 \times 80 = 160°$

منه : $N\breve{O}Q = 360° - N\hat{O}Q = 360 - 160 = 200°$

لدينا $N\breve{O}Q$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $N\hat{P}Q$

إذن : $N\hat{P}Q = \frac{N\breve{O}Q}{2} = \frac{200}{2} = 100°$

← لاحظ الفرق بين الزاوية المحدبة $N\hat{O}Q$ (قياسها أقل من $180°$) و الزاوية غير المحدبة $N\breve{O}Q$ (قياسها أكبر من $180°$)

يتبع ...

R

المثلثات : المتقايسة - المتشابهة

تمرين 1

$ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين قاعدتاه $[AB]$ و $[CD]$ ($AB < CD$) و قطراه يتقاطعان في I

① بين أن ADC يقايس BDC

② بين أن ADB يقايس ACB

③ استنتج أن ADI يقايس BIC

تمرين 2

ABC مثلث متساوي الأضلاع.

لتكن : A' مماثلة A بالنسبة لـ B ، B' مماثلة B بالنسبة لـ C ، C' مماثلة C بالنسبة لـ A

① بين أن المثلثات $BB'A'$ و $CC'B'$ و $AA'C'$ متقايسة

② استنتج طبيعة المثلث $A'B'C'$

تمرين 3

$ABCD$ متوازي أضلاع . I و J هما على التوالي المسقطان العموديان لـ B و D على (AC).

① بين أن ABI يقايس DJC

② استنتج أن DJI يقايس BJI

③ استنتج طبيعة الرباعي $DIBJ$.

تمرين 4

$ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[CD]$ ($AB < CD$) و قطراه يتقاطعان في I

◈ بين أن AIB و CID متشابهان

تمرين 5

$ABCD$ رباعي محدب محاط بدائرة (C) و قطراه يتقاطعان في I

◈ بين أن AIB و CID متشابهان

◈ استنتج أن : $IA \times IC = IB \times ID$

تمرين 6

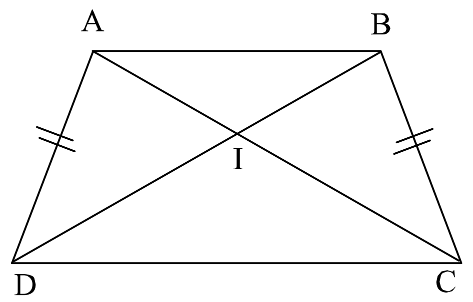
ABC مثلث قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

◈ بين أن ABH و ABC متشابهان ثم استنتج أن : $AB^2 = BH \times BC$

◈ بين أن ABH و ACH متشابهان ثم استنتج أن : $AH^2 = BH \times CH$

المثلثات المتقايسة و المتشابهة -حلول

تمرين 1 انتبه ← تعليق ←



① لنبين أن ADC يقايس BDC

لدينا $[DC]$ ضلع مشترك للمثلثين ADC و BDC (1)

و بما أن $ABCD$ متساوي الساقين فإن : $BC = AD$ (2)

و أيضا : $B\hat{C}D = A\hat{D}C$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : ADC يقايس BDC

② لنبين أن ADB يقايس ACB

لدينا $[AB]$ ضلع مشترك للمثلثين ADB و ACB (4)

و بما أن $ABCD$ متساوي الساقين فإن : $BC = AD$ (5)

و أيضا : $A\hat{B}C = B\hat{A}D$ (6)

من (4) و (5) و (6) نستنتج أن : ADC يقايس BDC

③ لنبين أن ADI يقايس BIC

لدينا حسب السؤال ① ADC يقايس BDC ، إذن : $C\hat{A}D = D\hat{B}C$ أي : $I\hat{A}D = I\hat{B}C$ (7)

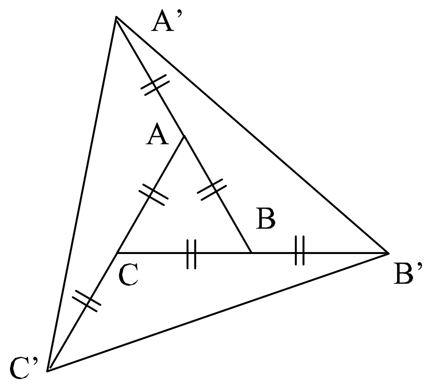
لدينا حسب السؤال ② ADB يقايس ACB ، إذن : $A\hat{D}B = A\hat{C}B$ أي : $A\hat{D}I = I\hat{C}B$ (8)

و لدينا : $BC = AD$ (9)

من (7) و (5) و (6) نستنتج أن : ADC يقايس BDC

← ترقيم المتساويات ليس ضروريا، لكنه يمثل و سيلة مفيدة للاشارة إلى حالة التقايس المستعملة في البرهان.
لاحظ أنه بعد البرهان أن مثلثان متقايسان يصبح بوسعنا توظيف زواياهما المتقايسة في الاجابة عن سؤال آخر.

تمرين 2 انتبه ← تعليق ←



① لنبين أن المثلثات $BB'A'$ و $CC'B'$ و $AA'C'$ متقايسة

لدينا A منتصف $[A'B]$ و B منتصف $[B'C]$ و C منتصف $[C'A]$

و بما أن : $AB = BC = AC$

فإن : $AA' = BB' = CC'$ (1) و $AC' = BA' = CB'$ (2)

و بما أن قياسات زوايا المثلث المتساوي الأضلاع تساوي $60°$ فإن :

$A'\hat{A}C = A'\hat{B}B' = B'\hat{C}C' = 180° - 60° = 120°$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $BB'A'$ و $CC'B'$ و $AA'C'$ متقايسة.

② لنحدد طبيعة المثلث $A'B'C'$

لدينا المثلثات $BB'A'$ و $CC'B'$ و $AA'C'$ متقايسة إذن :

$A'B' = B'C' = C'A'$ و هذا يعني أن $A'B'C'$ مثلث متساوي الأضلاع.

← يمكن البرهان على تقايس أكثر من مثلثين في نفس الوقت.
في هذا التمرين برهنا على تقايس الزوايا بحساب قياسها عكس التمرين السابق.

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

① لنبين أن ABI يقايس DJC

لدينا $ABCD$ مستطيل إذن (AB) و (DC) متوازيان و (AC) قاطع لهما،

إذن الزاويتان $B\hat{A}C$ و $A\hat{C}D$ متبادلتان داخليا إذن :

$B\hat{A}C = A\hat{C}D$ (1)

و بما أن المثلثان ABI و DJC قائما الزاوية ، فإن :

$A\hat{B}I = 90° - B\hat{A}C$ و $C\hat{D}J = 90° - A\hat{C}D$

إذن : $A\hat{B}I = C\hat{D}J$ (2)

و بما أن : $AB = CD$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : ABI يقايس DJC

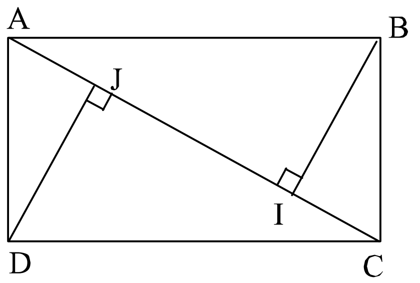
② لنبين DJI يقايس BJI

لدينا: $D\hat{J}I = B\hat{I}A = 90°$ (4)

و لدينا : $[IJ]$ ضلع مشترك (5)

و حسب السؤال السابق ABI يقايس DJC منه : $DJ = IB$ (6)

من (4) و (5) و (6) نستنتج أن : DJI يقايس BJI



③ لنحدد طبيعة الرباعي $DIBJ$.

لدينا $DJ = IB$

و لدينا DJI يقايس BJI

إذن : $DI = BJ$

نستنتج أن : $DIBJ$ متوازي أضلاع.

← في السؤال الأول لم نستعمل تقايس الزاويتين القائمتين $A\hat{I}B$ و $D\hat{J}C$ و ذلك لأن خاصية التقايس تستوجب تقايس زاويتين و الضلع المحادي لهما ، لكن الضلع المحادي لـ $A\hat{I}B$ و $B\hat{A}C$ هو AI و الضلع المحادي لـ $D\hat{J}C$ و $A\hat{C}D$ هو JC و يتعذر علينا من معطيات التمرين البرهان أن : $AI = JC$ ، لذلك اضطررنا للبرهان أن $A\hat{B}I = C\hat{D}J$ لأن الضلع المحادي لـ $B\hat{A}C$ و $A\hat{B}I$ هو AB ، و يمكننا البرهان بسهولة على تقايس $[AB]$ و $[DC]$

تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

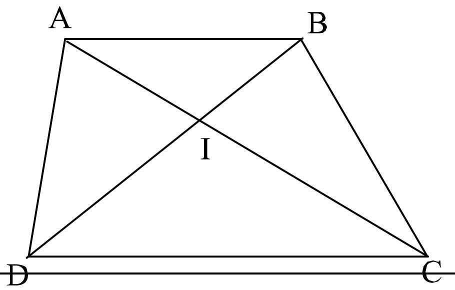
① لنبين أن AIB و CID متشابهان

لدينا $A\hat{I}B$ و $D\hat{I}C$ زاويتان متقابلتان بالرأس ، إذن $A\hat{I}B = D\hat{I}C$

و لدينا $(AB)//(DC)$ و (DB) قاطع لهما ، إذن الزاويتان المتبادلتان داخليا

$A\hat{B}I$ و $I\hat{D}C$ متقايستان.

بالتالي : AIB و CID متشابهان



← استعملنا الحالة الأولى للتشابه(تقايس زاويتين) و هي الأكثر استعمالا في التمارين.

تمرين 5

انتبه ← تعليق ←

① لنبين أن AIB و CID متشابهان

لدينا $I\hat{A}B$ و $I\hat{D}C$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس BC

إذن : $I\hat{A}B = I\hat{D}C$ (1)

لدينا $A\hat{B}I$ و $I\hat{C}D$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AD

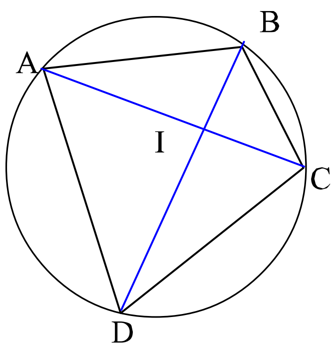
إذن : $A\hat{B}I = I\hat{C}D$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن AIB و CID متشابهان

② لنبين أن $IA \times IC = IB \times ID$

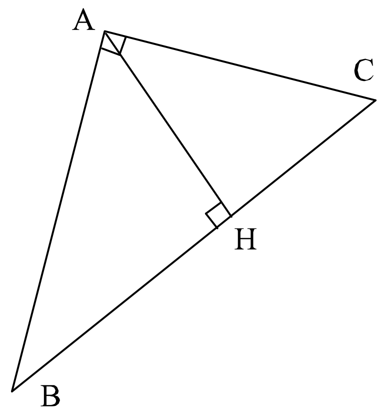
لدينا AIB و CID متشابهان ، إذن : $\frac{BI}{CI} = \frac{AI}{DI} = \frac{AB}{DC}$ منه : $\frac{BI}{CI} = \frac{AI}{DI}$

بالتالي : $\underline{IA \times IC = IB \times ID}$



R

تمرين 6 انتبه ← تعليق ←



① لنبين أن ABH و ABC متشابهان و أن : $AB^2 = BH \times BC$

لدينا : $A\hat{B}H$ زاوية مشتركة

و لدينا : $A\hat{H}B = 90°$ و $B\hat{A}C = 90°$ منه : $B\hat{A}C = A\hat{H}B$

نستنتج إذن أن المثلثين ABH و ABC متشابهان

منه : $\frac{BC}{BA} = \frac{AC}{HA} = \frac{AB}{HB}$ منه : $\frac{BC}{BA} = \frac{AB}{HB}$ ، بالتالي : $AB^2 = BH \times BC$

② لنبين أن ABH و ACH متشابهان و أن : $AH^2 = BH \times CH$

و لدينا : $A\hat{H}B = 90°$ و $A\hat{H}C = 90°$ منه : $B\hat{A}C = A\hat{H}B$ (1)

و لدينا : $A\hat{C}H + H\hat{A}C = 180 - 90 = 90°$

و $B\hat{A}H + H\hat{A}C = B\hat{A}C = 90°$

إذن : $A\hat{C}H + H\hat{A}C = B\hat{A}H + H\hat{A}C$ إذن : $A\hat{C}H = B\hat{A}H$ (2)

من (1) و (2) نستنتج إذن أن المثلثين ABH و ACH متشابهان

منه : $\frac{CH}{AH} = \frac{AH}{BH} = \frac{AC}{BA}$ منه : $\frac{CH}{AH} = \frac{AH}{BH}$ ، بالتالي : $AH^2 = BH \times CH$

← لاحظ أهمية الزوايا المتناظرة في استنتاج التناسب.

R

الازاحــة – المتجهـــات

تمرين 1

$[AB]$ قطعة . و C صورة النقطة B بالازاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$

① أنشئ الشكل ② بين أن B منتصف $[AC]$

تمرين 2

$ABCD$ متوازي أضلاع. E مماثلة A بالنسبة لـ B

◈ بين أن $BECD$ متوازي أضلاع .

تمرين 3

ABC مثلث . I منتصف $[BC]$. J مماثلة A بالنسبة للنقطة I.

◈ بين أن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BJ}$

تمرين 4

ABC مثلث .

① أنشئ النقطة M حيث $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

② أنشئ النقطة N حيث $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC}$

③ بين أن A منتصف $[MN]$

تمرين 5

بسط التعبير التالي : $\vec{u} = \overrightarrow{EK} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{KM}$

تمرين 6

A و B و C و D نقط من المستوى.

◈ بين أن $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

تمرين 7

$ABCD$ متوازي أضلاع.

I مماثلة A بالنسبة لـ B. J مماثلة B بالنسبة لـ C. K مماثلة C بالنسبة لـ D. L مماثلة D بالنسبة لـ A.

① أنشئ الشكل

② بين أن : $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{LA} + 2\,\overrightarrow{AB}$

③ بين أن : $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{CJ} + 2\,\overrightarrow{DC}$

④ بين أن : $\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{CJ}$

⑤ استنتج أن : $LIJK$ متوازي أضلاع

R

الازاحة -المتجهات - حلول

تمرين 1

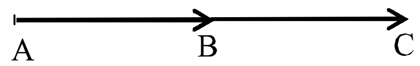
انتبه ← تعليق ←

② لنبين أن B منتصف $[AC]$

بما أن C صورة النقطة B بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ فإن : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$

و هذا يعني أن B منتصف $[AC]$

① الشكل



تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

لنبين أن $BECD$ متوازي أضلاع .

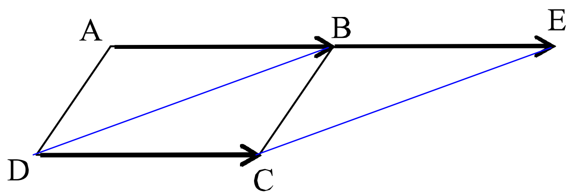
لدينا $BECD$ متوازي أضلاع ، إذن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

و لدينا : E مماثلة A بالنسبة لـ B ، إذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}$

نستنتج إذن أن : $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BE}$

و بالتالي : $BECD$ متوازي أضلاع

الشكل



تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

لنبين أن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BJ}$

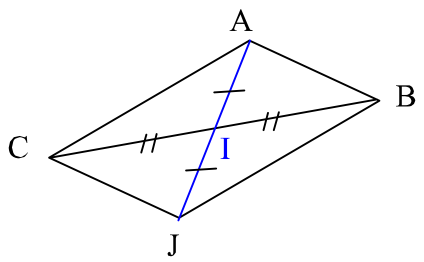
بما أن J مماثلة A بالنسبة للنقطة I فإن :

I منتصف $[AJ]$

و لدينا I منتصف $[BC]$ ، إذن للقطعتين $[AJ]$ و $[BC]$ نفس المنتصف ، إذن الرباعي $ABJC$ متوازي أضلاع

بالتالي : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BJ}$

الشكل



تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

لنبين أن A منتصف $[MN]$

لدينا $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ ، منه : $MABC$ متوازي أضلاع

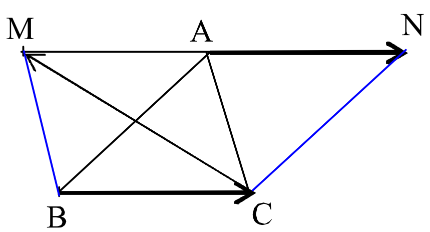
منه : $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BC}$

و لدينا $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BC}$

إذن : $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AN}$

بالتالي: A منتصف $[MN]$

الشكل



R

تمرين 5

انتبه ← تعليق ←

لنبسط التعبير التالي : $\vec{u}=\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{KM}$

لدينا:

$$\vec{u}=\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{KM}$$
$$\vec{u}=\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{MA}$$
$$\vec{u}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{MA}$$
$$\vec{u}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{MA}$$

منه :

$$\vec{u}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}$$
$$\vec{u}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AE}$$
$$\vec{u}=\overrightarrow{EE}$$
$$\vec{u}=\vec{0}$$

← لتطبيق علاقة شال يجب ترتيب الحدود

تمرين 6

انتبه ← تعليق ←

بين أن $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

لدينا:

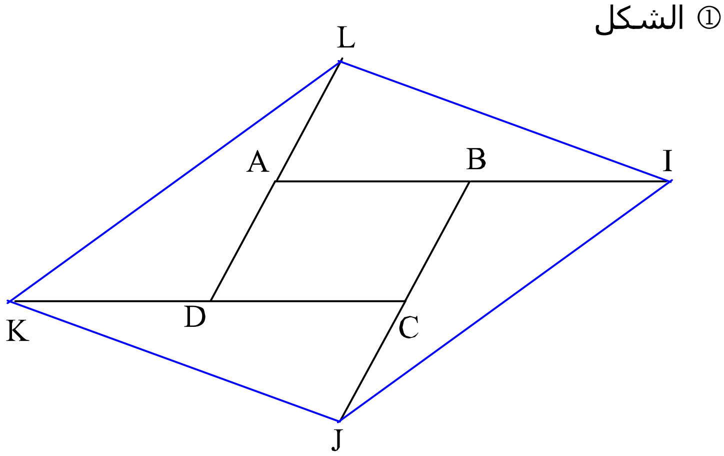
$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$$
$$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\vec{0}$$
$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$$

← علاقة شال استعملت بطريقة عكسية بمعنى أننا كتبنا المتجهة $\overrightarrow{AD}$ على شكل مجموع متجهتين و كذلك $\overrightarrow{BC}$

تمرين 7

انتبه ← تعليق ←

① الشكل



② لنبين أن : $\overrightarrow{LI}=\overrightarrow{LA}+2\overrightarrow{AB}$

لدينا : $\overrightarrow{LI}=\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AI}$

و بما أن B منتصف $[AI]$ فإن : $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}$

إذن : $\overrightarrow{LI}=\overrightarrow{LA}+2\overrightarrow{AB}$

③ لنبين أن : $\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{CJ}+2\overrightarrow{DC}$

لدينا : $\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CJ}$

و بما أن D منتصف $[KC]$ فإن : $\overrightarrow{KC}=2\overrightarrow{DC}$

إذن : $\overrightarrow{KJ}=2\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CJ}$ أي $\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{CJ}+2\overrightarrow{DC}$

④ لنبين أن : $\overrightarrow{LA}=\overrightarrow{CJ}$

بما أن A منتصف $[DL]$ فإن : $\overrightarrow{LA}=\overrightarrow{AD}$

و بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فإن : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

و بما أن C منتصف $[JB]$ فإن : $\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{BC}$

نستنتج إذن من المتساويات الثلاث أن : $\overrightarrow{LA}=\overrightarrow{CJ}$

⑤ لنبين أن : $LIJK$ متوازي أضلاع

لدينا حسب السؤالين ② و ③ $\overrightarrow{LI}=\overrightarrow{LA}+2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{CJ}+2\overrightarrow{DC}$

و حسب السؤال ④ $\overrightarrow{LA}=\overrightarrow{CJ}$ ، و بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فإن : $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

نستنتج من هذه المتساويات الأربع أن : $\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{LI}$

و هذا يعني أن : $LIJK$ متوازي أضلاع

R

المعادلات و المتراجحات

تمرين 1

حل المعادلات التالية :

$\frac{2(x-1)}{3}=\frac{4x-5}{6}$	$\frac{x}{3}+2=\frac{1-x}{6}$	$6x+3=11x-1$	$2x+5=27$
$\sqrt{2}\,x-5=x$	$2x+\sqrt{3}=5$	$2-(4x+6)=-4(x+1)$	

تمرين 2

حل المعادلات التالية :

$4x^2-11=0$	$x^2-81=0$	$5(x-4)+x(x-4)=0$	$(2x+5)(x-7)=0$
$(3x-5)^2=(x-1)^2$	$(2x-1)^2=x(2x-1)$	$x^2+6x+9=0$	$(x+7)^2-100=0$
$x^2+6x+5=0$	$(x-3)^2=7$	$2x^2=\frac{4x-1}{2}$	$x^2-9=(7x+1)(x+3)$

تمرين 3

حل المتراجحات التالية :

$7(x-1)\geq x-7$	$2\leq 7-5x$	$2x+1<\sqrt{7}$	$5x-1\geq 3$
$(1-\sqrt{3})x-7>0$	$\sqrt{2}\,x-5\geq -x$	$\frac{x}{2}\leq 3-x$	$3x\leq 2+11x$

تمرين 4

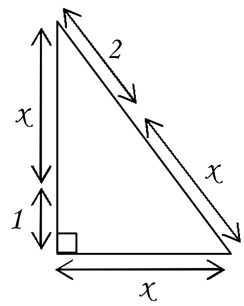
مسائل :

① حدد 3 أعداد صحيحة متتابعة مجموعها 450

② حدد عددين حقيقين حيث : أكبرهما يزيد عن الآخر بـ 3 و فرق مربعيهما هو 69

③ في الشكل جانبه مثلث قائم الزاوية.

حدد قيمة العدد x



R

المعادلات و المتراجحات - حلول

تمرين 1 ← انتبه ← تعليق

لنحل المعادلات التالية :

$2x+5=27$

لدينا

$$2x+5=27$$
$$2x=27-5$$
$$2x=22$$
$$x=\frac{22}{2}$$
$$x=11$$

إذن حلول هذه المعادلة هي العدد 11

$6x+3=11x-1$

لدينا

$$6x+3=11x-1$$
$$6x-11x=-1-3$$
$$-5x=-4$$
$$x=\frac{-4}{-5}$$
$$x=\frac{4}{5}$$

إذن حلول هذه المعادلة هي العدد $\frac{4}{5}$

$\frac{x}{3}+2=\frac{1-x}{6}$

لدينا

$$\frac{x}{3}+2=\frac{1-x}{6}$$
$$\frac{2x}{6}+\frac{12}{6}=\frac{1-x}{6}$$
$$2x+12=1-x$$
$$2x+x=1-12$$
$$3x=-11$$
$$x=\frac{-11}{3}$$

إذن حلول هذه المعادلة هي العدد $\frac{-11}{3}$

$\sqrt{2}\,x-5=x$

لدينا

$$\sqrt{2}\,x-5=x$$
$$\sqrt{2}\,x-x=5$$
$$x\left(\sqrt{2}-1\right)=5$$
$$x=\frac{5}{\sqrt{2}-1}$$
$$x=\frac{5\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}$$
$$x=\frac{5\sqrt{2}+5}{2-1}$$
$$x=\frac{5\sqrt{2}+5}{1}$$
$$x=5\sqrt{2}+5$$

إذن حلول هذه المعادلة هي العدد $5\sqrt{2}+5$

$\frac{2(x-1)}{3}=\frac{4x-5}{6}$

لدينا

$$\frac{2(x-1)}{3}=\frac{4x-5}{6}$$
$$\frac{4(x-1)}{6}=\frac{4x-5}{6}$$
$$4x-4=4x-5$$
$$4x-4x=-5+4$$
$$0=-1$$

بما أن المتساوية المحصل عليها غير صحيحة فإن هذه المعادلة ليس لها حلول

$2-(4x+6)=-4(x+1)$

لدينا

$$2-(4x+6)=-4(x+1)$$
$$2-4x-6=-4x-4$$
$$-4x+4x=-4-2+6$$
$$0=-6+6$$
$$0=0$$

بما أن المتساوية المحصل عليها صحيحة فإن حلول هذه المعادلة هي جميع الأعداد الحقيقية

$2x+\sqrt{3}=5$

لدينا

$$2x+\sqrt{3}=5$$
$$2x=5-\sqrt{3}$$
$$x=\frac{5-\sqrt{3}}{2}$$

إذن حلول هذه المعادلة هي العدد $\frac{5-\sqrt{3}}{2}$

<u>تمرين 2</u>

انتبه ← ☠   تعليق ← ◈

لنحل المعادلات التالية :

$(2x+5)(x-7)=0$

لدينا

$(2x+5)(x-7)=0$

$2x+5=0 \quad x-7=0$

$2x=-5 \quad x=7$

$x=\frac{5}{2} \quad x=7$

إذن العددان 7 و $\frac{5}{2}$ هما حلا هذه المعادلة

$5(x-4)+x(x-4)=0$

لدينا

$5(x-4)+x(x-4)=0$

$(x-4)(5+x)=0$

$x-4=0 \quad 5+x=0$

$x=4 \quad x=-5$

إذن العددان 4 و -5 هما حلا هذه المعادلة

$x^2-81=0$

لدينا

$x^2-81=0$

$(x-9)(x+9)=0$

$x-9=0 \quad x+9=0$

$x=9 \quad x=-9$

إذن العددان 9 و -9 هما حلا هذه المعادلة

$4x^2-11=0$

لدينا

$4x^2-11=0$

$(2x)^2-(\sqrt{11})^2=0$

$(2x-\sqrt{11})(2x+\sqrt{11})=0$

$2x-\sqrt{11}=0 \quad 2x+\sqrt{11}=0$

$2x=\sqrt{11} \quad 2x=-\sqrt{11}$

$x=\frac{\sqrt{11}}{2} \quad x=\frac{-\sqrt{11}}{2}$

إذن العددان $\frac{\sqrt{11}}{2}$ و $\frac{-\sqrt{11}}{2}$ هما حلا هذه المعادلة

$(x+7)^2-100=0$

لدينا

$(x+7)^2-100=0$

$(x+7)^2-10^2=0$

$(x+7+10)(x+7-10)=0$

$(x+17)(x-3)=0$

$x+17=0 \quad x-3=0$

$x=-17 \quad x=3$

إذن العددان 3 و -17 هما حلا هذه المعادلة

☠ ← **رغم أن $(x+7)^2$ متطابقة هامة ، إلا أن استعمالها في هذه الحالة سيؤدي للنشر و هذا ما سيجعل المعادلة تصعب بعد ذلك، لذلك استعملنا عوضا عن ذلك المتطابقة الثالثة a^2-b^2 حيث $a=x-7$ و $b=10$**

$x^2+6x+9=0$

لدينا

$x^2+6x+9=0$

$x^2+2\times x\times 3+3^2=0$

$(x+3)^2=0$

$x+3=0$

$x=-3$

إذن العدد -3 هو حل هذه المعادلة

◈ ← **لاحظ أن التعبير عبارة عن متطابقة هامة**

$(2x-1)^2=x(2x-1)$

لدينا

$(2x-1)^2=x(2x-1)$

$(2x-1)^2-x(2x-1)=0$

$(2x-1)[(2x-1)-x]=0$

$(2x-1)(2x-1-x)=0$

$(2x-1)(x-1)=0$

$2x-1=0 \quad x-1=0$

$x=\frac{1}{2} \quad x=1$

إذن العددان 1 و $\frac{1}{2}$ هما حلا هذه المعادلة

$(3x-5)^2=(x-1)^2$

لدينا

$(3x-5)^2=(x-1)^2$

$(3x-5)^2-(x-1)^2=0$

$[(3x-5)+(x-1)][(3x-5)-(x-1)]=0$

$(3x-5+x-1)(3x-5-x+1)=0$

$(4x-6)(2x-4)=0$

$x=\frac{3}{2} \quad x=2$

إذن العددان 2 و $\frac{3}{2}$ هما حلا هذه المعادلة

☠ ← **انتبه أثناء حذف الأقواس المسبوقة برمز -**

يتبع...

R

المعلم في المستوى

فيما يلي المستوى منسوب لمعلم متعامد ممنظم

تمرين 1

نعتبر النقط : $A(2;5)$ و $B(-4;0)$ و $C(0;2)$ و $D(-6;-3)$

1- حدد إحداثيثي كل من : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$

2- ما ذا تستنتج ؟

3- أنشئ النقط السابقة في معلم متعامد ممنظم (O,I,J)

تمرين 2

نعتبر النقط : $A(2;5)$ و $B(-4;0)$ و $C(0;2)$ و $D(-6;-3)$

1- حدد إحداثيثي كل من : E منتصف $[BC]$ و F منتصف $[AD]$

2- ما ذا تستنتج ؟

3- احسب BC و AD

4- هل الرباعي $ABDC$ مستطيل ؟ علل جوابك .

تمرين 3

نعتبر النقط : $A(-2\sqrt{3};\sqrt{3})$ و $B(-1;-2)$ و $C(1;2)$

بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

تمرين 4

نعتبر النقط : $A(2;1)$ و $B(0;-1)$ و $C(-1;4)$

1- احسب BC و AB و AC

2- بين أن المثلث ABC قائم الزاوية في النقطة A

تمرين 5

نعتبر النقط : $A(-1;3)$ و $B(2;-6)$ و $C(0;3)$ و $D(a;b)$

حدد العددين a و b لكي يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

تمرين 6

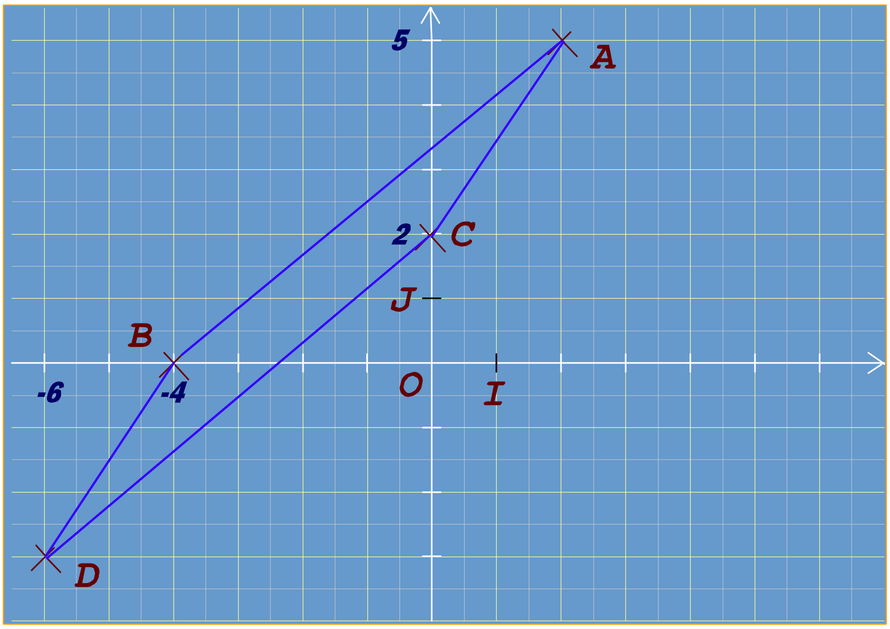
نعتبر النقط : $A(-1;3)$ و $B(2;-6)$

حدد العددين إحداثيتي النقطة K مماثلة النقطة A بالنسبة للنقطة B

تمرين 1

انتبه ← تعليق ←

$A(2;5)$ و $B(-4;0)$ و $C(0;2)$ و $D(-6;-3)$

-1	$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,,y_B-y_A)$ $\overrightarrow{AB}(-4-2,0-5)$ $\overrightarrow{AB}(\ -6\ \ ,\ \ -5)$	$\overrightarrow{CD}(x_D-x_C\,,y_D-y_C)$ $\overrightarrow{CD}(-6-0,-3-2)$ $\overrightarrow{CD}(\ -6\ \ ,\ \ -5)$
-2	بما ن لـ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ نفس الإحداثيات فإن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ بالتالي نستنتج أن : $ABDC$ متوازي أضلاع.	
-3		

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

$A(2;5)$ و $B(-4;0)$ و $C(0;2)$ و $D(-6;-3)$

-1	لدينا E منتصف $[BC]$ إذن : $x_E=\dfrac{x_B+x_C}{2}$ و $y_E=\dfrac{y_B+y_C}{2}$ منه : $x_E=\dfrac{-4+0}{2}=-2$ و $y_E=\dfrac{0+2}{2}=1$ بالتالي : $E(-2;1)$	لدينا F منتصف $[AD]$ إذن : $x_F=\dfrac{x_A+x_D}{2}$ و $y_F=\dfrac{y_A+y_D}{2}$ منه : $x_F=\dfrac{2+(-6)}{2}=-2$ و $y_E=\dfrac{5+(-3)}{2}=1$ بالتالي : $F(-2;1)$
-2	بما أن لـ E و F نفس الإحداثيات فهذا يعني أن لـ $[BC]$ و $[AD]$ نفس المنتصف بالتالي نستنتج أن : $ABDC$ متوازي أضلاع.	
- 3	لدينا : $BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(0-(-4))^2+(2-0)^2}=\sqrt{(4)^2+(2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$ و $AD=\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2}=\sqrt{(-6-2)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{(-8)^2+(-8)^2}=\sqrt{64+64}=\sqrt{128}$	
-4	بما أن : $BC\neq AD$ فقطرا متوازي أضلاع $ABDC$ ليسا متقايسان، فهو إذن ليس بمستطيل	

R

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

$A\left(-2\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ و $B(-1;-2)$ و $C(1;2)$ ، لنبين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

لدينا :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{\left(-1-\left(-2\sqrt{3}\right)\right)^2+\left(-2-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}-1\right)^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$AB=\sqrt{4\times3-2\times2\sqrt{3}+1\;+\;4+2\times2\times\sqrt{3}+3}=\sqrt{12-4\sqrt{3}+1\;+\;4+4\sqrt{3}+3}=\sqrt{20}$$

و $$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(1-(-1))^2+(2-(-2))^2}=\sqrt{(2)^2+(4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$

و $$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{\left(1-\left(-2\sqrt{3}\right)\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(1+2\sqrt{3}\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$$

$$AC=\sqrt{1+4\sqrt{3}+12\;+\;4-4\sqrt{3}+3}=\sqrt{20}$$

إذن : $AB=BC=AC$ ، بالتالي المثلث ABC متساوي الأضلاع

← لنشر المتطابقة $\left(-2-\sqrt{3}\right)^2$ استعملنا الخاصية : $(-a-b)^2=(a+b)^2$ لأن $-a-b=-(a+b)$ ، بمعنى أن للعددين المتقابلين نفس المربع

تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

نعتبر النقط : $A(2;1)$ و $B(0;-1)$ و $C(-1;4)$

-1	لدينا $BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(-1-0)^2+(4-(-1))^2}=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$ و $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$ و $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(-1-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$
-2	لدينا : $BC^2=\left(\sqrt{26}\right)^2=26$ و $AB^2=\left(\sqrt{8}\right)^2=8$ و $AC^2=\left(\sqrt{18}\right)^2=18$ منه : $AB^2+AC^2=8+18=26=BC^2$ ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن : المثلث ABC قائم الزاوية في النقطة A

تمرين 5

انتبه ← تعليق ←

$A(-1;3)$ و $B(2;-6)$ و $C(0;3)$ و $D(a;b)$ ، لنحدد العددين a و b لكي يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

لكي يكون $ABCD$ متوازي أضلاع يجب أن يكون : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي يجب أن يكون للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ نفس الإحداثيات.

$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,,y_B-y_A)$ $\quad$ $\overrightarrow{DC}(x_C-x_D\,,y_C-y_D)$

و لدينا : $\overrightarrow{AB}(2-(-1),-6-3)$ و $\overrightarrow{DC}(0-a,3-b)$

$\overrightarrow{AB}(\;3\;,\;-9)$ $\quad$ $\overrightarrow{DC}(\;-a\;,\;3-b)$

إذن : $-a=3$ و $3-b=-9$ ، منه : $a=-3$ و

$$-b=-9-3$$
$$-b=-12$$
$$b=12$$

← $ABCD$ متوازي أضلاع يعني : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و ليس : $\cancel{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}}$

R

تمرين 6 انتبه ← تعليق ←

$A(-1;3)$ و $B(2;-6)$ ، لنحدد إحداثيتي K مماثلة النقطة A بالنسبة للنقطة B

لدينا K مماثلة النقطة A بالنسبة للنقطة B منه : B منتصف $[AK]$

منه :

$$x_B = \frac{x_A + x_K}{2} \qquad y_B = \frac{y_A + y_K}{2}$$

$$2 = \frac{-1 + x_K}{2} \qquad -6 = \frac{3 + x_K}{2}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{-1 + x_K}{2} \quad \text{و} \quad \frac{-12}{2} = \frac{3 + y_K}{2}$$

$$4 = -1 + x_K \qquad -12 = 3 + y_K$$

$$4 + 1 = x_K \qquad -12 - 3 = y_K$$

$$5 = x_K \qquad -15 = y_K$$

بالتالي : $K(5\,,-15)$

R

معادلة مستقـــيم

فيما يلي المستوى منسوب لمعلم متعامد ممنظم

تمرين 1

نعتبر النقط : $A(-3;1)$ و $B(-4;0)$ و $C(-5;1)$

1- حدد المعادلة المختصرة للمستقيمين : (AB) و (AC)

2- هل (AB) و (AC) متوازيان ؟ متعامدان؟ علل جوابك

تمرين 2

نعتبر النقطة : $A(2;5)$ و المستقيم $(D):\ \ 2x-y=4$

1- حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (D)

2- هل $A\in(D)$ ؟ علل جوابك

3- حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) الموازي لـ (D) و المار من النقطة A

4- أنشئ في م.م.م النقطة A و المستقيمين (D) و (Δ)

تمرين 3

نعتبر النقط : $A(0;3)$ و $B(1;5)$ و $C(-2;-1)$

1- حدد المعادلة المختصرة للمستقيم : (AB)

2- استنتج أن النقط A و B و C مستقيمية .

تمرين 4

نعتبر النقطة : $A(0;-4)$ و المستقيمين $(D):\ \ 2x-y=4$ و $(\Delta):\ \ x-3y-12=0$

1- بين أن (D) و (Δ) متقاطعان

2- تحقق أن نقطة تقاطع (D) و (Δ) هي A

3- هل $(\Delta)\perp(D)$؟

4- حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (L) العمودي على (D) و المار من A

تمرين 5

نعتبر النقط : $A(-5;0)$ و $B(2;-6)$

1- حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB)

2- حدد إحداثيتي K منتصف القطعة $[AB]$

3- استنتج المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) و اسط القطعة $[AB]$

تمرين 6

نعتبر المستقيمين $(D):\ \ 5x-7y-6=0$ و $(\Delta):\ \ (a-1)x+y-1=0$

(الأسئلة مستقلة)

1- حدد قيمة العدد a لكي يكون (Δ) موازيا لمحور الأفاصيل .

2- حدد قيمة العدد a لكي يكون $(D)//(\Delta)$.

3- حدد قيمة العدد a لكي يكون $(D)\perp(\Delta)$.

R

معادلة مستقيم- حلول

تمرين 1

انتبه ← تعليق ←

$A(-3;1)$ و $B(-4;0)$ و $C(-5;1)$

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB)

ميل المستقيم (AB) هو :

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-1}{-4-(-3)}=\frac{-1}{-4+3}=\frac{-1}{-1}=1$$

إذن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) تكتب على شكل :

$(AB):\ y=x+p$

و لدينا : $A\in(AB)$ منه : $y_A=x_A+p$

منه : $1=(-3)+p$ منه : $1+3=p$ منه : $4=p$

بالتالي : $(AB):\ y=x+4$

← لتحديد العدد p يمكن تعويض إحداثيتي النقطة A أو B في المعادلة

الميل يسمى أيضا : المعامل الموجه

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AC)

ميل المستقيم (AC) هو :

$$m=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{1-1}{-5-(-3)}=\frac{0}{-5+3}=0$$

إذن المعادلة المختصرة للمستقيم (AC) تكتب على شكل :

$(AC):\ y=p$

و لدينا : $A\in(AB)$ منه : $y_A=p$ منه : $1=p$

بالتالي : $(AC):\ y=1$

← (AC) يوازي محور الأفاصيل لأن ميله منعدم

ميل المستقيم (AB) هو : 1 و ميل المستقيم (AC) هو : 0

بما أن : $1\neq 0$ و $1\times 0=0\neq -1$ فإن (AB) و (AC) ليسا لا متوازيان و لا متعامدان .

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

$A(2;5)$ ، $(D):\ 2x-y=4$

1- لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (D)

لدينا : $(D):\ 2x-y=4$ منه: $(D):\ -y=-2x+4$ منه : $(D):\ y=2x-4$

2 - هل $A\in(D)$ ؟

لدينا : $y_A=5$ و $2x_A-4=2\times2-4=4-4=0$ إذن : $y_A\neq 2x_A-4$ إذن : $A\notin(D)$

3 - لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) الموازي لـ (D) و المار من النقطة A

بما أن $(\Delta)//(D)$ فإن ميله هو ميل (D) أي 2، إذن معادلته المختصرة تكتب على شكل : $(\Delta):\ y=2x+p$

و لدينا : $A\in(\Delta)$ منه : $y_A=2x_A+p$ منه : $5=2\times2+p$ منه : $5=4+p$ منه : $5-4=p$ منه : $1=p$

بالتالي : $(\Delta):\ y=2x+1$

4 - إنشاء النقطة A و المستقيمين (D) و (Δ)

إنشاء $(D):\ y=2x-4$

نعتبر $x=1$ منه $y=2-4=-2$

نعتبر $x=2$ منه $y=4-4=0$

إذن (D) سيمر من النقطتين : $(1\,;-2)$ و $(2\,;0)$

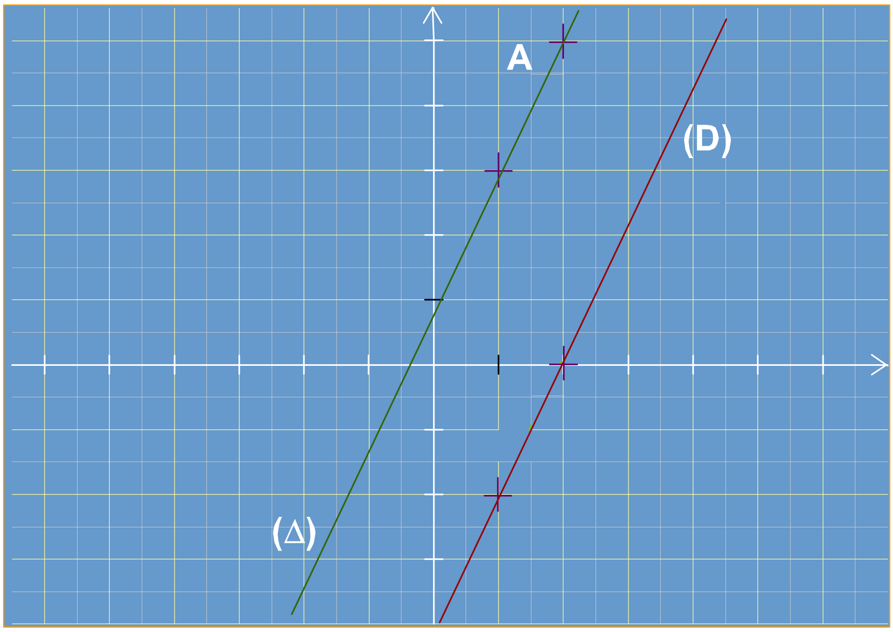
إنشاء $(\Delta):\ y=2x+1$

نعتبر $x=1$ منه $y=2+1=3$

نعتبر $x=2$ منه $y=4+1=5$

إذن (Δ) سيمر من النقطتين : $(1\,;3)$ و $(2\,;5)$

← نختار قيمتين مختلفتين لـ x لنحصل على الأراتيب المناسبة، حاول اختيار أعداد بسيطة مثل 0 ، 1 ، ...



تمرين 3   انتبه ←   تعليق ←

$A(0;3)$ و $B(1;5)$ و $C(-2;-1)$

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم : (AB)

ميل المستقيم (AB) هو : $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{5-3}{1-0}=\dfrac{2}{1}=2$

إذن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) تكتب على شكل : $(AB):\ y=2x+p$

و لدينا : $A\in(AB)$ منه : $y_A=2x_A+p$ منه : $3=0+p$ منه : $3=p$

بالتالي : $\underline{(AB):\ y=2x+3}$

لنبين أن النقط A و B و C مستقيمية

لدينا : $y_C=-1$ و $2x_C+3=2\times(-2)+-4=4-4=0$ إذن : $y_C=2x_C+3$ إذن : $\underline{C\in(AB)}$

بالتالي: النقط A و B و C مستقيمية

تمرين 4   انتبه ←   تعليق ←

$A(0;-4)$ ، $(D):\ 2x-y=4$ ، $(\Delta):\ x-3y-12=0$

-1 لنبين أن (D) و (Δ) متقاطعان

لدينا: $(D):\ 2x-y=4$ منه : $(D):\ -y=-2x+4$ منه : $\underline{(D):\ y=2x-4}$ إذن ميل (D) هو : 2

لدينا: $(\Delta):\ x-3y-12=0$ منه : $(\Delta):\ -3y=-x+12$ منه : $(\Delta):\ y=\dfrac{-x}{-3}+\dfrac{12}{-3}$ منه $\underline{(\Delta):\ y=\dfrac{1}{3}x-4}$

إذن ميل (Δ) هو : $\dfrac{1}{3}$.بما أن : $2\neq\dfrac{1}{3}$ فإن : (D) و (Δ) غير متوازيان ، إذن فهما متقاطعان.

-2 لنتحقق أن نقطة تقاطع (D) و (Δ) هي A

$y_A=-4$ و $2x_A-4=0-4=-4$ إذن : $y_A=2x_A-4$ إذن : $\underline{A\in(D)}$

$y_A=-4$ و $\dfrac{1}{3}x_A-4=0-4=-4$ إذن : $y_A=\dfrac{1}{3}x_A-4$ إذن : $\underline{A\in(\Delta)}$

إذن A هي نقطة تقاطع (D) و (Δ)

← يمكن أيضا التعويض في المعادلات الأصلية .

تمرين 4 | انتبه ← | تعليق ←

-3	هل $(\Delta)\perp(D)$ ؟

لدينا: ميل (D) هو : 2 و ميل (Δ) هو : $\frac{1}{3}$. بما أن : $2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\neq -1$ فإن : (D) و (Δ) غير متعامدان .

-4	لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (L) العمودي على (D) و المار من A

بما أن $(L)\perp(D)$ فإن جذاء ميلهما هو -1 ، إذن ميل (L) هو $\frac{-1}{2}$ ،إذن معادلته المختصرة تكتب على شكل :

$$(L):\ y=\frac{-1}{2}x+p$$

و لدينا : $A\in(L)$ منه : $y_A=\frac{-1}{2}x_A+p$ منه : $3=\frac{-1}{2}\times 0+p$ منه : $p=3$ ، بالتالي : $\underline{(L):\ y=\frac{-1}{2}x+3}$

← يمكن أيضا التعويض في المعادلات الأصلية .

تمرين 5 | انتبه ← | تعليق ←

$A(-5;0)$ و $B(2;-6)$

-1	لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB)

ميل المستقيم (AB) هو : $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-6-0}{2-(-5)}=\frac{-6}{7}$

إذن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) تكتب على شكل : $(AB):\ y=\frac{-6}{7}x+p$

و لدينا : $A\in(AB)$ منه : $y_A=\frac{-6}{7}x_A+p$ منه : $0=\frac{30}{7}+p$ منه : $\frac{-30}{7}=p$

بالتالي : $\underline{(AB):\ y=\frac{-6}{7}x-\frac{30}{7}}$

-2	لنحدد إحداثيتي K منتصف القطعة $[AB]$

لدينا : $x_K=\frac{x_A+y_B}{2}=\frac{-5+2}{2}=\frac{-3}{2}$ و $y_K=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{0+(-6)}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ منه : $\underline{K\left(\frac{-3}{2};-3\right)}$

-3	لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) و اسط القطعة $[AB]$

بما أن (Δ) و اسط القطعة $[AB]$ فإن : $(\Delta)\perp(AB)$ و $K\in(\Delta)$

ليكن m ميل (Δ) ، بما أن ميل (AB) هو $\frac{-6}{7}$ فإن : $m\times\frac{-6}{7}=-1$ منه : $m=\frac{7}{6}$

إذن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) تكتب على شكل : $(\Delta):\ y=\frac{7}{6}x+p$

و حيث أن $K\in(\Delta)$ فإن : $y_K=\frac{7}{6}x_K+p$ منه : $-3=\frac{7}{6}\times\frac{-3}{2}+p$ منه : $-3=\frac{-7}{4}+p$ منه : $-3+\frac{7}{4}=p$

منه : $p=\frac{-5}{4}$ ، بالتالي : $\underline{(\Delta):\ y=\frac{7}{6}x-\frac{5}{4}}$

تمرين 6 انتبه ← تعليق ←

$(\Delta):\ (a-1)x+y-1=0$ و $(D):\ 5x-7y-6=0$	
لنحدد قيمة العدد a لكي يكون (Δ) موازيا لمحور الأفاصيل	-1
لدينا : $(\Delta):\ (a-1)x+y-1=0$ منه : $(\Delta):\ y=(1-a)x+1$ إذن ميل (Δ) هو $1-a$ لكي يكون (Δ) موازيا لمحور الأفاصيل يجب أن يكون ميله منعدما ، أي : $1-a=0$ أي : $a=1$	
لنحدد قيمة العدد a لكي يكون $(D)//(\Delta)$.	-2
لدينا : $(D):\ 5x-7y-6=0$ منه : $(D):\ -7y=-5x+6$ منه : $(D):\ y=\frac{5}{7}x-\frac{6}{7}$ إذن ميل (D) هو $\frac{5}{7}$ لكي يكون $(D)//(\Delta)$ يجب أن يكون لهما نفس الميل ، أي : $1-a=\frac{5}{7}$ أي : $1-\frac{5}{7}=a$ أي : $\underline{a=\frac{2}{7}}$	
لنحدد قيمة العدد a لكي يكون $(D)\perp(\Delta)$.	-3
لكي يكون $(D)\perp(\Delta)$ يجب أن يكون جداء ميليهما يساوي -1 ، أي : $(1-a)\times\frac{5}{7}=-1$ أي : $1-a=\frac{-7}{5}$ أي : $1+\frac{7}{5}=a$ أي : $\underline{a=\frac{12}{5}}$	

R

الدالة الخطيـــة

تمرين 1

لتكن f الدالة الخطية المعرفة بما يلي : $f(x)=-2x$

1- احسب : $f(2)$ و $f(-5)$ و $f(0)$ و $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ و $f\left(\frac{5}{-7}\right)$

2- مثل في م.م.م التمثيل المبياني للدالة f

3- حل في IR المعادلة : $f(x)=x+12$

4- حدد العدد a حيث : $f(a)=10$

تمرين 2

نعتبر الدالتين الخطيتين f و g المعرفتين بما يلي : $f(x)=11x$ و $g(x)=-6x$

1- نعتبر الدالة h حيث : $h(x)=f(x)+g(x)$ ، بين أن h دالة خطية

2- نعتبر الدالة p حيث : $p(x)=f(x)g(x)$

أ- بسط $p(x)$ ب - احسب : $\frac{p(1)}{1}$ و $\frac{p(2)}{2}$ ج- هل p دالة خطية ؟ علل جوابك

تمرين 3

1- حدد معامل الدالة الخطية f علما أن : $f(2)=-10$

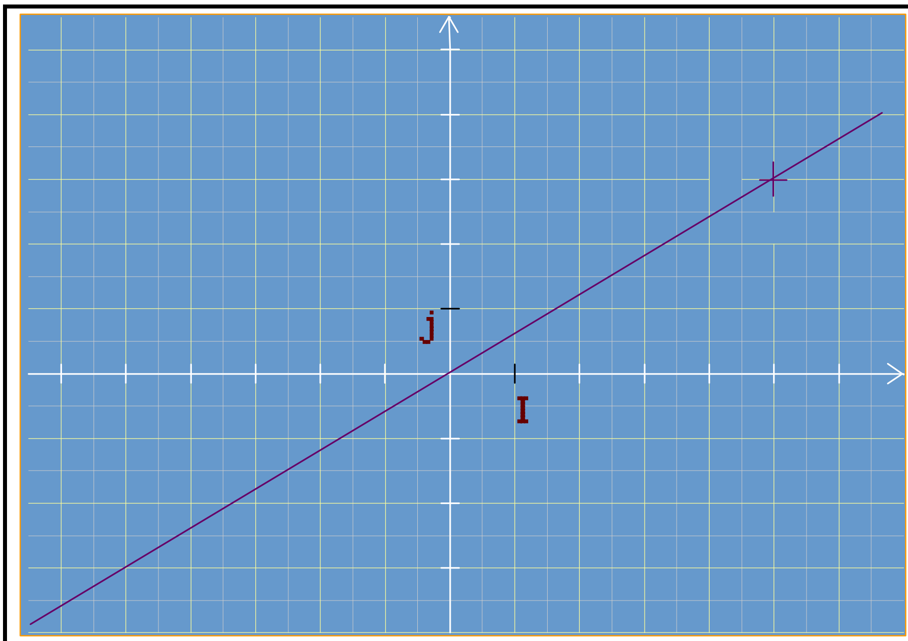
2- حدد معامل الدالة الخطية g علما أن تمثيلها المبياني يمر من النقطة $A(-3,-12)$

3- حدد معامل الدالة الخطية h علما أن : $h(1)+5h(3)=-8$

تمرين 4

لتكن f دالة خطية حيث : $f(-4)=2$ ، احسب $f(7)$

تمرين 5

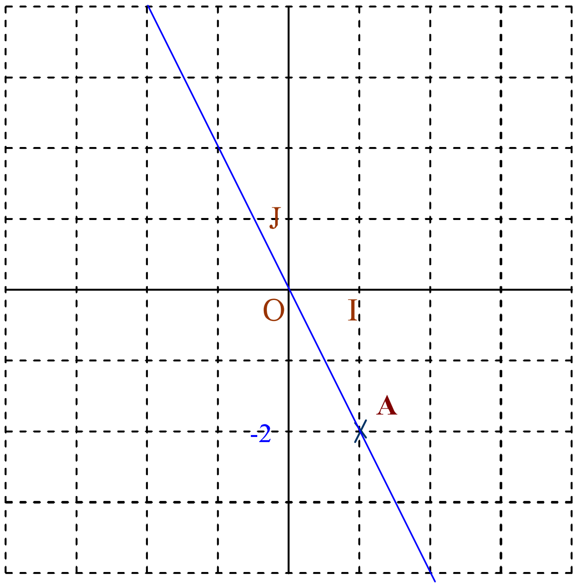


1- هل الشكل جانبه يمثل التمثيل المبياني لدالة خطية ؟ علل جوابك

2- حدد معامل هذه الدالة

R

تمرين 1 انتبه ← تعليق ←

$f(x)=-2x$	
حساب الصور	التمثيل المبياني: $f(1)=-2$
$f(0)=-2\times 0=0$ ؛ $f(2)=-2\times 2=-4$ ؛ $f(-5)=-2\times(-5)=10$ ؛ $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$ ؛ $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-2\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{-2}{\sqrt{3}}$ ، $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ؛ $f\left(\frac{5}{-7}\right)=-2\times\frac{5}{-7}=\frac{-10}{-7}$ ، $f\left(\frac{5}{-7}\right)=\frac{10}{7}$	
لنحل المعادلة : $f(x)=x+12$	لنحدد العدد a حيث : $f(a)=10$
المعادلة : $f(x)=x+12$ تعني $-2x=x+12$ $-2x-x=12$ $-3x=12$ منه : $x=\frac{12}{-3}$ $x=-4$	$f(a)=10$ تعني : $-2a=10$ $a=\frac{10}{-2}$ $a=-5$ ← هذه النتيجة تعني أن العدد الذي صورته 10 هو -5

تمرين 2 انتبه ← تعليق ←

$f(x)=11x$ و $g(x)=-6x$ و $h(x)=f(x)+g(x)$ و $p(x)=f(x)g(x)$			
لنبين أن h دالة خطية			
لدينا $h(x)=f(x)+g(x)$ منه : $h(x)=11x-6x=5x$ إذن h دالة خطية.			
لنبسط $p(x)$	لنحسب : $\frac{p(1)}{1}$ و $\frac{p(2)}{2}$		هل p دالة خطية ؟ علل جوابك
$p(x)=11x\times(-6x)=-66x^2$	$\frac{p(1)}{1}=\frac{-66}{1}=-66$	$\frac{p(2)}{2}=\frac{-66\times 4}{2}=-132$	بما أن : $\frac{p(1)}{1}\neq\frac{p(2)}{2}$ فإن p ليست دالة خطية.

R

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

-3	-2	-1
ليكن a معامل هذه الدالة : أي $h(x)=ax$ لدينا : $h(1)+5h(3)=-8$ $a+5\times3a=-8$ $a+15a=-8$ منه: $16a=-8$ $a=\frac{-8}{16}$ $a=\frac{-1}{2}$ منه: $h(x)=\frac{-1}{2}x$	لدينا حسب المعطيات : $g(-3)=-12$ معامل هذه الدالة هو : $a=\frac{g(-3)}{-3}=\frac{-12}{-3}=4$ إذن : $g(x)=4x$	معامل هذه الدالة هو : $a=\frac{f(2)}{2}=\frac{-10}{2}=-5$ إذن : $f(x)=-5x$

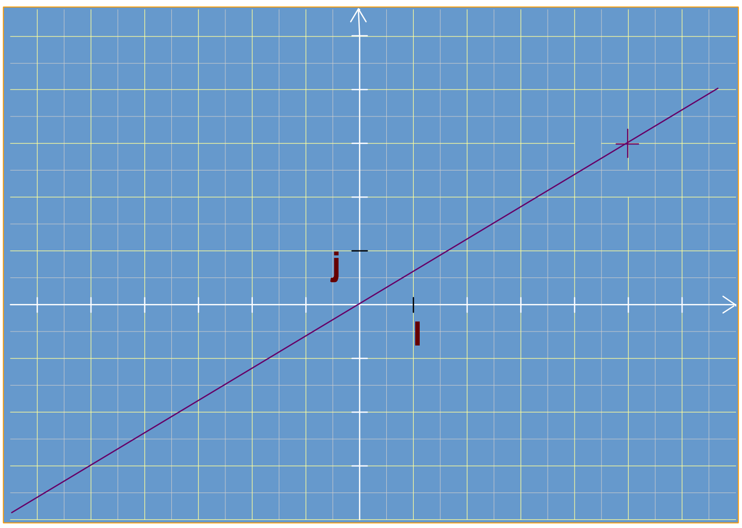
تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

f دالة خطية حيث : $f(-4)=2$ ، لنحسب $f(7)$
معامل هذه الدالة هو : $a=\frac{f(-4)}{-4}=\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}$ إذن : $f(x)=\frac{-1}{2}x$ إذن : $f(7)=\frac{-7}{2}$

تمرين 5

انتبه ← تعليق ←

-1	الشكل جانبه يمثل تمثيلا مبيانيا لدالة خطية، لأنه مستقيم مار من أصل المعلم	
-2	لدينا حسب الشكل : $f(5)=3$ إذن معامل هذه الدالة هو : $a=\frac{f(5)}{5}=\frac{3}{5}$	

R

الدالة التآلفية

تمرين 1

لتكن f الدالة التآلفية المعرفة بما يلي : $f(x)=2x-5$

1- احسب : $f(0)$ و $f(-1)$ و $f(3)$ و $f\left(\frac{5}{2}\right)$ و $f(\sqrt{3})$ و $f\left(\frac{4}{3}\right)$

2- مثل في م.م.م التمثيل المبياني للدالة f

3- حل في IR المعادلة : $f(x)=x$

4- حدد العدد الذي صورته بـ f هي 15

تمرين 2

نعتبر الدالتين التآلفيتين f و g المعرفتين بما يلي : $f(x)=-2x+1$ و $g(x)=5-x$

1- نعتبر الدالة h حيث : $h(x)=5f(x)-g(x)$ ، بين أن h دالة خطية

2- حل في IR المعادلة : $f(x)=g(x)$

تمرين 3

1- لتكن f دالة تآلفية : $f(x)=ax+b$ ، حدد a و b علما أن : $f(0)=-2$ و $f(-3)=10$

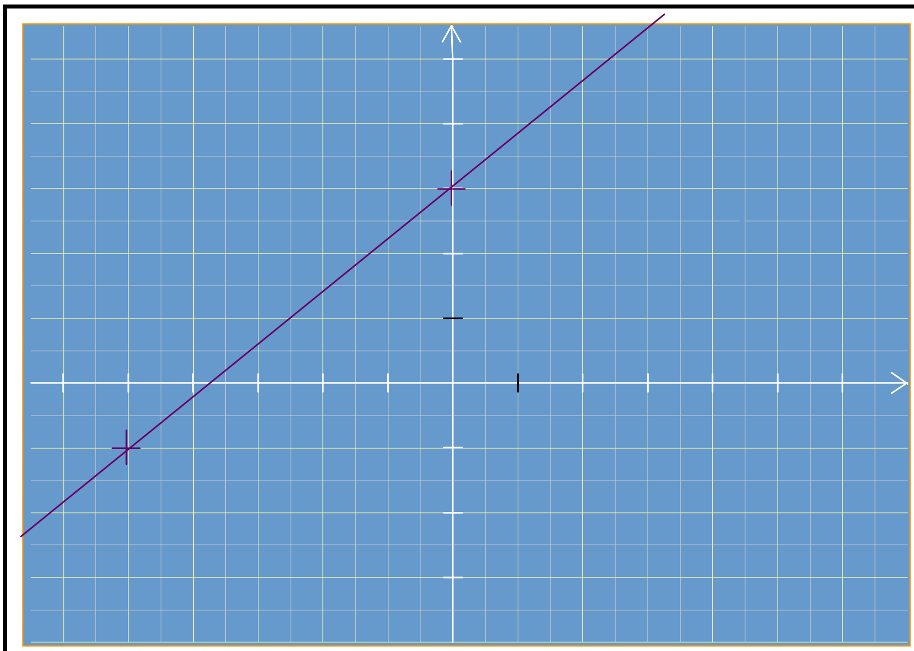
2- حدد الدالة التآلفية g حيث : $g(1)=2$ و $g(2)=1$

3- حدد الدالة التآلفية h التي تمثيلها المبياني يمر بالنقطتين : $A(-1\,;\,3)$ و $B(4\,;\,0)$

تمرين 4

لتكن f دالة تآلفية حيث : $f(-4)=2$ و $f(1)=3$ ، احسب $f(7)$

تمرين 5



1- هل الشكل جانبه يمثل التمثيل المبياني لدالة خطية ؟ تآلفية ؟ علل جوابك

2- لتكن f هذه الدالة، اكتب $f(x)$ بدلالة x

R

الدالة التآلفية- حلول

تمرين 1

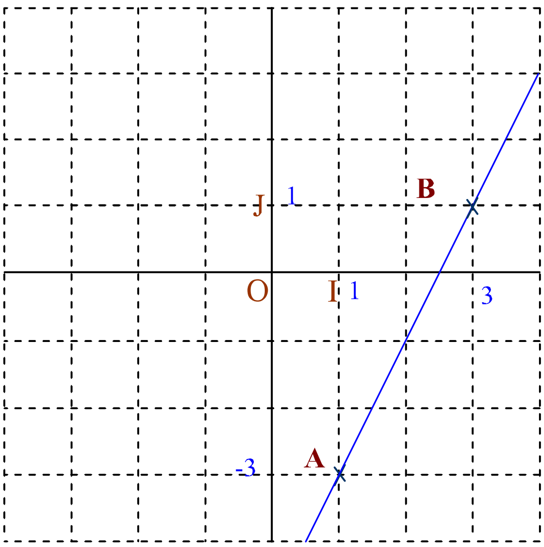
انتبه ← تعليق ←

$f(x)=2x-5$

حساب الصور

$f(0)=2\times 0-5$ $=0-5$ $=-5$	$f(-1)=2\times(-1)-5$ $=-2-5$ $=-7$
$f(3)=2\times 3-5$ $=6-5$ $=1$	$f\left(\frac{5}{2}\right)=2\times\frac{5}{2}-5$ $=5-5$ $=0$
$f(\sqrt{3})=2\times\sqrt{3}-5$ $=2\sqrt{3}-5$	$f\left(\frac{4}{3}\right)=2\times\frac{4}{3}-5$ $=\frac{8}{3}-5$ $=\frac{8-15}{3}=\frac{-7}{3}$

التمثيل المبياني: $f(1)=-3$ و $f(3)=1$



لنحل المعادلة : $f(x)=x$

المعادلة : $f(x)=x$ تعني $2x-5=x$

منه :

$2x-x=5$

$x=5$

إذن حلول هذه المعادلة هو العدد : 5

لنحدد العدد a حيث : $f(a)=15$

$f(a)=15$ تعني :

$2a-5=15$

$2a=15+5$

$2a=20$

$a=\frac{20}{2}$

$a=10$

إذن العدد الذي صورته 15 هو 10

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

$f(x)=-2x+1$ و $g(x)=5-x$ و $h(x)=5f(x)-g(x)$

لنبين أن h دالة خطية

لدينا $h(x)=5f(x)-g(x)$ منه :

$h(x)=5(-2x+1)-(5-x)$

$=-10x+5-5+x$

$=-9x$

إذن h دالة خطية.

لنحل المعادلة : $f(x)=g(x)$

المعادلة : $f(x)=g(x)$ تعني

$-2x+1=5-x$

$-2x+x=5-1$

$-x=4$

$x=-4$

إذن حلول هذه المعادلة هو العدد : -4

R

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

f دالة تآلفية : $f(x)=ax+b$ ، $f(0)=-2$ و $f(-3)=10$ ، لنحسب a و b
معامل هذه الدالة هو : $a=\frac{f(-3)-f(0)}{-3-0}=\frac{10-(-2)}{-3}=\frac{12}{-3}=-4$ ، إذن : $f(x)=4x+b$ و لدينا من التعبير السابق : $f(0)=0+b=b$ و من المعطيات $f(0)=-2$ إذن : $b=-2$ ، بالتالي : $\underline{f(x)=4x-2}$
لنحدد الدالة التآلفية g حيث : $g(1)=2$ و $g(2)=1$
الدالة g تكتب : $g(x)=ax+b$ ، معامل هذه الدالة هو : $a=\frac{g(2)-g(1)}{2-1}=\frac{1-2}{1}=-1$ ، إذن : $g(x)=-x+b$ و لدينا من التعبير السابق : $g(1)=-1+b$ و من المعطيات $g(1)=2$ إذن : $-1+b=2$ منه $b=2+1=3$ ،   بالتالي : $\underline{g(x)=-x+3}$
لنحدد الدالة التآلفية h التي تمثيلها المبياني يمر بالنقطتين : $A(-1\,;3)$ و $B(4\,;0\,)$
لدينا حسب المعطيات : $h(-1)=3$ و $h(4)=0$ ، و لدينا h دالة تآلفية ، منه $h(x)=ax+b$ معامل هذه الدالة هو : $a=\frac{h(4)-h(-1)}{4-(-1)}=\frac{0-3}{4+1}=\frac{-3}{5}$ ، إذن : $h(x)=\frac{-3}{5}x+b$ و لدينا من التعبير السابق : $h(-1)=\frac{3}{5}+b$ و من المعطيات $h(-1)=3$ إذن : $\frac{3}{5}+b=3$ منه $b=3-\frac{3}{5}=\frac{15-3}{5}=\frac{12}{5}$ ،   بالتالي : $\underline{h(x)=\frac{-3}{5}x+\frac{12}{5}}$

تمرين 4

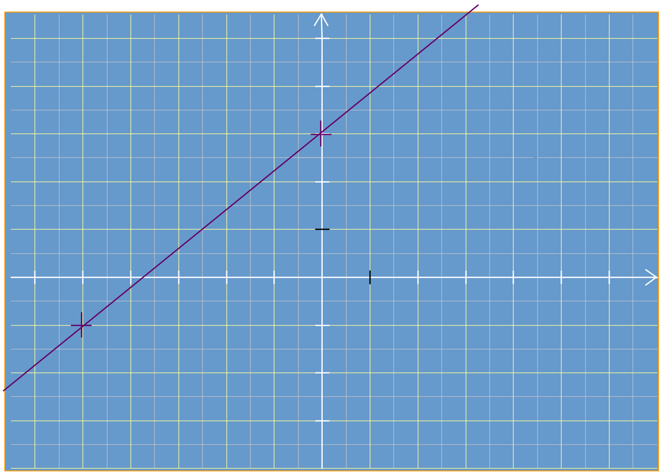
انتبه ← تعليق ←

f دالة تآلفية حيث : $f(-4)=2$ و $f(1)=3$ ، لنحسب $f(7)$	
الطريقة الأولى	الطريقة الثانية
معامل هذه الدالة هي : $a=\frac{f(1)-f(-4)}{1-(-4)}=\frac{3-2}{1+4}=\frac{1}{5}$ و أيضا : $a=\frac{f(7)-f(1)}{7-1}$ إذن : $\frac{f(7)-f(1)}{7-1}=\frac{1}{5}$ منه : $\frac{f(7)-3}{6}=\frac{1}{5}$ منه : $f(7)-3=\frac{6}{5}$ منه : $f(7)=\frac{6}{5}+3=\frac{6+15}{5}=\frac{21}{5}$	الدالة f تكتب : $f(x)=ax+b$ معامل هذه الدالة هو : $a=\frac{f(1)-f(-4)}{1-(-4)}=\frac{3-2}{1+4}=\frac{1}{5}$ ، إذن : $f(x)=\frac{1}{5}x+b$ و لدينا من التعبير السابق : $f(1)=\frac{1}{5}+b$ و من المعطيات $f(1)=3$ إذن : $\frac{1}{5}+b=3$ ، منه $b=3-\frac{1}{5}=\frac{14}{5}$ منه $f(x)=\frac{1}{5}x+\frac{14}{5}$ ، بالتالي : $f(7)=\frac{7}{5}+\frac{14}{5}=\frac{21}{5}$

تمرين 5

انتبه ← تعليق ←

- الشكل جانبه ليس تمثيلا مبيانيا لدالة خطية ،لأنه ليس مستقيما مارا من أصل المعلم
- الشكل جانبه هو تمثيل مبياني لدالة تآلفية ،لأنه عبارة عن مستقيم



لدينا حسب الشكل : $f(0)=3$ و $f(-5)=-1$ ، و لدينا f دالة تآلفية ، منه $f(x)=ax+b$

معامل هذه الدالة هو :

$a=\frac{f(-5)-f(0)}{-5-0}=\frac{-1-3}{-5}=\frac{4}{5}$ ، إذن :

$f(x)=\frac{4}{5}x+b$

و لدينا من التعبير السابق : $f(0)=0+b$ و من المعطيات $f(0)=3$

إذن : $b=3$ منه

بالتالي : $f(x)=\frac{4}{5}x+3$

R

نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

تمرين 1

نعتبر النظمة التالية : $\begin{cases} 3x-4y=10 \\ 2x+5y=22 \end{cases}$

حدد من بين الأزواج التالية الزوج الذي يكون حلا للنظمة: $(-4,1)$ ، $(0,-2,5)$ ، $(6,2)$ ، $(3,-5)$

تمرين 2

مستعملا طريقة التعويض حل النظمات التالية : $\begin{cases} x-5y=-1 \\ 3x-4y=8 \end{cases}$ و $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ -5x+y=-4 \end{cases}$ و $\begin{cases} \sqrt{2}\,x-3y=0 \\ -x+\sqrt{2}y=-\sqrt{2} \end{cases}$

تمرين 3

مستعملا طريقة التأليفة الخطية حل النظمات التالية : $\begin{cases} 7x-5y=1 \\ 3x+4y=25 \end{cases}$ و $\begin{cases} 3x-2y=9 \\ 2x-6y=-8 \end{cases}$ و $\begin{cases} 3x+7y=8 \\ 2x+5y=11 \end{cases}$

تمرين 4

حل النظمات التالية : $\begin{cases} x+y=24 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ و $\begin{cases} -2x+13y=1 \\ 5x-26y=7 \end{cases}$ و $\begin{cases} 3y=1-x \\ x=13-y \end{cases}$ و $\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5} \\ 3x-5y=15 \end{cases}$ و $\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2} \\ \dfrac{1-x}{4}=\dfrac{y+4}{3} \end{cases}$

تمرين 5

حل النظمتين التاليتين : $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=11 \end{cases}$ و $\begin{cases} -x+3y=1 \\ 2x-6y=-2 \end{cases}$

تمرين 6

1 - أنشئ في معلم متعامد ممنظم المستقيمين : $(D)\ 2x+y=7$ و $(\Delta)\ x-y=2$

2- استنتج مبيانيا حل النظمة : $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-y=2 \end{cases}$

تمرين 7

تحتوي مزرعة على عدد غير معروف من الخرفان و الدجاج.

قام صاحب المزرعة بعد الرؤوس (الخرفان و الدجاج) فوجد 70 ثم عد الأرجل(الخرفان و الدجاج) فوجد 174

كم هو عدد الخرفان و عدد الدجاج ؟

R

نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين - حلول

تمرين 1 ←انتبه ←تعليق

	$(-4,1)$	$(0,-2,5)$	$(6,2)$	$(3,-5)$
$\begin{cases} 3x-4y=10 \\ 2x+5y=22 \end{cases}$	لدينا : $3\times(-4)-4\times1=-12-4$ $=-16$ إذن $(-4,1)$ ليس حلا للمعادلة الأولى ، فهو إذن ليس حلا للنظمة	لدينا : $2\times0+5\times(-2,5)=0-12,5$ $=-12,5$ إذن $(0,-2,5)$ ليس حلا للمعادلة الثانية ، فهو إذن ليس حلا للنظمة ←رغم أن الزوج حل للمعادلة الأولى فإننا في الجواب نذكر المعادلة الثانية، لأنها هي سبب عدم كونه حلا للنظمة.	لدينا : $3\times6-4\times2=18-8$ $=10$ و $2\times6+5\times2=12+10$ $=22$ إذن $(6,2)$ حل للمعادلتين معا ، فهو إذن حل للنظمة.	لدينا : $3\times3-4\times(-5)=9+20$ $=29$ إذن $(-4,1)$ ليس حلا للمعادلة الأولى ، فهو إذن ليس حلا للنظمة

تمرين 2 ←انتبه ←تعليق

$\begin{cases} x-5y=-1 \\ 3x-4y=8 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ -5x+y=-4 \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{2}\,x-3y=0 \\ -x+\sqrt{2}\,y=-\sqrt{2} \end{cases}$
لدينا : $\begin{cases} x=5y-1 \\ 3x-4y=8 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x=5y-1 \\ 3(5y-1)-4y=8 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x=5y-1 \\ 15y-3-4y=8 \end{cases}$ منه: $\begin{cases} x=5y-1 \\ 11y=11 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x=5y-1 \\ y=\frac{11}{11}=1 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x=5\times1-1=5-1=4 \\ y=1 \end{cases}$ بالتالي حل هذه النظمة هو : $(4,1)$	لدينا: $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ y=-4+5x \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 2x-5(-4+5x)=-1 \\ y=-4+5x \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 2x+20-25x=-1 \\ y=-4+5x \end{cases}$ منه: $\begin{cases} -23x=-21 \\ y=-4+5x \end{cases}$ منه: $\begin{cases} x=\frac{21}{23} \\ y=-4+5x \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{21}{23} \\ y=-4+5\times\frac{21}{23}=\frac{-92+105}{23}=\frac{13}{23} \end{cases}$ بالتالي حل هذه النظمة هو : $\left(\frac{21}{23},\frac{13}{23}\right)$	لدينا: $\begin{cases} \sqrt{2}\,x-3y=0 \\ \sqrt{2}y+\sqrt{2}=x \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{2}\left(\sqrt{2}y+\sqrt{2}\right)-3y=0 \\ x=\sqrt{2}y+\sqrt{2} \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 2y+2-3y=0 \\ x=\sqrt{2}y+\sqrt{2} \end{cases}$ منه: $\begin{cases} -y+2=0 \\ x=\sqrt{2}y+\sqrt{2} \end{cases}$ منه: $\begin{cases} 2=y \\ x=\sqrt{2}y+\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} y=2 \\ x=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2} \end{cases}$ بالتالي حل هذه النظمة هو : $\left(3\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

←لاحظ أن الحلول قد تكون أعدادا صحيحة أو جذرية أو حقيقية، يستحسن التأكد من صحة الحل إذا كانت الحسابات غير صعبة ، ففي المثال الأول يمكن التأكد بسهولة أن $(4,1)$ جواب صحيح، و ذلك لأن : $\begin{cases} 4-5\times1=4-5=-1 \\ 3\times4-4\times1=12-4=8 \end{cases}$

R

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

$\begin{cases}7x-5y=1\\3x+4y=25\end{cases}$	$\begin{cases}3x-2y=9\\2x-6y=-8\end{cases}$	$\begin{cases}3x+7y=8\\2x+5y=11\end{cases}$
لدينا : $\begin{matrix}\times 4\\ \times 5\end{matrix}\begin{cases}7x-5y=1\\3x+4y=25\end{cases}$ منه : $\begin{cases}28x-20y=4\\15x+20y=125\end{cases}$ نجمع فنجد : $43x=129$ منه : $x=\frac{129}{43}=3$ نعوض في المعادلة الثانية : $3\times 3+4y=25$ $9+4y=25$ $4y=25-9$ $4y=16$ $y=\frac{16}{4}$ $y=4$ بالتالي حل هذه النظمة هو : $(3,4)$	لدينا : $\begin{matrix}\times(-3)\\ \\ \end{matrix}\begin{cases}3x-2y=9\\2x-6y=-8\end{cases}$ منه : $\begin{cases}-9x+6y=-27\\2x-6y=-8\end{cases}$ نجمع فنجد : $-7x=-35$ منه : $x=\frac{-35}{-7}=5$ نعوض في المعادلة الأولى : $3\times 5-2y=9$ $15-2y=9$ $-2y=9-15$ $-2y=-6$ $y=\frac{-6}{-2}$ $y=3$ بالتالي حل هذه النظمة هو : $(5,3)$	لدينا : $\begin{matrix}\times(-2)\\ \times 3\end{matrix}\begin{cases}3x+7y=8\\2x+5y=11\end{cases}$ منه : $\begin{cases}-6x-14y=-16\\6x+15y=33\end{cases}$ نجمع فنجد : $y=17$ نعوض في المعادلة الثانية : $2x+5\times 17=11$ $2x+85=11$ $2x=11-85$ $2x=-74$ $x=\frac{-74}{2}$ $x=-37$ بالتالي حل هذه النظمة هو : $(-37,17)$
←لإيجاد قيمة y يمكنك التعويض أيضا في المعادلة الأولى، فقط يستحسن اختيار المعادلة التي تضم حسابات أبسط.	←لاحظ أن الاختيار تم بعد ملاحظة أن معامل y في المعادلة الثانية مضاعف لمعامله في المعادلة الأولى	← ب مراعاة ترتيب الزوج الممثل للحل ، فالعدد x يمثل دائما العدد الأول في المثال أعلاه $(17,-37)$ ليس هو حل النظمة بل $(-37,17)$

←لاحظ أنه يجب أن تحصل على معاملات متقابلة بعد ضرب المعادلتين في عددين، و هكذا نتخلص من أحد المجاهيل ، لنحصل على قيمة الآخر ، ثم نختار إحدى المعادلتين و نعوض فيها قيمة المجهول المحصل عليه لنحصل على المجهول الآخر.

تمرين 4	انتبه ←	تعليق ←

النظام 1:
$$\begin{cases} x+y=24 \\ 2x-y=0 \end{cases}$$

لدينا : $\begin{cases} x+y=24 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

نجمع فنجد : $3x=24$

منه : $x=\dfrac{24}{3}=8$

نعوض في المعادلة الأولى :

$8+y=24$

$y=24-8$

$y=16$

بالتالي حل هذه النظمة هو : $(8,16)$

← لم نحتج في هذا السؤال إلى تطبيق طريقة التعويض أو التأليفة الخطية، لكون معاملي y متقابلين.

النظام 2:
$$\begin{cases} -2x+13y=1 \\ 5x-26y=7 \end{cases}$$

لدينا : $\times 2\begin{cases} -2x+13y=1 \\ 5x-26y=7 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} -4x+26y=2 \\ 5x-26y=7 \end{cases}$

نجمع فنجد : $x=9$

نعوض في المعادلة الأولى :

$-2\times 9+13y=1$

$-18+13y=1$

$13y=1+18$

$13y=19$

$y=\dfrac{19}{13}$

بالتالي حل هذه النظمة هو : $\left(9,\dfrac{19}{13}\right)$

← الحلول ليست دائما أعداد صحيحة ، قد تكون جذرية.

النظام 3:
$$\begin{cases} 3y=1-x \\ x=13-y \end{cases}$$

لدينا : $\begin{cases} 3y=1-x \\ x=13-y \end{cases}$

منه : $\begin{cases} 3y=1-(13-y) \\ x=13-y \end{cases}$

منه : $\begin{cases} 3y=1-13+y \\ x=13-y \end{cases}$

منه : $\begin{cases} 3y-y=-12 \\ x=13-y \end{cases}$

منه : $\begin{cases} 2y=-12 \\ x=13-y \end{cases}$

منه : $\begin{cases} y=\dfrac{-12}{2}=-6 \\ x=13-(-6)=13+6=19 \end{cases}$

بالتالي حل هذه النظمة هو : $(19,-6)$

← طريقة التعويض تفرض نفسها في هذا السؤال

النظام 4:
$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5} \\ 3x-5y=15 \end{cases}$$

لدينا : $\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5} \\ 3x-5y=15 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 5x=3y \\ 3x-5y=15 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} 5x-3y=0 \\ 3x-5y=15 \end{cases}$ منه : $\begin{matrix} \times 5 \\ \times(-3) \end{matrix}\begin{cases} 5x-3y=0 \\ 3x-5y=15 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} 25x-15y=0 \\ -9x+15y=-45 \end{cases}$ نجمع : $16x=-45$

منه : $x=\dfrac{-45}{16}$ نعوض في المعادلة الأولى :

$3y=5\times\dfrac{-45}{16}=\dfrac{-225}{16}$ منه: $16\times 3y=-225$

منه: $48y=-225$ منه: $y=\dfrac{-225}{48}=\dfrac{-75}{16}$

بالتالي حل هذه النظمة هو : $\left(\dfrac{-45}{16},\dfrac{-75}{16}\right)$

النظام 5:
$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2} \\ \dfrac{1-x}{4}=\dfrac{y+4}{3} \end{cases}$$

لدينا : $\begin{cases} -2x=3y \\ 3(1-x)=4(y+4) \end{cases}$ منه : $\begin{cases} -2x-3y=0 \\ 3-3x=4y+16 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} -2x-3y=0 \\ -3x-4y=16-3 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} -2x-3y=0 \\ -3x-4y=13 \end{cases}$

منه : $\begin{matrix} \times(-3) \\ \times 2 \end{matrix}\begin{cases} 6x+9y=0 \\ -6x-8y=26 \end{cases}$ نجمع : $y=26$

نعوض في المعادلة الأولى : $-2x=3\times 26=78$

منه : $x=\dfrac{78}{-2}=-39$

بالتالي حل هذه النظمة هو : $(-39,26)$

تمرين 5

انتبه ← تعليق ←

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=11 \end{cases}$$

لدينا : $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=11 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} y=5-x \\ 2x+2y=11 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} y=5-x \\ 2x+2(5-x)=11 \end{cases}$

منه $\begin{cases} y=5-x \\ 2x+10-2x=11 \end{cases}$ منه $\begin{cases} y=5-x \\ 10=11 \end{cases}$

المتساوية $10=11$ غير صحيحة ، إذن

ليس لهذه النظمة حلول.

← نقول أيضا حلول هذه النظمة هي المجموعة الفارغة

$$\begin{cases} -x+3y=1 \\ 2x-6y=-2 \end{cases}$$

لدينا : $\begin{cases} -x+3y=1 \\ 2x-6y=-2 \end{cases} \times 2$ منه : $\begin{cases} -2x+6y=2 \\ 2x-6y=-2 \end{cases}$

نجمع : $0=0$

المتساوية $0=0$ صحيحة دائما ، هذا يعني أن معادلتي النظمة متكافئتان، بمعنى أننا إذا ضربنا المعادلة الأولى في -2 نحصل على المعادلة الثانية، في هذه الحالة ، النظمة تقبل لا نهاية له من الحلول ، فكل زوج (x,y) يحقق إحدى المعادلتين سيكون حلا للنظمة، مثلا : $(-1,0)$ و $(2,1)$

← هذان المثالان يؤكدان أن النظمات قد يكون لها حل وحيد أو لا يكون لها أي حل أو يكون لها ما لانهاية له من الحلول.

تمرين 6

انتبه ← تعليق ←

1 - أنشئ في معلم متعامد ممنظم المستقيمين : $(D)\ 2x+y=7$ و $(\Delta)\ x-y=2$

نحدد نقطتين من (D)

نأخذ مثلا $x=2$ نجد $4+y=7$ منه $y=3$

نأخذ مثلا $x=3$ نجد $6+y=7$ منه $y=1$

إذن (D) سيمر من النقطتين : $(2\ ,3)$ و $(3\ ,1)$

نحدد نقطتين من (Δ)

نأخذ مثلا $y=0$ نجد $x-0=2$ منه $x=2$

نأخذ مثلا $y=3$ نجد $x-3=2$ منه $x=5$

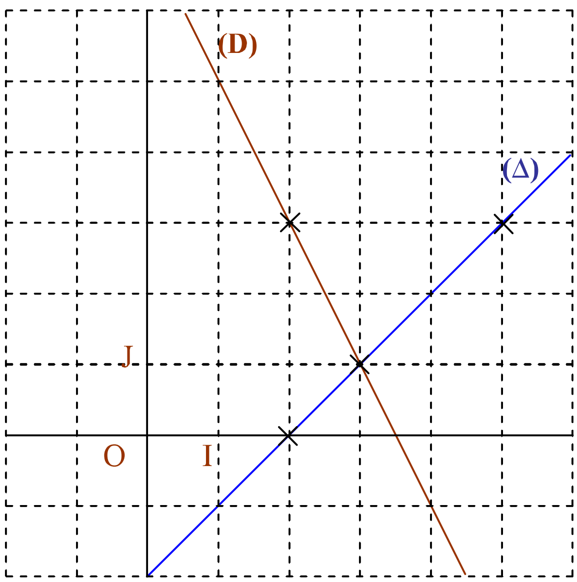
إذن (D) سيمر من النقطتين : $(2\ ,\ 0)$ و $(5\ ,\ 3)$

← يجب اختيار قيمتين لـ x و إيجاد y أو العكس، حاول اختيار أعداد بسيطة ، كـ 0 ، 1 ، 1- ، ...

بعد إنشاء المستقيمين نلاحظ أنهما يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيات : $(3\ ,1)$

إذن حل النظمة $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-y=2 \end{cases}$ هو $(3\ ,1)$

← يمكنك حل النظمة جبريا للتأكد من الحل .



R

تمرين 7 انتبه ← تعليق ←

معطيات : تحتوي مزرعة على عدد غير معروف من الخرفان و الدجاج.
قام صاحب المزرعة بعد الرؤوس (الخرفان و الدجاج) فوجد 70 ثم عد الأرجل(الخرفان و الدجاج) فوجد 174
لنحدد عدد الخرفان و عدد الدجاج ؟

ليكن x عدد الخرفان و y عدد الدجاج

إذن عدد الخرفان و الدجاج هو : $x+y$ منه : $x+y=70$

و عدد أرجل الخرفان هو $4x$ (لأن لكل خروف 4 أرجل)

و عدد أرجل الدجاج هو $2y$ (لأن لكل دجاجة 2 أرجل)

إذن عدد الأرجل هو : $4x+2y$ منه : $4x+2y=174$

نحصل على النظمة : $\begin{cases} x+y=70 \\ 4x+2y=174 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} y=70-x \\ 4x+4y=174 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} y=70-x \\ 4x+2(70-x)=174 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} y=70-x \\ 4x+140-2x=174 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} y=70-x \\ 2x=174-140=34 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} y=70-17=53 \\ x=\dfrac{34}{2}=17 \end{cases}$

خلاصة: المزرعة تحتوي على 17 خروف و 53 دجاجة .

الإحصـــــــــاء

تمرين 1

يمثل الكشف التالي عدد زوار موقع خلال شهر نونبر 2007 :

8 - 6 -13 -13 - 26 - 21 - 26 - 33 - 22 - 9 -12 - 13 - 3 - 3 - 7 -11 - 10 - 9 - 11 - 17 - 14 - 16 - 12 - 15 - 17 - 14 – 16 - 13 - 13 -14

1- اعط جدول الحصيصات
2- حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية
3- احسب متوسط الزيارات اليومية (المعدل الحسابي)
4- حدد منوال المتسلسلة الإحصائية
5- حدد عدد الأيام التي فاقت فيها الزيارات المعدل اليومي

تمرين 2

نعتبر المتسلسلة الإحصائية التالية:

الميزة	5	7	8	11	13	15	16	18
الحصيص		5			7		2	4
الحصيص المتراكم	3		12	13				32

1- أتمم الجدول بما يناسب
2- احسب المعدل الحسابي m
3- حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية
4- حدد منوال المتسلسلة الإحصائية
5- اعط جدول الترددات و الترددات المتراكمة

تمرين 3

نعتبر المتسلسلة الإحصائية التالية:

الميزة	3	x	11	14	18
الحصيص	8	5	6	3	10
الحصيص المتراكم					

1- أتمم الجدول
2- حدد قيمة الميزة x علما أن المعدل الحسابي هو : 11
3- حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية
4- حدد منوال المتسلسلة الإحصائية
5- اعط جدول النسب المئوية لهذه المتسلسلة
6- حدد نسبة التلاميذ الذين حصلوا على نقطة أكبر من أو تساوي 10

تمرين 4

تم رصد سرعة عينة من السيارات و عددها 150 على الطريق السيار بين الرباط و الدار البيضاء، فكانت النتائج وفق الجدول التالي :

السرعة بـ Km/h	$50 \le t < 70$	$70 \le t < 90$	$90 \le t < 110$	$110 \le t < 130$	$130 \le t < 150$
الحصيص	10	40	60	25	15

1- مثل هذه المتسلسلة الإحصائية بمخطط بالأشرطة
2- حدد منوال المتسلسلة الإحصائية
3- احسب متوسط السرعة (المعدل الحسابي)
4- حدد الصنف الذي يحتوي على القيمة الوسطية
5- حدد النسبة المئوية للسيارات التي تسير بسرعة بين $90\ Km/h$ و $110\ Km/h$
6- مثل بمخطط قطاعي دائري هذه المتسلسلة الإحصائية

الإحصـــــــاء - حلول

تمرين 1 — انتبه ← — تعليق ←

معطيات :

8 - 6 -13 -13 - 26 - 21 - 26 - 33 - 22 - 9 -12 - 13 - 3 - 3 - 7 -11 - 10 - 9 - 11 - 17 - 14 - 16 - 12 - 15 - 17 - 14 – 16 - 13 - 13 -14

جدول الحصيصات :

الميزة	3	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	21	22	33	26
الحصيص	2	1	1	1	2	1	2	2	5	3	1	2	2	1	1	1	2
الحصيص المتراكم	2	3	4	5	7	8	10	12	17	20	21	23	25	26	27	28	30

الحصيص الإجمالي هو 30

بعد ترتيب المعطيات نجد :

$\underbrace{3\text{-}3\text{-}6\text{-}7\text{-}8\text{-}9\text{-}9\text{-}10\text{-}11\text{-}11\text{-}12\text{-}12\text{-}13\text{-}13\text{-}13}_{\text{15 ميزة}}$ - $\underbrace{13\text{-}13\text{-}14\text{-}14\text{-}14\text{-}15\text{-}16\text{-}16\text{-}17\text{-}17\text{-}21\text{-}22\text{-}33\text{-}26\text{-}26}_{\text{15 ميزة}}$

القيمة الوسطية هي 13

الجواب ← المقدم للتبسيط فقط، يمكنك أن تجيب مباشرة

متوسط الزيارات هو :

$$m=\frac{3\times2+6+7+8+9\times2+10+11\times2+12\times2+13\times5+14\times3+15+16\times2+17\times2+21+22+33+26\times2}{30}$$

$$m=\frac{6+6+7+8+18+10+22+24+65+42+15+32+34+21+22+33+52}{30}$$

$$m=\frac{417}{30}=13{,}9$$

أكبر حصيص هو 5، إذن منوال هذه المتسلسلة هو الميزة التي تقابل 5 أي 13 .

عدد الأيام التي فاقت فيها الزيارات المعدل اليومي (13,9) هو : $3+1+2+2+1+1+1+2=13$

← قمنا بجمع حصيصات الميز التي تفوق 13,9 أي ابتداء من الميزة 14 حتى الميزة 26 .

تمرين 2 — انتبه ← — تعليق ←

الميزة	5	7	8	11	13	15	16	18
الحصيص	**3**	5	**4**	**1**	7	**6**	2	4
الحصيص المتراكم	3	**8**	12	13	**20**	**26**	**28**	32

المعدل الحسابي هو :

$$m=\frac{(5\times3)+(7\times5)+(8\times4)+(11\times1)+(13\times7)+(15\times6)+(16\times2)+(18\times4)}{32}$$

$$m=\frac{15+35+32+11+91+90+32+72}{32}$$

$$m=\frac{378}{32}=11{,}8125$$

R

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

الحصيص الإجمالي هو 32 ، نصف الحصيص الإجمالي هو 16 يصبح الحصيص المتراكم أكبر من أو يساوي 16 عند الميزة 13 القيمة الوسطية هي 13	← يمكنك استعمال الطريقة السابقة لفهم أكثر

أكبر حصيص هو 7، إذن منوال هذه المتسلسلة هو الميزة التي تقابل 7 أي 13 .

الميزة	5	7	8	11	13	15	16	18
الحصيص	**3**	5	**4**	**1**	7	**6**	2	4
التردد	0,09375	0,15625	0,125	0,03125	0,21875	0,1875	0,0625	0,125
التردد المتراكم	0,09375	0,25	0,375	0,40625	0,625	0,8125	0,875	1

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

الميزة	3	x	11	14	18
الحصيص	8	5	6	3	10
الحصيص المتراكم	**8**	**13**	**19**	**22**	**32**

المعدل الحسابي هو :

$$m=\frac{3\times8+x\times5+11\times6+14\times3+18\times10}{32}$$

$$m=\frac{24+5x+66+42+180}{32}$$

$$m=\frac{312+5x}{32}$$

و لدينا حسب المعطيات $m=11$

إذن :

$$\frac{312+5x}{32}=11$$

$$312+5x=32\times11$$

$$312+5x=352$$

$$5x=352-312$$

$$5x=40$$

$$x=\frac{40}{5}$$

$$x=8$$

الحصيص الإجمالي هو 32 ، نصف الحصيص الإجمالي هو 16
يصبح الحصيص المتراكم أكبر من أو يساوي 16 عند الميزة 11
القيمة الوسطية هي 11

أكبر حصيص هو 10، إذن منوال هذه المتسلسلة هو الميزة التي تقابل 10 أي 18 .

الميزة	3	8	11	14	18	المجموع	
الحصيص	8	5	6	3	10	**32**	$\times\frac{100}{32}$
النسبة المئوية	**25**	**15,625**	**18,75**	**9,375**	**31,25**	**100 %**	

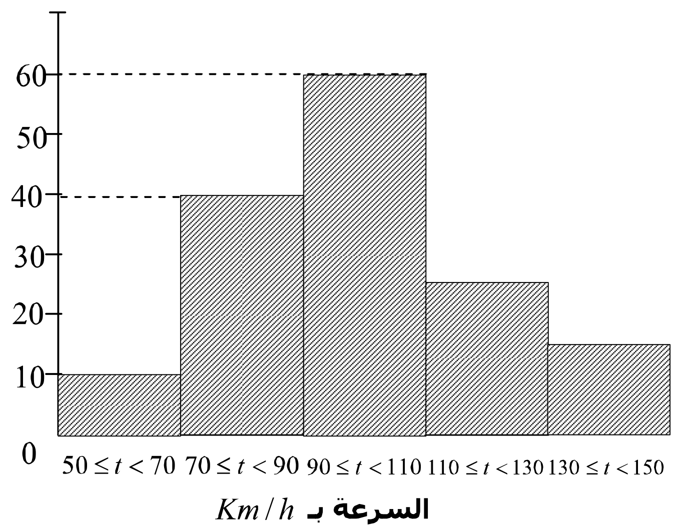
عدد التلاميذ الذين حصلوا على نقطة أكبر من أو تساوي 10 هو: $6+3+10=19$

إذن نسبة التلاميذ الذين حصلوا على نقطة أكبر من أو تساوي 10 هو : $\frac{19\times100}{32}=59,375\,\%$

R

تمرين 4

انتبه ← تعليق ←



2- أكبر حصيص هو 60، إذن منوال هذه المتسلسلة هو الصنف $[90\,;110[$

3- المعدل الحسابي هو :

$$m=\frac{(60\times10)+(80\times40)+(100\times60)+(120\times25)+(140\times15)}{10+40+60+25+15}$$

$$m=\frac{600\ +\ 3200\ +\ 6000\ +\ 3000\ +\ 2100}{150}$$

$$m=\frac{14900}{150}$$

$$m\approx 99{,}33$$

← لاحظ أننا نأخذ منتصف كل صنف لاستعماله في حساب المعدل الحسابي، مثلا الصنف $[90\,;110[$ نعوضه بـ $\frac{90+110}{2}=\frac{200}{2}=100$

4- الحصيص الإجمالي هو 150، نصفه هو 75

السرعة بـ Km/h	$50\le t<70$	$70\le t<90$	$90\le t<110$	$110\le t<130$	$130\le t<150$
الحصيص	10	40	60	25	15
الحصيص المتراكم	10	50	110	135	150

ابتداءً من الصنف $[90\,;110[$ يصبح الحصيص المتراكم أكبر من أو يساوي 75

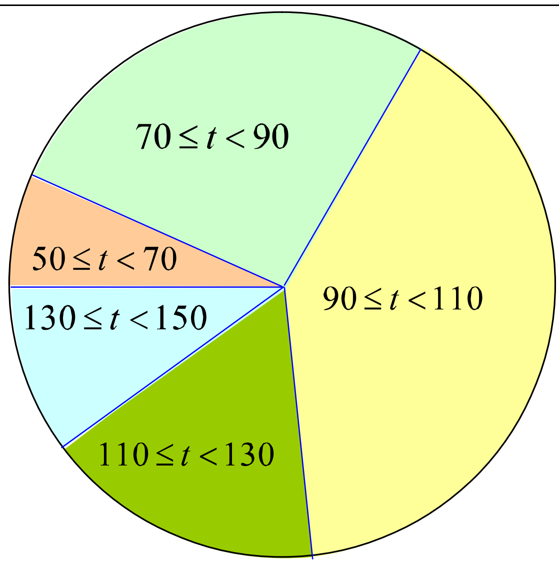
إذن الصنف الذي يحتوي على القيمة الوسطية هو $[90\,;110[$

5- النسبة المئوية للسيارات التي تسير بسرعة بين $90\,Km/h$ و $110\,Km/h$ هي : $60\times\frac{100}{150}=40\%$

6- لتمثيل المتسلسلة بمخطط قطاعي(أي دائري) ، يجب تحديد الزاوية التي تناسب كل صنف، من أجل ذلك نستعين بالجدول التالي :

الميزة	$50\le t<70$	$70\le t<90$	$90\le t<110$	$110\le t<130$	$130\le t<150$	المجموع
الحصيص	10	40	60	25	15	**150**
النسبة المئوية	**24°**	**96°**	**144°**	**60°**	**36°**	**360°**

$\times\frac{360}{150}$



← تذكر الطريقة لتطبيقها خصوصا في مادة الاجتماعيات عند تحويل معطيات إحصائية لمخطط قطاعي، كما يمكنك إضافة النسب المئوية للجدول قصد إضافتها للمخطط.

R

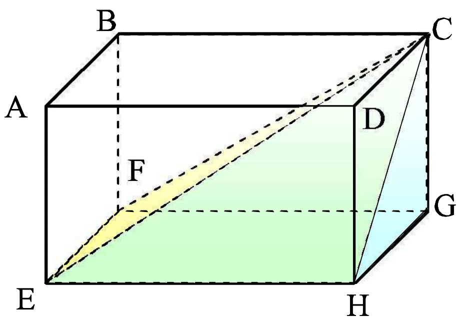
الهندسة الفضائية: المساحات و الحجوم

تمرين 1

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم حيث:
$AB = 3$ و $AD = 6$ و $AE = 4$

1- احسب BD و CH و BG
2- أ- بين أن $(BF)\perp(BD)$
ب- احسب DF

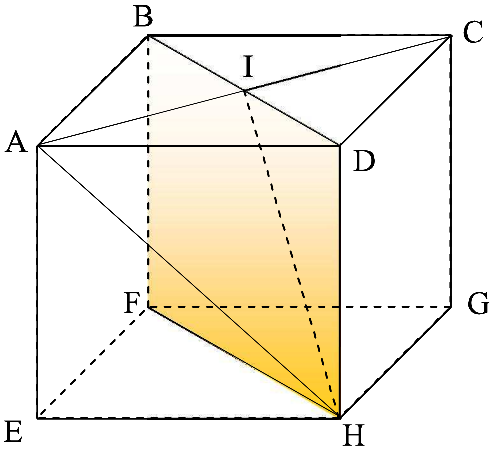
3- احسب حجم $ABCDEFGH$
4- احسب حجم الهرم $CEFGH$



تمرين 2

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه $a=4$ و I مركز المربع $ABCD$
1- احسب AC و AI و AH
2- أ- بين أن $(DH)\perp(ID)$
ب- احسب IH

3- باستعمال مبرهنة فيتاغورس العكسية ، بين أن $(AI)\perp(IH)$
4- استنتج أن : $(AI)\perp(FBDH)$
5- احسب V_1 حجم المكعب $ABCDEFGH$
6- احسب V_2 حجم رباعي الأوجه $AIDH$ بطريقتين
7- تحقق أن : $V_1 = 12V_2$

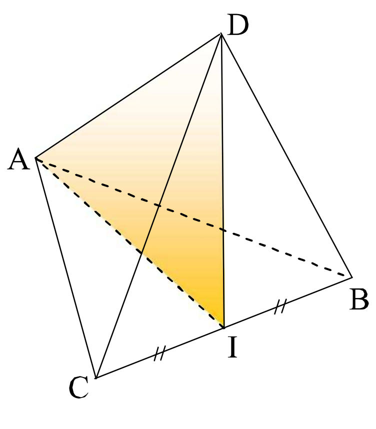


تمرين 3

$ABCD$ رباعي أوجه منتظم طول حرفه $a=4$
(أي $AB = BC = AC = AD = DC = DB = 4$)
و I منتصف $[BC]$
1- أ- بين أن $(DI)\perp(BC)$ ثم احسب DI
ب- احسب AI ثم حدد طبيعة المثلث AID

2- بين أن $(BC)\perp(ADI)$
3- لتكن J منتصف $[AD]$
أ- احسب IJ
ب- احسب مساحة المثلث AID

4- احسب V_1 حجم رباعي الأوجه $CAID$
5- استنتج V حجم رباعي الأوجه المنتظم $ABCD$



سؤال للبحث :

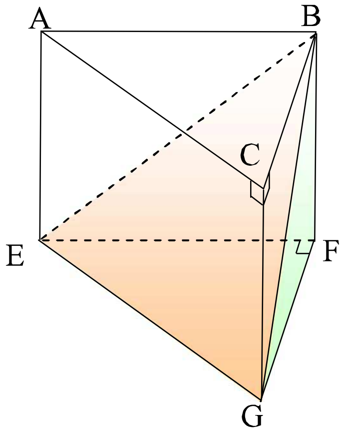
مستعينا بخطوات التمرين ،بين أنه إذا كان طول حرف رباعي أوجه منتظم $ABCD$ هو a ، فإن حجمه هو : $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

R

تمرين 4

$ABCEFG$ موشور قائم قاعدته عبارة عن مثلث قائم الزاوية في F
نعطي: $EF = 4$ و $FG = 3$ و $BF = 4$

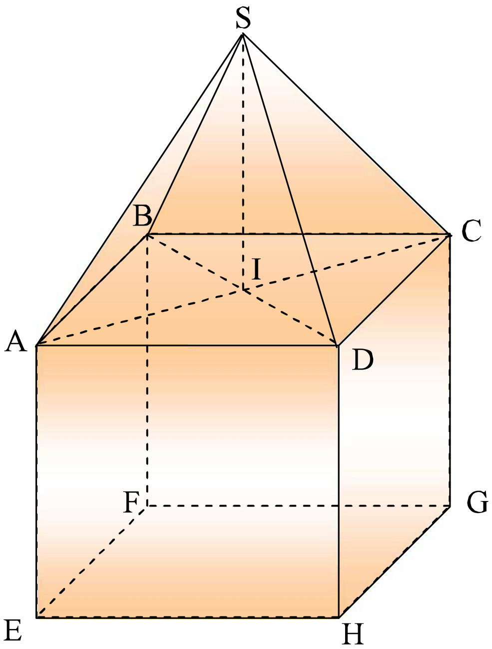
1- احسب حجم $ABCEFG$
2- احسب حجم رباعي الأوجه $BEFG$
3- استنتج حجم الهرم $BAEGC$
4- أ- احسب مساحة المستطيل $ACGE$
ب- استنتج قيمة h ارتفاع الهرم $BAEGC$



تمرين 5

يمثل الشكل جانبه تصميما مصغرا لمنزل خشبي، مركب من مكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه $AB = 3cm$ و هرم $SABCD$ مربع القاعدة ارتفاعه $SI = 4cm$

1- احسب حجم هذا المجسم
2- إذا علمت أن نسبة التصغير هي $k = \frac{1}{200}$ فاحسب الحجم الحقيقي للمنزل بالمتر مكعب.



R

تمرين 1   انتبه ←   تعليق ←

<table>
<tr>
<td>

1- لنحسب BD و CH و BG

</td>
<td>

معطيات :

$AB = 3$ و $AD = 6$ و $AE = 4$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

لدينا ABD مثلث قائم الزاوية في A ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

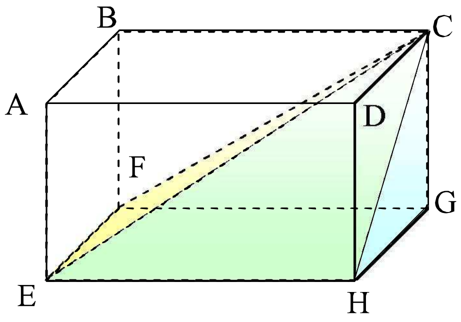
$BD^2 = 3^2 + 6^2$

$BD^2 = 9 + 36$

$BD^2 = 45$

$BD = \sqrt{45}$

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

لدينا DCH مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$CH^2 = DC^2 + DH^2$

$CH^2 = 3^2 + 4^2$

$CH^2 = 9 + 16$

$CH^2 = 25$

$CH = 5$

</td>
<td>

لدينا BGC مثلث قائم الزاوية في C ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$BG^2 = BC^2 + CG^2$

$BG^2 = 6^2 + 4^2$

$BG^2 = 36 + 16$

$BG^2 = 52$

$BG = \sqrt{52}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

2- أ- لنبين أن $(BF) \perp (BD)$

</td>
<td>

ب- لنحسب DF

</td>
</tr>
<tr>
<td>

لدينا $ABFE$ مستطيل ، إذن : $(BF) \perp (AB)$

و لدينا $BCGF$ مستطيل ، إذن : $(BF) \perp (BC)$

و بما أن (AB) و (BC) متقاطعان و يحددان المستوى $(ABCD)$، فإن : $(BF) \perp (ABCD)$

و حيث أن (BD) ضمن المستوى $(ABCD)$

فإن : $(BF) \perp (BD)$

</td>
<td>

لدينا حسب السؤال السابق BDF مثلث قائم الزاوية في B ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$DF^2 = BF^2 + BD^2$

$DF^2 = 4^2 + \left(\sqrt{45}\right)^2$

$DF^2 = 16 + 45$

$DF^2 = 61$

$DF = \sqrt{61}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

3- لنحسب حجم $ABCDEFGH$

</td>
<td>

4- لنحسب حجم الهرم $CEFGH$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم، حجمه :

$V = AB \times AD \times AE$

$V = 3 \times 6 \times 4$

$V = 72$

</td>
<td>

$CEFGH$ هرم قاعدته هي المستطيل $EFGH$ و ارتفاعه CG، إذن حجمه :

$V' = \frac{1}{3} \times CG \times S_{EFGH}$

$V' = \frac{1}{3} \times CG \times (EF \times EH)$

$V' = \frac{1}{3} \times 4 \times (3 \times 6)$

$V' = \frac{72}{3} = 24$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

← لاحظ أن الزوايا القائمة الحقيقية ليست ظاهرة في التمثيل ، هذا يعني أنه يتوجب استحضار الشكل الحقيقي لمتوازي المستطيلات القائم للعثور على هذه الزوايا.

</td>
</tr>
</table>

تمرين 2

انتبه ← ، تعليق ←

1- لنحسب AC و AI و AH

لدينا ADC مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

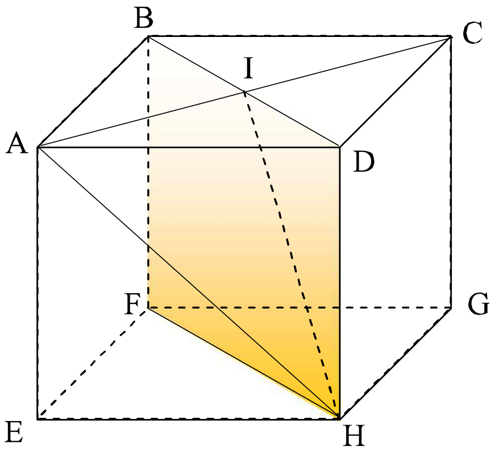
$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$
$$AC^2 = 4^2 + 4^2$$
$$AC^2 = 16 + 16$$
$$AC^2 = 32$$
$$AC = \sqrt{32}$$

و بما أن I منتصف $[AC]$ فإن : $AI = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2}$

لدينا ADH مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$$AH^2 = AD^2 + DH^2$$
$$AH^2 = 4^2 + 4^2$$
$$AH^2 = 16 + 16$$
$$AH^2 = 32$$
$$AH = \sqrt{32}$$

معطيات :
$AB = AD = AE = a = 4$



← يستحسن تبسيط $AH = \sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2}$ مما يسمح أيضا بتبسيط $AI = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ ، لكنه ليس إلزاميا.

2- أ- لنبين أن $(DH)\perp(ID)$

لدينا $ADHE$ مستطيل ، إذن : $(DH)\perp(AD)$

و لدينا $DCGH$ مستطيل ، إذن : $(DH)\perp(DC)$

و بما أن (AD) و (DC) متقاطعان و يحددان المستوى $(ABCD)$ ، فإن : $(DH)\perp(ABCD)$

و حيث أن (ID) ضمن المستوى $(ABCD)$

فإن : $(DH)\perp(ID)$

ب- احسب IH

لدينا حسب السؤال السابق IDH مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$$IH^2 = ID^2 + DH^2$$
$$IH^2 = \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 + 4^2$$
$$IH^2 = \frac{32}{4} + 16$$
$$IH^2 = 8 + 16$$
$$IH^2 = 24$$
$$IH = \sqrt{24}$$

3- لنبين أن $(AI)\perp(IH)$

لدينا

$$AI^2 + IH^2 = \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{24}\right)^2$$
$$AI^2 + IH^2 = \frac{32}{4} + 24$$
$$AI^2 + IH^2 = 8 + 24$$
$$AI^2 + IH^2 = 32$$

و $AH^2 = \left(\sqrt{32}\right)^2$

$AH^2 = 32$

إذن : $AI^2 + IH^2 = AH^2$ ، بالتالي حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن المثلث AIH قائم الزاوية في النقطة I ، أي $(AI)\perp(IH)$

4- لنبين أن : $(AI)\perp(FBDH)$

لدينا $ABCD$ مربع ، إذن قطراه متعامدان ، منه $(AI)\perp(BD)$ ، و لدينا حسب السؤال السابق : $(AI)\perp(IH)$ ، و بما أن (BD) و (IH) متقاطعان و يحددان المستوى $(FBDH)$ ، فإن : $(AI)\perp(FBDH)$

5- لنحسب V_1 حجم المكعب $ABCDEFGH$

$$V_1 = a^2 = 4\times 4\times 4 = 64$$

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

6- لنحسب V_2 حجم رباعي الأوجه $AIDH$ بطريقتين

الطريقة الأولى	الطريقة الثانية
بما أن $(DH)\perp(ABCD)$ ، فإنه يمكن اعتبار $AIDH$ هرما قاعدته المثلث AID و ارتفاعه DH ، منه :	بما أن $(AI)\perp(FBDH)$ ، فإنه يمكن اعتبار $AIDH$ هرما قاعدته المثلث IDH و ارتفاعه AI ، منه :
$V_2=\frac{1}{3}\times DH\times S_{AID}$	$V_2=\frac{1}{3}\times AI\times S_{IDH}$
$V_2=\frac{1}{3}\times DH\times\frac{AI\times ID}{2}$	$V_2=\frac{1}{3}\times AI\times\frac{ID\times DH}{2}$
$V_2=\frac{1}{3}\times 4\times\frac{\frac{\sqrt{32}}{2}\times\frac{\sqrt{32}}{2}}{2}$	$V_2=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{32}}{2}\times\frac{\frac{\sqrt{32}}{2}\times 4}{2}$
$V_2=\frac{4}{3}\times\frac{\frac{32}{4}}{2}=\frac{4\times 8}{6}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$	$V_2=\frac{\sqrt{32}}{6}\times\frac{2\sqrt{32}}{2}=\frac{\sqrt{32}\times\sqrt{32}}{6}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$

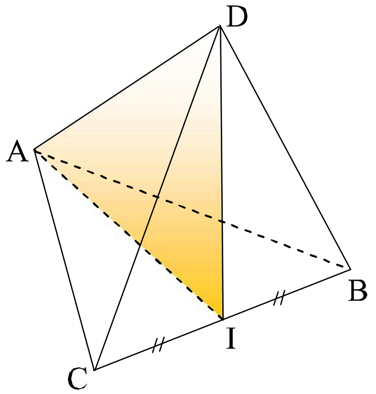
← باستعمال التبسيط المشار إليه سابقا يمكن الحصول على النتيجة بسهولة

7- تحقق أن : $V_1=12V_2$

لدينا : $12V_2=12\times\frac{16}{3}=\frac{192}{3}=64$ ، إذن : $V_1=12V_2$

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

1- أ- بين أن $(DI)\perp(BC)$ ثم احسب DI	معطيات : $AB=BC=AC=AD=DC=DB=4$ I منتصف $[BC]$
لدينا DBC مثلث متساوي الأضلاع و I منتصف $[BC]$ ، إذن (DI) يمثل ارتفاعا للمثلث DBC ، منه $(DI)\perp(BC)$ لدينا DIC مثلث قائم الزاوية في I ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة : $DC^2=CI^2+DI^2$ $4^2=2^2+DI^2$ $16=4+DI^2$ $16-4=DI^2$ $12=DI^2$ $DI=\sqrt{12}$	

ب- احسب AI ثم حدد طبيعة المثلث AID

لدينا ABC مثلث متساوي الأضلاع و I منتصف $[BC]$ ، إذن (AI) يمثل ارتفاعا للمثلث ABC ، منه $(AI)\perp(BC)$

لدينا DIC مثلث قائم الزاوية في I ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$$AC^2=CI^2+AI^2$$
$$4^2=2^2+AI^2$$
$$16=4+AI^2$$
$$16-4=AI^2$$
$$12=AI^2$$
$$AI=\sqrt{12}$$

إذن $AI=DI$ منه AID مثلث متساوي الساقين في النقطة I

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

2- بين أن $(BC)\perp(ADI)$

لدينا حسب ما سبق $(BC)\perp(ID)$ و $(BC)\perp(IA)$

و بما أن (ID) و (IA) متقاطعان و يحددان المستوى (ADI) ، فإن :

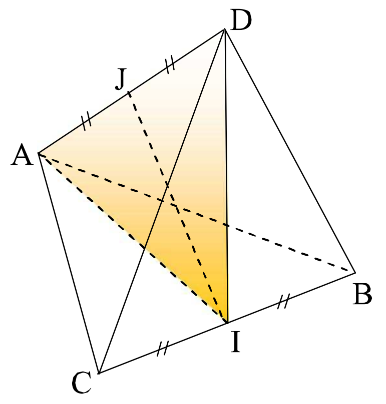
$(BC)\perp(ADI)$

3- أ- لنحسب IJ

لدينا حسب السؤال1-ب AID مثلث متساوي الساقين في النقطة I ، و J منتصف $[AD]$ ، إذن : (IJ) يمثل ارتفاعا للمثلث ADI ، منه $(IJ)\perp(AD)$

لدينا AIJ مثلث قائم الزاوية في J ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة

$$AI^2 = AJ^2 + IJ^2$$
$$\left(\sqrt{12}\right)^2 = 2^2 + IJ^2$$
$$12 = 4 + IJ^2$$
$$12 - 4 = IJ^2$$
$$8 = IJ^2$$
$$IJ = \sqrt{8}$$



3- ب- لنحسب مساحة المثلث AID

$$S_{AID} = \frac{AD \times IJ}{2}$$
$$S_{AID} = \frac{4 \times \sqrt{8}}{2}$$
$$S_{AID} = 2\sqrt{8}$$

4- لنحسب حجم رباعي الأوجه $CAID$

لدينا حسب السؤال 2 : $(BC)\perp(ADI)$ ، إذن : يمكن اعتبار $CAID$ هرما قاعدته المثلث AID و ارتفاعه CI ، منه :

$$V_1 = \frac{1}{3} \times CI \times S_{AID}$$
$$V_1 = \frac{1}{3} \times 2 \times 2\sqrt{8} = \frac{4\sqrt{8}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

5- لنحسب حجم رباعي الأوجه $ABCD$

$$V = 2V_1$$
$$V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

← مستعينا بخطوات التمرين ،يمكنك أن تبرهن أنه إذا كان طول حرف رباعي أوجه منتظم $ABCD$ هو a ، فإن حجمه هو : $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

1- لنحسب حجم الموشور القائم $ABCEFG$

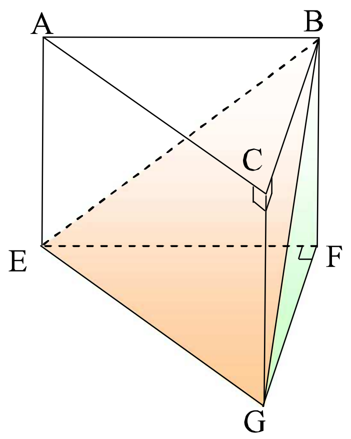
$$V_1 = BF \times S_{EFG}$$
$$V_1 = BF \times \frac{EF \times FG}{2}$$
$$V_1 = 4 \times \frac{4 \times 3}{2} = 4 \times 6 = 24$$

2- لنحسب حجم رباعي الأوجه $BEFG$

$$V_2 = \frac{1}{3} \times BF \times S_{EFG}$$
$$V_2 = \frac{1}{3} \times 24$$
$$V_2 = 8$$

معطيات :

$EF = 4$ و $FG = 3$ و $BF = 4$



3- لنستنتج حجم الهرم $BAEGC$

$$V = V_1 - V_2$$
$$V = 24 - 8$$
$$V = 16$$

4- أ- لنحسب مساحة المستطيل $ACGE$

لنحسب أولا AC ، لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في B ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$AC^2 = 4^2 + 3^2$ منه $AC = 5$

$$AC^2 = 16 + 9 = 25$$

إذن $S_{ACGE} = AC \times CG = 4 \times 5 = 20$

4- ب- لنحسب h ارتفاع الهرم $BAEGC$

باعتبار أن $BAEGC$ هرم قاعدته $EACG$ و ارتفاعه h فإن :

$$V = \frac{1}{3} \times h \times S_{ACGE}$$

و لدينا حسب ماسبق $V = 16$

إذن : $\frac{1}{3} \times h \times 20 = 16$

منه : $\frac{20h}{3} = 16$

بالتالي : $h = \frac{16 \times 3}{20} = \frac{48}{20} = \frac{12}{5}$

← لاحظ أن بعض المجسمات يمكن حساب حجمها بطرق مختلفة، لكونها إما جزء من مجسمات أخرى أو لكونها تحتوي على أكثر من قاعدة و ارتفاع، و هذا يكون مفيدا في حساب بعض المسافات.

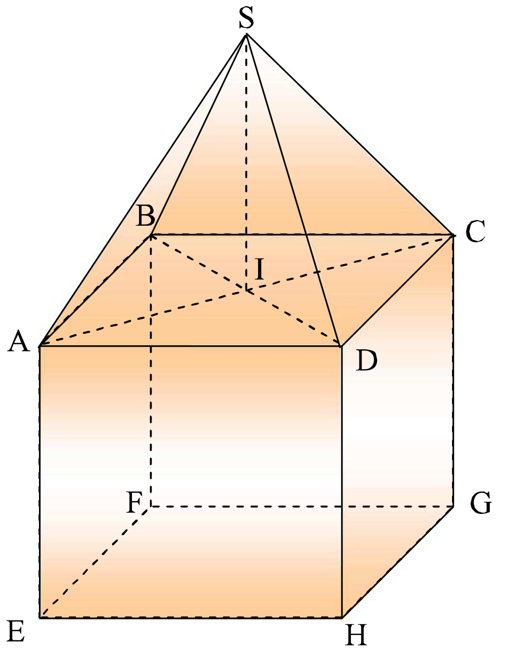
R

تمرين 5

انتبه ← تعليق ←

1- لنحسب حجم هذا المجسم

معطيات : $AB = 3cm$ و $SI = 4cm$



المجسم يتكون من مكعب و هرم مربع القاعدة.

حجم المكعب هو : $V_1 = AB^3 = 3\times3\times3 = 27\,cm^3$

و حجم الهرم $SABCD$ هو :

$$V_2 = \frac{1}{3}\times SI \times S_{ABCD}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\times SI \times AB^2$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\times 4\times 3\times 3$$

$$V_2 = 12\,cm^3$$

بالتالي حجم هذا المجسم هو :

$$V = V_1 + V_2 = 27 + 12 = 39\,cm^3$$

2- لنحسب الحجم الحقيقي للمنزل بالمتر مكعب.

الحجم الحقيق هو :

$$V' = 200^3 \times V$$

$$V' = 200\times200\times200\times39\,cm^3$$

$$V' = 312\,000\,000\,cm^3$$

$$V' = 312\,m^2$$

لأن : $1\,000\,000\,cm^3 = 1m^3$

R

النشــــر و التـــعميـــل و المتطـــابقـــات الهـــامة

I _ النشر و التعميل :

1) – النشــر :

أ) -- قاعدة 1 :

a و b و c أعداد حقيقية .

$$a(b+c)=ab+ac \quad \text{و} \quad (b+c)\times a=ab+ac$$

$$a(b-c)=ab-ac \quad \quad (b-c)\times a=ab-ac$$

*** مثال :**

$$A=2x(x+4)$$
$$=2x\times x+2x\times 4$$
$$=2x^2+8x$$

$$B=(-3x-5)\times(-4x)$$
$$=-4x\times(-3x)-(-4x)\times 5$$
$$=12x^2+20x$$

ب) -- قاعدة 2 :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)$$
$$=ac+ad+bc+bd$$

*** مثال :**

$$C=(2-x)(3x+1)$$
$$=2(3x+1)-x(3x+1)$$
$$=6x+2-3x^2-x$$
$$=-3x^2+6x-x+2$$
$$=-3x^2+5x+2$$

$$D=(-2x-4)(-3-x)$$
$$=-2x(-3-x)-4(-3-x)$$
$$=6x+2x^2+12+4x$$
$$=2x^2+6x+4x+12$$
$$=2x^2+10x+12$$

*** تمرين تطبيقي :**

أنشر ثم بسط ما يلي :

$$A=3x(2x+1)+(3x-2)(x+7)$$

$$B=2\sqrt{3}\left(x+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-2x\right)$$

R

الحـل :

$$A = 3x(2x+1)+(3x-2)(x+7)$$
$$= 6x^2+3x+3x(x+7)-2(x+7)$$
$$= 6x^2+3x+3x^2+21x-2x-14$$
$$= 6x^2+3x^2+3x+21x-2x-14$$
$$= 9x^2+22x-14$$

$$B = 2\sqrt{3}\left(x+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-2x\right)$$
$$= 2x\sqrt{3}+2\sqrt{3}^2-\sqrt{5}^2+2x\sqrt{5}$$
$$= 2x\sqrt{3}+2x\sqrt{5}+6-5$$
$$= 2x\sqrt{3}+2x\sqrt{5}+1$$

2) – التعميــل :

أ) -- قاعدة :

a و b و c أعداد حقيقية .

$$ab+ac=a(b+c)$$
$$ab-ac=a(b-c)$$

ب) -- مثال :

$$A = 2abc+7ab-11ac$$
$$= a(2bc+7b-11c)$$

$$B = 2x(x-1)+(x-1)(4x+5)$$
$$= (x-1)\left[2x+(4x+5)\right]$$
$$= (x-1)(2x+4x+5)$$
$$= (x-1)(6x+5)$$

* تمرين تطبيقي :

عمل ما يلي :

$$A = 8xy+12x^2y-4xy^2$$
$$B = (2x+1)(5-x)-(2x+1)(7x+3)$$

الحـل :

$$A = 8xy+12x^2y-4xy^2$$
$$= 4xy(2+3x-y)$$

$$B = (2x+1)(5-x)-(2x+1)(7x+3)$$
$$= (2x+1)\left[(5-x)-(7x+3)\right]$$
$$= (2x+1)(5-x-7x-3)$$
$$= (2x+1)(-x-7x+5-3)$$
$$= (2x+1)(-8x+2)$$
$$= (2x+1)\times 2(-4x+1)$$
$$= 2(2x+1)(-4x+1)$$

R

II _ المتطابقات الهـامة :

1) – قواعد :

a و b عددان حقيقيان .

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

2) – تطبيقات :

*** المتطابقات الهامة و النشر :**

$$A = (2x+3)^2$$
$$= (2x)^2 + 2\times 2x \times 3 + 3^2$$
$$= 4x^2 12x + 9$$

$$B = (5-7x)^2$$
$$= 5^2 - 2\times 5 \times 7x + (7x)^2$$
$$= 25 - 70x + 49x^2$$

$$C = \left(2\sqrt{2}+3x\right)\left(2\sqrt{2}-3x\right)$$
$$= \left(2\sqrt{2}\right)^2 - (3x)^2$$
$$= 8 - 9x^2$$

*** المتطابقات الهامة و التعميـل :**

$$D = 25x^2 + 30x + 9$$
$$= (5x)^2 + 2\times 5x \times 3 + 3^2$$
$$= (5x+3)^2$$

$$E = 16 - 56x + 49x^2$$
$$= (4)^2 - 2\times 4 \times 7x + (7x)^2$$
$$= (4-7x)^2$$

$$F = 144x^2 - 4$$
$$= (12x)^2 - 2^2$$
$$= (12x-2)(12x+2)$$

*** تمرين تطبيقي :**

1) – أنشر ثم بسط ما يلي :

$$A = (2x+1)^2 - (3x+5)(3x-5)$$

$$B = (7-2x)^2 + 4x(1-x)$$

2) – عمـل ما يلي :

$$C = 25x^2 - 4 + (5x-2)(5x+6)$$

$$D = 9x^2 - 6x + 1 + 5x(3x+1)$$

R

الحـل :

1) – النشر و التبسيط :

$$
\begin{aligned}
A &= (2x+1)^2-(3x+5)(3x-5)\\
&=\left[(2x)^2+2\times 2x\times 1+1^2\right]-\left[(3x)^2-5^2\right]\\
&=\left[4x^2+4x+1\right]-\left[9x^2-25\right]\\
&=4x^2+4x+1-9x^2+25\\
&=4x^2-9x^2+4x+1+25\\
&=-5x^2+4x+26
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= (7-2x)^2+4x(1-x)\\
&=\left[7^2-2\times 7\times 2x+(2x)^2\right]+\left[4x-4x^2\right]\\
&=49-28x+4x^2+4x-4x^2\\
&=4x^2-4x^2-28x+4x+49\\
&=-24x+49
\end{aligned}
$$

2) – التعميـل :

$$
\begin{aligned}
C &= 25x^2-4+(5x-2)(5x+7)\\
&=(5x)^2-2^2+(5x-2)(5x+7)\\
&=(5x-2)(5x+2)+(5x-2)(5x+7)\\
&=(5x-2)\left[(5x+2)+(5x+7)\right]\\
&=(5x-2)(5x+2+5x+7)\\
&=(5x-2)(10x+9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= 9x^2-6x+1+5x(3x+1)\\
&=(3x)^2-2\times 3x\times 1+1^2+5x(3x+1)\\
&=(3x-1)^2+5x(3x+1)\\
&=(3x-1)(3x+1)+5x(3x+1)\\
&=(3x+1)\left[(3x-1)+5x\right]\\
&=(3x+1)(3x-1+5x)\\
&=(3x+1)(8x-1)
\end{aligned}
$$

R

تـمــاريــن

التمرين الأول

أنشر وبسط :

$A = (8 - 5x)^2$; $B = 4x(3x-1) - (3x-7)(5-3x)$; $C = (x-3)^2 + x(x+5)$; $D = (x+4)^2 - (5x-4)$

التمرين الثاني

أ - أنشر وبسط ما يلي : $(x-4)^2 - (x-2)(x-8)$

ب - استنتج طريقة حساب التعبير $9992 \times 9998 - 9996^2$ ثم أحسبه

التمرين الثالث

نعتبر التعبير $E = (2x-1)(x+8) + (x+8)^2$

1) أنشر وبسط التعبير E

2) أكتب التعبير E على شكل جداء عاملين

التمرين الرابع

نعتبر التعبير $F = 9x^2 - 16 - (2x-3)(3x+4)$

1) أنشر وبسط التعبير F

2) عمل التعبير F

3) أحسب قيمة التعبير بالنسبة ل : $x = -1,5$.

R

تصحيح التمرين الأول

$$C = (x - 3)^2 + x(x + 5)$$
$$= [(x - 3)^2] \quad + \quad [x(x + 5)]$$
$$= [x^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times x] + [x^2 + 5x]$$
$$= x^2 + 9 - 6x + x^2 + 5x$$
$$= 2x^2 - x + 9$$

$$D = (x+ 4)^2 - (5x - 4)$$
$$= [(x+ 4)^2] - (5x - 4)$$
$$= [x^2 + 4^2 + 2 \times x \times 4] - (5x-4)$$
$$= [x^2 + 16 + 8x] - (5x - 4)$$
$$= x^2 + 16 + 8x - 5x + 4$$
$$= x^2 + 3x + 20$$

$$A = (8 - 5x)^2$$
$$= 8^2 - 2\times 40x + (5x)^2$$
$$= 64 - 80x + 25x^2$$

$$B = [\,4x\,(3x-1)] - [(3x - 7)\,(5 - 3x\,)]$$
$$= [\,12x^2 - 4x] - [\,15x - 9x^2 - 35 + 21x\,]$$
$$= [\,12x^2 - 4x\,] - [\,-9x^2 + 36x - 35\,]$$
$$= 12x^2 - 4x + 9x^2 - 36x + 35$$
$$= 21x^2 - 40x + 35$$

تصحيح التمرين الثاني

أ - أحسب و أبسط

$$F = (x- 4)^2 - (x- 2)(x - 8)$$
$$= [(x- 4)^2] \quad - \quad [(x- 2)(x - 8)].$$
$$= [x^2 + 4^2 - 2 \times x \times 4] - [x^2 - 8x - 2x + 16]$$
$$= [x^2 + 16 - 8x\,] - [x^2 - 10x + 16]$$
$$= \; x^2 + 16 - 8x \; - x^2 + 10x - 16$$
$$= 2x$$

ب - طريقة حساب التعبير **$9996^2 - 9998 \times 9992$** حسابه

$9996^2 - 9998 \times 9992 = (10000 - 4)^2 - (10000 - 2)(10000 - 8) = F(10000)$

donc $9996^2 - 9998 \times 9992 = 2 \times 10000 = 20000$

تصحيح التمرين الثالث

(1

$$E = (2x - 1)\,(x+ 8) \;+\; (x+ 8)^2$$
$$= 2x^2 + 16x - x - 8 + x^2 + 2x \times 8 + 8^2$$
$$= 2x^2 + 15x - 8 \;+ x^2 + 16x + 64$$
$$= \; 2x^2 \; + x^2 + 15x + 16x \; + 56$$
$$= \quad 3x^2 \quad + \quad 31x \quad + \; 56$$

(2

$$E = (2x - 1)\,(x+ 8) \;+\; (x+ 8)^2$$
$$E = (2x - 1)\,(x+ 8) + (x+ 8)(x+8)$$
$$E = (\,x + 8\,)[\,(\,2x- 1\,) + (\,x + 8\,)]$$
$$E = (x + 8\,)[\,2x-1 + x + 8\,]$$
$$E = (\,x + 8)\,[\,3x + 7\,]$$

تصحيح التمرين الرابع

1) أنشر وأبسط التعبير F

1. $F = 9x^2-16 - (2x - 3)(3x + 4)$
$$= 9x^2-16 - [(2x - 3)(3x + 4)]$$
$$= 9x^2-16 - [2x \times 3x + 2x \times 4 - 3 \times 3x - 3 \times 4]$$
$$= 9x^2 - 16 - [6x^2 + 8x - 9x - 12]$$
$$= 9x^2 - 16 - [6x^2 - x - 12]$$
$$= 9x^2 - 16 - 6x^2 + x + 12$$
$$= 3x^2 + x - 4$$

2) أعمل التعبير F

2 . $F = 9x^2 - 16 \quad - \quad (2x - 3)(3x + 4)$
$$= (3x - 4)(3x + 4) - (2x - 3)(3x + 4)$$
$$= (3x + 4)\,[(3x - 4) - (2x - 3)]$$
$$= (3x + 4)\,[3x - 4 - 2x + 3]$$
$$= (3x + 4)\,[x - 1]$$
$$= (3x + 4)\,(x - 1)$$

R

الجـــــذور المــــــــــربعـــة

I _ الجذر المربع لعدد حقيقي غير موجب :

1) – تعريف :

العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه a يسمى : جذر مربع العدد a و يكتب : $\sqrt{a}$.

* بتعبير آخر :

a عدد حقيقي موجب و b عدد حقيقي موجب.

$a = b^2$ يعني أن $b = \sqrt{a}$

2) – نتيجة :

مهما كان a عددا حقيقيا موجبا فإن :

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2} = a$$

* أمثلة :

$$\sqrt{0} = 0 \quad ;; \quad \sqrt{3^2} = 3 \quad ;; \quad \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$

$$\sqrt{1} = 1 \quad ;; \quad \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4 \quad ;; \quad \sqrt{(-7)^2} = 7$$

$$\sqrt{\frac{100}{9}} = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{10}{3} \quad ;; \quad \sqrt{1.21} = \sqrt{(1,1)^2} = 1,1$$

II _ العمليات على الجذور المربعة :

1) – خاصية 1 : الجذر المربع و الجداء.

a و b عددان حقيقيان موجبان .

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

2) – نتيجة :

a و b عددان حقيقيان موجبان : $\sqrt{a^2 \times b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$

R

* أمثلة :

$$\sqrt{3}\times\sqrt{7}=\sqrt{3\times7}=\sqrt{21}$$

$$\sqrt{80}=\sqrt{16\times5}=\sqrt{16}\times\sqrt{5}=\sqrt{4^2}\times\sqrt{5}=4\sqrt{5}$$

$$\sqrt{2}\times\sqrt{4}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times4\times3}=\sqrt{24}=\sqrt{4\times6}=\sqrt{4}\times\sqrt{6}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{6}=2\sqrt{6}$$

3) – خاصية 2 : الجذر المرع و الخارج.

a و b عددان حقيقيان موجبان و $b\neq0$.

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

* أمثلة :

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$$

$$\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{3^2}}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{16\times2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{16}\times\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}=\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$$

III _ حذف الجذر المربع من المقام :

1) – الحالة الأولى :

* لنحذف الجذر المربع من مقام العدد : $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

لدينا :

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

* لنحذف الجذر الربع من مقام العدد : $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$.

لدينا :

$$\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3\times2}}{5\sqrt{2^2}}=\frac{\sqrt{6}}{5\times2}=\frac{\sqrt{6}}{10}$$

* لنحذف الجذر المربع من مقام العدد : $\frac{2+\sqrt{5}}{7\sqrt{3}}$.

لدينا :

$$\frac{2+\sqrt{5}}{7\sqrt{3}}=\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\times\sqrt{3}}{7\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{7\sqrt{3^2}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5\times3}}{73}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{15}}{21}$$

R

2) – الحالة الثانية : استعمال المرافق. (مرافق (a+b) هو (a–b) و مرافق (a–b) هو (a+b))

* لنحذف الجر المربع من مقام العدد : $\dfrac{2}{1-\sqrt{5}}$

لدينا : $$\frac{2}{1-\sqrt{5}}=\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}=\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{1^2-\sqrt{5}^2}=\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{1-5}=\frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{-4}$$

ملاحظة : مرافق العدد $\left(1-\sqrt{5}\right)$ هو العدد $\left(1+\sqrt{5}\right)$

IV _ حـل المعادلة : $x^2=a$.

1) – قاعدة :

إذا كان $a>0$ فإن المعادلة $x^2=a$ لها حلين هما : $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$.

إذاكان $a=0$ فإن المعادلة $x^2=a$ لها حـلا وحيدا هو العدد 0.

إذا كان $a<0$ فإن المعادلة $x^2=a$ ليس لها حـلا .

2) – أمثلة :

* حل المعادلة : $x^2-9=0$.

لدينا : $x^2=9$

$x=\sqrt{9}=3$ أو $x=-\sqrt{9}=-3$

إذن : هذه المعادلة تقبل حلين هما 3 و -3 .

* حل المعادلة : $x^2+11=0$.

لدينا : $x^2=-11$ لا يمكن لأن المربع يكون دائما موجبا.

إذن : هذه المعادلة ليس لها حـلا.

* حل المعادلة : $x^2=0$.

لدينا : $x^2=0$ يعني أن $x=0$.

إذن هذه المعادلة تقبل حـلا وحيدا هو 0 .

R

نصوص التمارين

1) أحسب $\sqrt{81}$, $\sqrt{144}$, $\sqrt{8^4}$, $\sqrt{2^4\times5^2\times7^6}$, $\sqrt{\dfrac{49}{36}}$, $\sqrt{10^{-6}}$

$\sqrt{0{,}0025}$, $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$, $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{54}}$,

2) أحسب $\left(\sqrt{5}\right)^2$, $\left(-\sqrt{11}\right)^2$, $\left(3\sqrt{5}\right)^3$, $\left(\dfrac{-\sqrt{7}}{4}\right)^2$

3) أتمم $\sqrt{\ldots\ldots}=7$, $\sqrt{\ldots\ldots}=\dfrac{8}{5}$, $\sqrt{\ldots\ldots}=2\times5^3$

4) a و b و c أعداد جذرية موجبة قطعا

بسط $\sqrt{\mathbf{a}^2\times\mathbf{b}^4}$, $\sqrt{9\mathbf{a}^4\mathbf{b}^6\mathbf{c}^2}$, $\sqrt{\dfrac{4\mathbf{a}^6\mathbf{b}^8}{\mathbf{c}^{10}}}$

5) بسط

$\sqrt{63}-\sqrt{112}+\sqrt{700}$, $\sqrt{99}-10\sqrt{1100}-6\sqrt{396}$

$\dfrac{3}{4}\sqrt{48}-0{,}5\sqrt{108}$, $\sqrt{\dfrac{7}{3}}+4\sqrt{\dfrac{63}{75}}-2\sqrt{\dfrac{28}{27}}$

6) بسط $\left(3\sqrt{2}-2\right)^2$, $\left(\sqrt{15}-\sqrt{30}\right)\left(\sqrt{15}+\sqrt{30}\right)$, $\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

7) أتمم

$4+2\sqrt{3}=\left(1+\ldots\ldots\right)^2$, $9-4\sqrt{5}=\left(2-\ldots\ldots\right)^2$

$29-12\sqrt{5}=\left(3-\ldots\ldots\right)^2$, $\mathbf{a}+4\sqrt{\mathbf{a}}+4=\left(\ldots\ldots+\ldots\ldots\right)^2$ ($\mathbf{a}\in$ IN)

8) إرجع للتمرين **7)** وبسط

$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$, $\sqrt{\mathbf{a}+4\sqrt{\mathbf{a}}+4}$ ($\mathbf{a}\in$ IN)

9) بسط

$\sqrt{7+2\sqrt{10}}$, $\sqrt{21+4\sqrt{5}}$, $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$

10) إجعل مقامات الأعداد الآتية جذرية

A و b أعداد جذرية بحيث $\mathbf{a}\geq0$ و **b**>0 و $\mathbf{a}\neq1$

$\dfrac{10}{\sqrt{5}}$, $\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$, $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $\dfrac{14}{3\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$, $\dfrac{2\sqrt{\mathbf{a}}}{1-\sqrt{\mathbf{a}}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}}-\sqrt{\mathbf{a}}}$

11) أ- إجعل مقامات الأعداد الآتية جذرية

$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$, ,

ب - بسط $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$

R

12) قارن $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ و $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

13) a و b عددان حقيقيان موجبان، بين أن :

1 - $\left(\sqrt{\mathbf{a}}+\sqrt{\mathbf{b}}\right)^2 \geq 4\sqrt{\mathbf{ab}}$

2 - $\left(\sqrt{\mathbf{a}}+\sqrt{\mathbf{b}}\right)^2 \geq \left(\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}}\right)^2$

واستنتج أن $\sqrt{\mathbf{a}}+\sqrt{\mathbf{b}} \geq \sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$ متى يكون التساوي؟

14) بين أن :

$$\sqrt{18+\sqrt{8}} = \sqrt{9+\sqrt{79}} + \sqrt{9-\sqrt{79}}$$

$$\sqrt{6+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}$$

15) a وb عددان حقيقيان موجبان قطعا ومختلفان و a يخالف 1

بسط $\frac{\mathbf{a}^2+2\mathbf{a}+2\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{b}}+\mathbf{b}+2\sqrt{\mathbf{b}}}{\mathbf{a}^2-\mathbf{a}+\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{b}}-\sqrt{\mathbf{b}}}$

16) a و b عددان حقيقيان حيث $\mathbf{a} \geq 0$ و **b>1**

تحقق أن :

$$\sqrt{a}\,\frac{\sqrt{1+\frac{2b}{1+b^2}}+\sqrt{1-\frac{2b}{1+b^2}}}{\sqrt{a+\frac{2ab}{1+b^2}}-\sqrt{a-\frac{2ab}{1+b^2}}} = b$$

17) أحسب

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$$

18) نعتبر ثلاث نقط A و B و C بحيث

$\mathbf{AB} = \sqrt{343}$ ، $\mathbf{BC} = \sqrt{63}$ ، $\mathbf{AC} = \sqrt{700}$

هل النقط A و B و C مستقيمية؟

R

حلول التمارين

1) $\sqrt{81}=\sqrt{9^2}=9$ ، $\sqrt{144}=\sqrt{12^2}=12$ ، $\sqrt{8^4}=\sqrt{\left(8^2\right)^2}=8^2=64$

$$\sqrt{2^4\times5^2\times7^6}=\sqrt{\left(2^2\right)^2\times5^2\times\left(7^3\right)^2}=\sqrt{\left(2^2\times5\times7^3\right)^2}=2^2\times5\times7^3$$

$$\sqrt{\frac{49}{36}}=\sqrt{\frac{7^2}{6^2}}=\sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2}=\frac{7}{6}$$

$$\sqrt{10^{-6}}=\sqrt{\left(10^{-3}\right)^2}=10^{-3}$$

$$\sqrt{0{,}0025}=\sqrt{25\times10^{-4}}=\sqrt{5^2\times\left(10^{-2}\right)^2}=\sqrt{\left(5\times10^{-2}\right)^2}=5\times10^{-2}=0{,}05$$

$$\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times12}=\sqrt{36}=6$$

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{54}}=\sqrt{\frac{24}{54}}=\sqrt{\frac{6\times4}{6\times9}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$$

2) $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ ، $\left(-\sqrt{11}\right)^2=\left(\sqrt{11}\right)^2=11$ ،

$$\left(3\sqrt{5}\right)^3=3^3\left(\sqrt{5}\right)^3=27\left(\sqrt{5}\right)^2\sqrt{5}=27\times5\times\sqrt{5}=135\sqrt{5}$$

$$\left(\frac{-\sqrt{7}}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$$

3) $\sqrt{49}=7$ ، $\sqrt{\frac{64}{25}}=\frac{8}{5}$ ، $\sqrt{2^2\times5^6}=2\times5^3$

4) $\sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^4}=\sqrt{\left(\mathbf{ab}^2\right)^2}=\mathbf{ab}^2$

$$\sqrt{9\mathbf{a}^4\mathbf{b}^6\mathbf{c}^2}=\sqrt{\left(3\mathbf{a}^2\mathbf{b}^3\mathbf{c}\right)^2}=3\mathbf{a}^2\mathbf{b}^3\mathbf{c}$$

$$\sqrt{\frac{4\mathbf{a}^6\mathbf{b}^8}{\mathbf{c}^{10}}}=\sqrt{\left(\frac{2\mathbf{a}^3\mathbf{b}^4}{\mathbf{c}^5}\right)^2}=\frac{2\mathbf{a}^3\mathbf{b}^4}{\mathbf{c}^5}$$

5) $\sqrt{63}-\sqrt{112}+\sqrt{700}=\sqrt{7\times9}-\sqrt{7\times16}+\sqrt{7\times100}$

R

$$= \sqrt{9} \times \sqrt{7} - \sqrt{16} \times \sqrt{7} + \sqrt{100} \times \sqrt{7}$$
$$= 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 10\sqrt{7}$$
$$= 9\sqrt{7}$$

$$\sqrt{99} - 10\sqrt{1100} - 6\sqrt{396} = \sqrt{9 \times 11} - 10\sqrt{100 \times 11} - 6\sqrt{36 \times 11}$$
$$= \sqrt{9} \times \sqrt{11} - 10\sqrt{100} \times \sqrt{11} - 6\sqrt{36} \times \sqrt{11}$$
$$= 3\sqrt{11} - 10 \times 10\sqrt{11} - 6 \times 6\sqrt{11}$$
$$= 3\sqrt{11} - 100\sqrt{11} - 36\sqrt{11}$$
$$= -133\sqrt{11}$$

$$\frac{3}{4}\sqrt{48} - 0{,}5\sqrt{108} = \frac{3}{4}\sqrt{16 \times 3} - 0{,}5\sqrt{36 \times 3}$$
$$= \frac{3}{4} \times 4\sqrt{3} - 0{,}5 \times 6\sqrt{3}$$
$$= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$$
$$= 0$$

$$\sqrt{\frac{7}{3}} + 4\sqrt{\frac{63}{75}} - 2\sqrt{\frac{28}{27}} = \sqrt{\frac{7}{3}} + 4\sqrt{\frac{9 \times 7}{25 \times 3}} - 2\sqrt{\frac{4 \times 7}{9 \times 3}}$$
$$= \sqrt{\frac{7}{3}} + 4 \times \frac{3}{5} \times \sqrt{\frac{7}{3}} - 2 \times \frac{2}{3} \times \sqrt{\frac{7}{3}}$$
$$= \sqrt{\frac{7}{3}} + \frac{12}{5}\sqrt{\frac{7}{3}} - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$$
$$= \left(1 + \frac{12}{5} - \frac{4}{3}\right) \times \sqrt{\frac{7}{3}}$$
$$= \left(\frac{15 + 36 - 20}{15}\right) \times \sqrt{\frac{7}{3}}$$
$$= \frac{31}{15}\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$\left(3\sqrt{2} - 2\right)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 2 + 2^2$$ **(6**
$$= 9 \times 2 - 12\sqrt{2} + 4$$
$$= 18 - 12\sqrt{2} + 4$$
$$= 22 - 12\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{15} - \sqrt{30}\right)\left(\sqrt{15} + \sqrt{30}\right) = \left(\sqrt{15}\right)^2 - \left(\sqrt{30}\right)^2$$
$$= 15 - 30$$
$$= -15$$

$$\left(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right) = \left[\left(2 + \sqrt{2}\right) + \sqrt{3}\right] \times \left[\left(2 + \sqrt{2}\right) - \sqrt{3}\right]$$
$$= \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2$$

R

$$= 2^2 + 2\times 2\times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - 3$$
$$= 4 - 4\sqrt{2} + 2 - 3$$
$$= 3 - 4\sqrt{2}$$

7) $4+2\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^2$ ، $9-4\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^2$ ، $29-12\sqrt{5}=(3-2\sqrt{5})^2$

$\mathbf{a}+4\sqrt{\mathbf{a}}+4=(\sqrt{\mathbf{a}}+2)^2$

8) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}$ ، $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = \sqrt{5}-2$ ، $\sqrt{\mathbf{a}+4\sqrt{\mathbf{a}}+4}=\sqrt{(\sqrt{\mathbf{a}}+2)^2} = \sqrt{\mathbf{a}}+2$

(لاحظ أن $\sqrt{5}-2>0$)

9) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$ ، $\sqrt{21+4\sqrt{5}}=\sqrt{(2\sqrt{5}+1)^2} = 2\sqrt{5}+1$ ، $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+3)^2} = \sqrt{2}+3$

10)

$$\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{(\sqrt{2})^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{2-3}=\frac{2+2\sqrt{6}+3}{-1}=-5-2\sqrt{6}$$

$$\frac{14}{3\sqrt{3}+2\sqrt{5}}=\frac{14(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})}{(3\sqrt{3}+2\sqrt{5})(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})}=\frac{14(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})}{(3\sqrt{3})^2-(2\sqrt{5})^2}=\frac{14(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})}{27-20}=\frac{14(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})}{7}=2(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})=6\sqrt{3}-4\sqrt{5}$$

$$\frac{2\sqrt{\mathbf{a}}}{1-\sqrt{\mathbf{a}}}=\frac{2\sqrt{\mathbf{a}}(1+\sqrt{\mathbf{a}})}{(1-\sqrt{\mathbf{a}})(1+\sqrt{\mathbf{a}})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}}-\sqrt{\mathbf{a}}}=\frac{1(\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}}+\sqrt{\mathbf{a}})}{(\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}}-\sqrt{\mathbf{a}})(\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}}+\sqrt{\mathbf{a}})}$$

R

$$= \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a+b}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{a+b-a}$$

$$= \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{b}$$

$$= \frac{2\sqrt{a}+2\left(\sqrt{a}\right)^2}{1-\left(\sqrt{a}\right)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{a}+2a}{1-a}$$

(11

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}\right)}{\left(\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}\right)\left(\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{\left(\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)+\sqrt{3}\right)\left(\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{2+3-2\times\sqrt{2}\sqrt{3}-5}$$

$$= \frac{2+5-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}-3}{-2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{4-2\sqrt{10}}{-2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\left(4-2\sqrt{10}\right)\times\sqrt{6}}{-2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$$

$$= \frac{4\sqrt{6}-2\sqrt{60}}{-2\times 6}$$

$$= \frac{4\sqrt{6}-2\sqrt{60}}{-12}$$

$$= \frac{2\sqrt{60}-4\sqrt{6}}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{60}-2\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}} = \frac{1\left(\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)-2\sqrt{2}\right)}{\left(\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)+2\sqrt{2}\right)\left(\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)-2\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-8}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{15}+3-8}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{-2\sqrt{15}}$$

R

$$= \frac{\left(\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right) \times \sqrt{15}}{-2\sqrt{15} \times \sqrt{15}}$$
$$= \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{15} - \sqrt{3} \times \sqrt{15} - 2\sqrt{2} \times \sqrt{15}}{-2 \times 15}$$
$$= \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} - 2\sqrt{30}}{-30}$$
$$= \frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{30}}{-30}$$
$$= \frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{30} - 5\sqrt{3}}{30}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1} = \frac{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1\right) + \left(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1\right)}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1\right)}$$
$$= \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 - 1^2}$$
$$= \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3 + 2 + 2\sqrt{6} - 1}$$
$$= \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{6} + 4}$$
$$= \frac{2\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{2\left(\sqrt{6} + 2\right)}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} - 2\right)}{\left(\sqrt{6} + 2\right)\left(\sqrt{6} - 2\right)}$$
$$= \frac{\sqrt{18} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12} - 2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{6}\right)^2 - 2^2}$$
$$= \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{6 - 4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

12) لمقارنة $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ و $\frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

طريقة 1 : ندرس إشارة فرقهما:

$$\frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{3\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}$$
$$= \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$= \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}{3 - 2}$$

R

$$= \frac{2\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)}{1}$$
$$= 2\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$$

و لدينا $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ و $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$

$3<8$ إذن $2\sqrt{2} < \sqrt{3}$ ومنه $0< \sqrt{3}-2\sqrt{2}$

و بالتالي $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

طريقة 2 :

نجعل المقام جذريا أولا ثم نقارن

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}$$
$$= \sqrt{3}+\sqrt{2}$$
$$\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$$
$$= \frac{3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2}$$
$$= 3\sqrt{3}-3\sqrt{2}$$

و نقارن $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ و $3\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ بدراسة إشارة فرقهما مثل الطريقة1 .

13) 1 - لدينا $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 - 4\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\times\sqrt{a}\times\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 4\sqrt{ab}$

$$= a + 2\sqrt{ab} + b - 4\sqrt{ab}$$
$$= a - 2\sqrt{ab} + b$$
$$= \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

و $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ إذن $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \geq 4\sqrt{ab}$

2 - $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - (a+b)$

$$= 2\sqrt{ab}$$

و $2\sqrt{ab} \geq 0$ إذن $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a+b}\right)^2$

إذن يكون التساوي إذا كان $\sqrt{ab} = 0$ أي $ab = 0$ يعني $a = 0$ أو $b = 0$

14)

لدينا $\left(\sqrt{18+\sqrt{8}}\right)^2 = 18+\sqrt{8}$

$$= 18 + \sqrt{4\times 2}$$
$$= 18 + 2\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{9+\sqrt{79}}+\sqrt{9-\sqrt{79}}\right)^2 = \left(\sqrt{9+\sqrt{79}}\right)^2 + 2\times\sqrt{9+\sqrt{79}}\times\sqrt{9-\sqrt{79}} + \left(\sqrt{9-\sqrt{79}}\right)^2$$

R

$$= 9+\sqrt{79}+2\times\sqrt{9^2-\left(\sqrt{79}\right)^2}+9-\sqrt{79}$$
$$= 18+2\sqrt{81-79}$$
$$= 18+2\sqrt{2}$$

و العددان $\sqrt{18+\sqrt{8}}$ و $\sqrt{9+\sqrt{79}}+\sqrt{9-\sqrt{79}}$ موجبان إذن :

$$\sqrt{18+\sqrt{8}} = \sqrt{9+\sqrt{79}}+\sqrt{9-\sqrt{79}}$$

و بنفس الطريقة

$$\left(\sqrt{6+\sqrt{5}}\right)^2 = 6+\sqrt{5}$$

$$\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}} = \left(\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}\right)^2+2\times\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}\times\frac{6-\sqrt{31}}{2}}+\left(\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}\right)^2$$
$$= \frac{6+\sqrt{31}}{2}+2\times\sqrt{\frac{6^2-\left(\sqrt{31}\right)^2}{4}}+\frac{6-\sqrt{31}}{2}$$
$$= \frac{6+\sqrt{31}+2\sqrt{36-31}+6-\sqrt{31}}{2}$$
$$= \frac{12+2\sqrt{5}}{2}$$
$$= 6+\sqrt{5}$$

إذن : $\sqrt{6+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}$

15)

$$\frac{\mathbf{a}^2+2\mathbf{a}+2\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{b}}+\mathbf{b}+2\sqrt{\mathbf{b}}}{\mathbf{a}^2-\mathbf{a}+\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{b}}-\sqrt{\mathbf{b}}} = \frac{\left(\mathbf{a}^2+2\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{b}}+\mathbf{b}\right)+\left(2\mathbf{a}+2\sqrt{\mathbf{b}}\right)}{\left(\mathbf{a}^2-\mathbf{a}\right)+\left(\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{b}}-\sqrt{\mathbf{b}}\right)}$$
$$= \frac{\left(\mathbf{a}+\sqrt{\mathbf{b}}\right)^2+2\left(\mathbf{a}+\sqrt{\mathbf{b}}\right)}{\mathbf{a}\left(\mathbf{a}-1\right)+\sqrt{\mathbf{b}}\left(\mathbf{a}-1\right)}$$
$$= \frac{\left(\mathbf{a}+\sqrt{\mathbf{b}}\right)\left[\left(\mathbf{a}+\sqrt{\mathbf{b}}\right)+2\right]}{\left(\mathbf{a}+\sqrt{\mathbf{b}}\right)\left(\mathbf{a}-1\right)}$$
$$= \frac{\mathbf{a}+\sqrt{\mathbf{b}}+2}{\mathbf{a}-1}$$

16)

$$\sqrt{a}\,\frac{\sqrt{1+\frac{2b}{1+b^2}}+\sqrt{1-\frac{2b}{1+b^2}}}{\sqrt{a+\frac{2ab}{1+b^2}}-\sqrt{a-\frac{2ab}{1+b^2}}} = \sqrt{a}\,\frac{\sqrt{\frac{1+b^2+2b}{1+b^2}}+\sqrt{\frac{1+b^2-2b}{1+b^2}}}{\sqrt{\frac{a+ab^2+2ab}{1+b^2}}-\sqrt{\frac{a+ab^2-2ab}{1+b^2}}}$$
$$= \sqrt{\mathbf{a}}\,\frac{\frac{\sqrt{(1+\mathbf{b})^2}}{\sqrt{1+\mathbf{b}^2}}+\frac{\sqrt{(\mathbf{b}-1)^2}}{\sqrt{1+\mathbf{b}^2}}}{\frac{\sqrt{\mathbf{a}\left(1+\mathbf{b}^2+2\mathbf{b}\right)}}{\sqrt{1+\mathbf{b}^2}}-\frac{\sqrt{\mathbf{a}\left(1+\mathbf{b}^2-2\mathbf{b}\right)}}{\sqrt{1+\mathbf{b}^2}}}$$

R

$$= \sqrt{a}\,\frac{\dfrac{1+b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{b-1}{\sqrt{1+b^2}}}{\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{(1+b)^2}}{\sqrt{1+b^2}}-\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{(b-1)^2}}{\sqrt{1+b^2}}}$$

$$= \sqrt{a}\,\frac{\dfrac{1+b+b-1}{\sqrt{1+b^2}}}{\dfrac{\sqrt{a}(1+b)-\sqrt{a}(b-1)}{\sqrt{1+b^2}}}$$

$$= \sqrt{a}\,\frac{\dfrac{2b}{\sqrt{1+b^2}}}{\dfrac{\sqrt{a}[(1+b)-(b-1)]}{\sqrt{1+b^2}}}$$

$$= \sqrt{a}\,\frac{\dfrac{2b}{\sqrt{1+b^2}}}{\dfrac{\sqrt{a}(1+b-b+1)}{\sqrt{1+b^2}}}$$

$$= \frac{2b}{\sqrt{1+b^2}} \times \frac{\sqrt{1+b^2}}{2}$$

$$= b$$

17) لحساب A نجعل أولا المقام جذريا في كل حد

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dots\dots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\dots\dots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{(\sqrt{100}+\sqrt{99})(\sqrt{100}-\sqrt{99})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\dots\dots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99}$$

$$= \cancel{\sqrt{2}}-1+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\dots\dots\dots}+\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}}$$

$$= -1+\sqrt{100}$$

$$= -1+10 = 9$$

إذن $A = 9$

18) نلاحظ أولا أن AC هي أكبر هذه المسافات

إذن نقارن AB+BC مع AC

لدينا

$$AB+BC = \sqrt{343}+\sqrt{63}$$

$$= \sqrt{49\times 7}+\sqrt{9\times 7}$$

$$= 7\sqrt{7}+3\sqrt{7}$$

$$= 10\sqrt{7}$$

و

$$AC = \sqrt{700} = \sqrt{100\times 7} = 10\sqrt{7}$$

إذن $AB+BC = AC$

و بالتالي النقط A و B و C مستقيمية

R

القــــــــــــــوى

I _ قوة عدد حقيقي :

1) – تعريف :

x عدد حقيقي و n عدد صحيح طبيعي .

* إذا كان $n>1$ فإن : $x^n = \underbrace{x \times x \times x \times x \times ...... \times x}_{n \text{ من العوامل}}^{\,n}$

* إذا كان $n=1$ فإن : $x^1 = x$.

* إذا كان $n=0$ و $x \neq 0$ فإن : $x^0 = 1$.

* إذا كان $n \neq 0$ و $x = 0$ فإن : $0^n = 0$.

* إذا كان $x \neq 0$ و n عدد نسبي فإن : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ و منه فإن : $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

*** مفردات :**

نعتبر القوة a^n .

-- a يسمى أساس القوة a^n.

-- n يسمى أس القوة a^n.

-- القوة a^{-n} تسمى مقلوب القوة a^n.

2) – أمثلة :

$$\left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = \left(\sqrt{5}\right)^2 \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

$$\left(\frac{2\sqrt{5}+1}{\sqrt{11}}\right)^0 = 1$$

$$\left(\sqrt{7}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\sqrt{7}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{1}{\left(\sqrt{7}\right)^2 \times \sqrt{7}} = \frac{1}{7\sqrt{7}}$$

$$\left(\frac{-11}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{-11}\right)^2 = \frac{49}{121}$$

R

II _ خصـــائص القـــوى :

1) – خصائص :

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين.
m و n عددان صحيحان طبيعيان.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}$$

2) – أمثلة :

$$\left(\sqrt{7}\right)^5 \times \left(\sqrt{7}\right)^{-2} = \left(\sqrt{7}\right)^{5+(-2)} = \left(\sqrt{7}\right)^3$$

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 \times 11^2 = \left(\sqrt{7} \times 11\right)^2 = \left(11\sqrt{7}\right)^2$$

$$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-2} = 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{\left(3\sqrt{3}\right)^2} = \left(\frac{2\cancel{\sqrt{3}}}{3\cancel{\sqrt{3}}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\left[\left(\frac{2}{-3}\right)^2\right]^{-1} = \left(\frac{2}{-3}\right)^{2\times(-1)} = \left(\frac{2}{-3}\right)^{-2} = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{-3}{2} \times \frac{-3}{2} = \frac{9}{4}$$

III _ قـــوى العدد 10 :

1) – خاصية :

n عدد صحيح طبيعي.

$$10^n = 1\underbrace{00000\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{n \text{ من الأصفار}} \quad \text{و} \quad 10^{-n} = \underbrace{0,00000\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{n \text{ من الأصفار}}1$$

R

2) – أمثلة :

$$10^5 = 100000 \quad ;; \quad 10^7 = 10000000$$
$$10^{-8} = 0,00000001 \quad ;; \quad 10^{-3} = 0,001$$

IV _ الكتابة العلمية :

1) – تعريف :

x عدد عشري نسبي .
الكتابة العلمية للعدد x هي :
$a.10^n$ إذا كان عددا موجبا بحيث : $1 \le a < 10$ و n عدد صحيح نسبي.
$-a.10^n$ إذا كان عددا سالبا بحيث : $1 \le a < 10$ و n عدد صحيح نسبي.

2) – أمثلة :

* الكتابة العلمية للعدد $0,000000059$:

لدينا :

$$\begin{aligned} 0,000000059 &= 59 10^{-8} \\ &= 5,9 \times 10 \times 10^{-8} \\ &= 5,9 \times 10^{1-8} \\ &= 5,9 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

إذن : الكتابة العلمية للعدد $0,000000059$ هي : $5,9 \times 10^{-7}$

* الكتابة العلمية للعدد $-125,742$:

لدينا :

$$125,742 = 1,25742 \times 10^2$$

إذن : الكتابة العلمية للعدد $-125,742$ هي : $-1,25742 \times 10^2$

نصوص التمارين

1) أحسب

2^3 ، $(-2)^5$ ، $(-5)^3$ ، 1^{75} ، $(-1)^{112}$ ، 0^{20}

2) أحسب

$A=(-2)^3\times(-3)^2$

$B=[2\times(-5)]^2$

$C=\left[(-1)^{17}\times(-2)^3\right]^2$

$D=\left[2\times(-3)^2\right]\times\left[4\times(-5)^2\right]^2$

3) أحسب

$A=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\times\left(\frac{-3}{4}\right)^{-1}$ $\qquad B=\left(\frac{-16\times3^2}{24\times(-3)}\right)^{-1}$

4) أحسب

$A=(-3)^5\times(-3)^7\times(-3)^{-11}$

$B=\frac{(-5)^2\times(25)^{-3}}{5^3\times(25)^{-2}}$

5) a و b عددان حقيقيان غير منعدمين
بسط باستعمال الأس الموجب

$A=\frac{a^2b^3}{a^3b^2}$ $\qquad B=\frac{\left(2a^2\times b^3\right)^3}{\left(3ab^4\right)^2}$

$C=\frac{a^2b^3}{(ab)^3}\div\left(\frac{a^2b^4}{a^3b^5}\right)^{-1}$

6) a و b عددان حقيقيان غير منعدمين
بسط باستعمال الأس الموجب

$A=(ab)^2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)$ $\qquad B=\frac{\left(ab^3\right)^2}{a^3b^2}\left[\frac{a}{b^4}+\frac{a^2}{b^3}\right]$

7) أحسب ما يلي وأعط النتيجة على شكل كتابة علمية

$A=2,3\times10^2+5,28\times10^{-1}$

$B=\left(53,27\times10^{-2}\right)\div20$

9) $\left(2-3(2-3)^{-1}\right)^{-1}$ يساوي :
(أذكر الإجابة الصحيحة)

5 ، -5 ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{-1}{5}$ ، $\frac{5}{3}$

10) أنشر وبسط : x عدد حقيقي

$A=(2x+3)^2$ $\qquad B=(3x-7)^2$

$C=\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$ $\qquad D=\left(2x^2+5\right)\left(2x^2-5\right)$

11) أتمم (x عدد حقيقي)

$x^2+\dots\dots+\dots\dots=(\dots\dots+4)^2$ ،

$(3x-\dots\dots)^2=\dots\dots\dots-12x+\dots\dots\dots$

$\dots\dots-\frac{25}{9}=(2x+\dots\dots)\left(\dots\dots-\frac{5}{3}\right)$ ،

$\dots\dots\dots+x+\frac{1}{4}=(\dots\dots\dots+\dots\dots\dots)^2$

12) x عدد حقيقي عمل

$A=4a^2-49$

$B=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$

$C=\left(x^2-4\right)+(x-2)(5x+3)$

$D=3(x-5)^2-2\left(x^2-25\right)$

13) n عدد صحيح طبيعي
أحسب (ناقش حسب زوجية n)

$A=(-1)^n+(-1)^{n+1}$

$B=3^2(-1)^n-(-2)^2(-1)^{n+1}$

14) ABC مثلث أطوال أضلاعه هي :

$BC=a=2^{n-1}+2^n+2^{n+1}$

و $AC=b=2^{n-2}+2^{n-1}+2^n$

و $AB=c=\sqrt{147\times2^{n-2}}$

حيث n عدد صحيح طبيعي أكبر من 2.

بين أن $a^2=b^2+c^2$

ماذا تستنتج بالنسبة لطبيعة المثلث ABC

R

$C = \dfrac{45\times10^{-2}}{12\times10^{-3}}$ **8)** x و y عددان حقيقيان غير منعدمين بحيث $x + y \neq 0$ $\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-1}$ يساوي : (أذكر الإجابة الصحيحة) $x+y$, $\dfrac{xy}{x+y}$, xy , $\dfrac{1}{xy}$, $\dfrac{x+y}{xy}$	**15)** بين أنه مهما كان العدد الصحيح الطبيعي k بحيث $k \geq 1$ فإن : $7^{3k+1}\times11^{3k+1}\times5^{3k}+539$ مضاعف للعدد 1078.

R

حــلــول الـتــمــاريــن حــول القــوى

(1

$2^3=8$ ، $(-2)^5=-32$ ، $(-5)^3=-125$

$1^{75}=1$ ، $(-1)^{112}=1$ ، $0^{20}=0$

(2

$$\mathbf{A}=(-2)^3\times(-3)^2=-8\times9=-72$$

$$\mathbf{B}=[2\times(-5)]^2=(-10)^2=100$$

$$\mathbf{C}=\left[(-1)^{17}\times(-2)^3\right]^2=[-1\times(-8)]^2=8^2=64$$

$$D=\left[2\times(-3)^2\right]\times\left[4\times(-5)^2\right]^2=\left(2\times(-3)^2\right)\times\left(4\times(-5)^2\right)^2=(2\times9)\times(4\times25)^2=18\times100^2=180000$$

(9

$$\left(2-3(2-3)^{-1}\right)^{-1}=\left[2-3(-1)^{-1}\right]^{-1}=\left[2-3\left(\frac{1}{-1}\right)\right]^{-1}=[2-3(-1)]^{-1}=[2+3]^{-1}=5^{-1}=\frac{1}{5}$$

إذن الإجابة الصحيحة هي $\frac{1}{5}$

(10

$$\mathbf{A}=(2\mathbf{x}+3)^2=(2\mathbf{x})^2+2\times2\mathbf{x}\times3+3^2=4\mathbf{x}^2+12\mathbf{x}+9$$

$$\mathbf{B}=(3\mathbf{x}-7)^2=(3\mathbf{x})^2-2\times3\mathbf{x}\times7+7^2=9\mathbf{x}^2-42\mathbf{x}+49$$

$$\mathbf{C}=\left(\mathbf{x}-\frac{2}{3}\right)\left(\mathbf{x}+\frac{2}{3}\right)=\mathbf{x}^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\mathbf{D}=(2\mathbf{x}^2+5)(2\mathbf{x}^2-5)=\left(2\mathbf{x}^2\right)^2-5^2$$

R

(3

$$A=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\times\left(\frac{-3}{4}\right)^{-1}=\frac{3}{2}\times\frac{-4}{3}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$B=\left(\frac{-16\times3^2}{24\times(-3)}\right)^{-1}=\frac{24\times(-3)}{-16\times3^2}=\frac{-8\times3\times3}{-8\times2\times3\times3}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

(4

$$A=(-3)^5\times(-3)^7\times(-3)^{-11}=(-3)^{5+7-11}=(-3)^1=-3$$

$$B=\frac{(-5)^2\times(25)^{-3}}{5^3\times(25)^{-2}}$$

لاحظ أن $=\dfrac{(-5)^2\times(5^2)^{-3}}{5^3\times(5^2)^{-2}}$

$(-5)^2=5^2$ و $25=5^2$

$$=\frac{5^2\times5^{-6}}{5^3\times5^{-4}}=\frac{5^{2-6}}{5^{3-4}}=\frac{5^{-4}}{5^{-1}}=5^{-4+1}=5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$$

(5

$$A=\frac{a^2b^3}{a^3b^2}=\frac{\mathbf{a^2b^2b}}{\mathbf{a^2ab^2}}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$$

$$B=\frac{(2a^2\times b^3)^3}{(3ab^4)^2}=\frac{2^3a^6b^9}{3^2a^2b^8}=\frac{8a^4b}{9}$$

$$=x^2-\frac{4}{9}\qquad\qquad =4x^4-25$$

(11

$$x^2+8x+16=(x+4)^2$$

$$(3x-2)^2=9x^2-12x+4$$

$$4x^2-\frac{25}{9}=\left(2x+\frac{5}{3}\right)\left(2x-\frac{5}{3}\right)$$

$$x^2+x+\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

(12

$$A=4a^2-49=(2a)^2-7^2=(2a+7)(2a-7)$$

$$B=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=x^2-2.\frac{1}{4}.x+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\begin{aligned}C&=(x^2-4)+(x-2)(5x+3)\\&=(x-2)(x+2)+(x-2)(5x+3)\\&=(x-2)[(x+2)+(5x+3)]\\&=(x-2)(6x+5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D&=3(x-5)^2-2(x^2-25)\\&=3(x-5)(x-5)-2(x-5)(x+5)\\&=(x-5)[3(x-5)-2(x+5)]\\&=(x-5)(3x-15-2x-10)\\&=(x-5)(x-25)\end{aligned}$$

(13 أ) إذا كان n زوجيا فإن : n+1 فردي، ومنه :

$$A=(-1)^n+(-1)^{n+1}=1+(-1)=0$$

$$B=3^2(-1)^n-(-2)^2(-1)^{n+1}=3^2\times1-(-2)^2(-1)=9+4=13$$

ب – إذا كان n فرديا فإن n+1 زوجي و منه :

R

$$C=\frac{a^2b^3}{(ab)^3}\div\left(\frac{a^2b^4}{a^3b^5}\right)^{-1}=\frac{a^2b^3}{(ab)^3}\div\frac{a^3b^5}{a^2b^4}$$
$$=\frac{a^2b^3}{a^3b^3}\times\frac{a^2b^4}{a^3b^5}=\frac{a^2b^3a^2b^4}{a^3b^3a^3b^5}=\frac{a^4b^7}{a^6b^8}=\frac{1}{a^2b}$$

6)

$$A=(ab)^2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)$$
$$=a^2b^2\left(\frac{a^4+b^4}{a^2b^2}\right)$$
$$=a^4+b^4$$
$$B=\frac{(ab^3)^2}{a^3b^2}\left[\frac{a}{b^4}+\frac{a^2}{b^3}\right]$$
$$=\frac{a^2b^6}{a^3b^2}\left(\frac{a+a^2b}{b^4}\right)$$
$$=\frac{a^2b^6(a+a^2b)}{a^3b^2b^4}$$
$$=\frac{a^2b^6a(1+ab)}{a^3b^6}$$
$$=\frac{a^3b^6(1+ab)}{a^3b^6}$$
$$=1+ab$$

7)

$$A=2{,}3\times10^2+5{,}28\times10^{-1}$$
$$=230+0{,}528$$
$$=230{,}528$$
$$=2{,}30528\times10^2$$

$$B=(53{,}27\times10^{-2})\div20$$
$$=0{,}5327\div20$$
$$=0{,}026635$$
$$=2{,}6635\times10^{-2}$$

$$C=\frac{45\times10^{-2}}{12\times10^{-3}}$$
$$=\frac{45}{12}\times10^{-2+3}$$
$$=\frac{15}{4}\times10^{1}$$
$$=3{,}75\times10$$

$$A=(-1)^n+(-1)^{n+1}$$
$$=-1+1$$
$$=0$$

$$B=3^2(-1)^n-(-2)^2(-1)^{n+1}$$
$$=3^2\times(-1)-(-2)^2(1)$$
$$=-9-4$$
$$=-13$$

ملاحظة : في كلتا الحالتين $A=0$ ونتيجتي B متقابلتين.

14) نبسط أولا a و b باستعمال التعميل

$$a=2^{n-1}+2^n+2^{n+1}$$
$$=2^{n-1}(1+2+2^2)$$
$$=2^{n-1}(7)$$
$$=7\times2^{n-1}$$
$$b=2^{n-2}+2^{n-1}+2^n$$
$$=2^{n-2}(1+2+2^2)$$
$$=2^{n-2}(7)$$
$$=7\times2^{n-2}$$
$$a^2=(7\times2^{n-1})^2$$
$$=7^2\times(2^{n-1})^2$$
$$=49\times2^{2n-2}$$
$$b^2=(7\times2^{n-2})^2$$
$$=7^2\times(2^{n-2})^2$$
$$=49\times2^{2n-4}$$
$$c^2=\left(\sqrt{147}\times2^{n-2}\right)^2$$
$$=147\times2^{2n-4}$$

و منه $b^2+c^2=49\times2^{2n-4}+147\times2^{2n-4}$
$$=(49+147)2^{2n-4}$$
$$=196\times2^{2n-4}$$
$$=49\times4\times2^{2n-4}$$
$$=49\times2^2\times2^{2n-4}$$
$$=49\times2^{2n-2}$$

لدينا $b^2+c^2=a^2$ إذن : المثلث ABC قائم الزاوية في A.

15)

$${}^{+1}.11^{3k+1}.5^{3k}+539=7\times7^{3k}.11\times11^{3k}.5^{3k}+7\times11\times7$$

R

8) $\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^{-1}$ $=\left(\frac{y+x}{xy}\right)^{-1}$ $=\left(\frac{x+y}{xy}\right)^{-1}$ $=\frac{xy}{x+y}$ إذن الإجابة الصحيحة هي $\frac{xy}{x+y}$	$=7\times11\times\left(7^{3k}.11^{3k}.5^{3k}+7\right)$ $=77\left(7\times7^{3k-1}.11^{3k}.5^{3k}+7\right)$ $=77\times7\left(7^{3k-1}.11^{3k}.5^{3k}+1\right)$ $=539\left(7^{3k-1}.11^{3k}.5^{3k}+1\right)$ وبملاحظة أن $7^{3k-1}.11^{3k}.5^{3k}$ عدد فردي (جداء أعداد فردية) فإن $7^{3k-1}.11^{3k}.5^{3k}+1$ عدد زوجي أي $7^{3k+1}.11^{3k+1}.5^{3k}+539=539(2k')$ ($k'\in Z$) $=1078k'$ إذن $7^{3k+1}.11^{3k+1}.5^{3k}+539$ مضاعف للعدد 1078

R

الترتيــب و العمليـــــــات

I _ مقارنة عددين حقيقيين :

1) – قاعدة ① :

a و b عددان حقيقيان .
إذا كان $a-b\leq 0$ فإن $a\leq b$
إذا كان $a-b\geq 0$ فإن $a\geq b$

2) – أمثلة :

1) -- لنقارن العددين : $2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-5$

لدينا :

$$\left(2\sqrt{3}-4\right)-\left(\sqrt{3}-5\right)=2\sqrt{2}-4-\sqrt{3}+5$$
$$=2\sqrt{3}-\sqrt{3}+5-4$$
$$=\sqrt{3}+1$$

و بما أن : $\sqrt{3}+1\geq 0$ فإن : $\left(2\sqrt{3}-4\right)-\left(\sqrt{3}-5\right)\geq 0$

و منه فإن : $2\sqrt{3}-4\geq\sqrt{3}-5$

2) -- لنقارن العددين : x و y بحيث : $x=y-3$.

لدينا : $x-y=-3$

و بما أن : $-3\leq 0$ فإن : $x-y\leq 0$.

و منه فإن : $x\leq y$

II _ الترتيب و العمليات :

1) – الترتيب و الجمع :

أ) -- خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .
إذا كان $a\leq b$ فإن
$a+c\leq b+c$

R

* مثال :

نعتبر x عددا حقيقيا بحيث : $x<3$.
لنقارن العددين -2 و $x-5$.

لدينا : $x<3$

يعني أن :

$$x+(-5)<3+(-5)$$
$$x-5<3-5$$

و بالتالي فإن : $x-5<-2$

ب) -- خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

إذا كان و $\left.\begin{array}{l} a\le b \\ c\le d \end{array}\right\}$ فإن $a+c\le b+d$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x<3$ و $2>y$.
لنبين أن : $x+y<5$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l} x<3 \\ 2>y \end{array}\right\}$ يعني أن : $\left.\begin{array}{l} x<3 \\ y<2 \end{array}\right\}$

إذن : $x+y<2+3$

و باتالي فإن : $x+y<5$

2) – الترتيب و الضرب :

أ) -- خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .
إذا كان $a\le b$ و $c>0$ فإن $a\times c\le b\times c$
إذا كان $a\le b$ و $c<0$ فإن $a\times c\ge b\times c$
إذا كان $a\times c\le b\times c$ و $c>0$ فإن $a\le b$
إذا كان $a\times c\ge b\times c$ و $c<0$ فإن $a\le b$

* مثال :

لدينا : $11\le 27$ يعني أن $11\times 5\le 27\times 5$
$11\le 27$ يعني أن $11\times(-4)\ge 27\times(-4)$

R

ب) -- خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

إذا كان و $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array}\right\}$ فإن $a \times c \leq b \times d$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان موجبان بحيث : $x < \sqrt{3}$ و $y < 2\sqrt{6}$.

لنبين أن : $xy < 6\sqrt{3}$.

لدينا :

$\left.\begin{array}{l} x < \sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{6} \end{array}\right\}$ و يعني أن :

$$x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$$
$$xy < 2\sqrt{3 \times 6}$$
$$xy < 2\sqrt{18}$$
$$xy < 2\sqrt{9 \times 2}$$
$$xy < 2\sqrt{3^2 \times 2}$$
$$xy < 2 \times 3\sqrt{2}$$

وبالتالي فإن : $xy < 6\sqrt{2}$

3) – الترتيب و المقلوب :

أ) -- خاصية :

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا .

إذا كان $a \leq b$ فإن $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

إذا كان $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ فإن $a \leq b$

ب) -- مثال :

لدينا : $7 \leq 13$ يعني أن $\frac{1}{7} \geq \frac{1}{13}$

$11 \geq 5$ يعني أن $\frac{1}{11} \leq \frac{1}{5}$

R

4) – الترتيب و المربع :

أ) -- خاصية ① :

a و b عددان حقيقيان موجبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$
إذا كان $a^2 \leq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

$5 \leq 11$ يعني أن $5^2 \leq 11^2$ أي $25 \leq 121$.

ب) -- خاصية ② :

a و b عددان حقيقيان سالبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \geq b^2$
إذا كان $a^2 \geq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

$-7 \leq -2$ يعني أن $(-7)^2 \geq (-4)^2$ أي $49 \geq 16$

5) – الترتيب و الجذر المربع :

أ) -- خاصية :

a و b عددان حقيقيان موجبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
إذا كان $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ فإن $a \leq b$

* أمثلة :

1) – لنقارن العددين : $\sqrt{10}$ و $3\sqrt{3}$.

لدينا :

و $\left.\begin{array}{l} \sqrt{10}^2 = 10 \\ (3\sqrt{3})^2 = 27 \end{array}\right\}$ إذن $\sqrt{10}^2 \leq (3\sqrt{3})^2$ و منه فإن $\sqrt{10} \leq 3\sqrt{3}$

2) – لنقارن العددين : $-\sqrt{6}$ و $-3\sqrt{2}$.

لدينا :

و $\left.\begin{array}{l} \sqrt{6}^2 = 6 \\ (3\sqrt{2})^2 = 18 \end{array}\right\}$ إذن $\sqrt{6}^2 \leq (3\sqrt{2})^2$ و منه فإن $\sqrt{6} \leq 3\sqrt{2}$. و بالتالي فإن : $-\sqrt{6} \geq -3\sqrt{2}$

R

III _ التأطيــر :

1) – تأطيــر مجموع عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :
$x \leq a \leq y$ و $z \leq b \leq t$
$x + z \leq a + b \leq y + t$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 8$ و $-4 \leq y \leq 2$

لنؤطر $x + y$.

لدينا :

$$3 + (-4) \leq x + y \leq 8 + 2$$

إذن : $-1 \leq x + y \leq 10$

2) – تأطيــر مقابل عدد حقيقي :

a عدد حقيقي بحيث : $x \leq a \leq y$
سيكون لدينا : $-y \leq -a \leq -x$

3) – تأطيــر فرق عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :
$x \leq a \leq y$ و $z \leq b \leq t$
$x - t \leq a - b \leq y - z$

* ملاحظة هامة : لتأطير $a - b$ ، نضع : $a - b = a + (-b)$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 8$ و $-4 \leq y \leq 2$

لنؤطر $x - y$.

لدينا :

$$3 \leq x \leq 8 \quad \text{و} \quad -2 \leq -y \leq 4$$

إذن : $3 - 2 \leq x + (-y) \leq 8 + 4$

و منه فإن : $1 \leq x - y \leq 12$

R

4) – تأطيـر جداء عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة بحيث :

$x \le a \le y$ و $z \le b \le t$

$$x \times z \le a \times b \le y \times t$$

* مثال 1 :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 7$ و $1 \le y \le 3$

لنؤطر $x \times y$.

لدينا :

$$3 \times 1 \le x \times y \le 7 \times 3$$

إذن : $3 \le x \times y \le 21$

* مثال 2 :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $-5 \le x \le -2$ و $3 \le y \le 6$

لنؤطر $x \times y$.

لدينا :

$$2 \le -x \le 5$$

إذن :

$2 \times 3 \le (-x) \times y \le 5 \times 6$ أي $6 \le -xy \le 30$

و منه فإن : $-30 \le xy \le -6$.

5) – تأطيـر مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

a و x و y أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $x \le a \le y$

سيكون لدينا : $\frac{1}{y} \le \frac{1}{a} \le \frac{1}{x}$

6) – تأطيـر خارج عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث : $b \neq 0$ و $z \neq 0$ و $t \neq 0$

و $x \le a \le y$ و $z \le b \le t$

سيكون لدينا $\frac{x}{t} \le \frac{a}{b} \le \frac{y}{z}$

* ملاحظة هامة : لتأطير $\frac{a}{b}$ ، نضع : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

R

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 7$ و $5 \le y \le 9$

لنؤطر $\frac{x}{y}$.

لدينا :

$$\frac{1}{9} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{5}$$

إذن :

$$3 \times \frac{1}{9} \le x \times \frac{1}{y} \le 7 \times \frac{1}{5} \quad \text{أي} \quad \frac{3}{9} \le \frac{x}{y} \le \frac{7}{5}$$

و بالتالي فإن : $\frac{1}{3} \le \frac{x}{y} \le \frac{7}{5}$

* تمرين تطبيقي :

a و b و c أعداد حقيقية بحيث :

$6 \le a \le 8$ و $-4 \le b \le -2$ و $-3 \le c \le 5$

أطـر : a^2 و b^2 و $a+2b-4c$ و $\frac{a+b}{b^2}$

الحـل :

1) – تأطير a^2 .

لدينا : $6^2 \le a^2 \le 8^2$ و منه فإن : $36 \le a^2 \le 64$

2) – تأطير b^2 .

لدينا : $(-2)^2 \le b^2 \le (-4)^2$ و منه فإن : $4 \le b^2 \le 16$

3) – تأطير $a+2b-4c$.

لدينا : $-8 \le 2b \le -4$

و $-4 \times (-3) \le -4c \le -4 \times 5$ أي $12 \le -4c \le 20$

إذن : $6+(-8)+12 \le a+2b-4c \le 8+(-4)+20$

و منه فإن : $10 \le a+2b-4c \le 24$

4) – تأطير $\frac{a+b}{b^2}$.

لدينا : $6+(-4) \le a+b \le 8+(-2)$ أي $2 \le a+b \le 6$

و $\frac{1}{16} \le \frac{1}{b^2} \le \frac{1}{4}$

إذن : $2 \times \frac{1}{16} \le (a+b) \times \frac{1}{b^2} \le 6 \times \frac{1}{4}$ أي $\frac{2}{16} \le \frac{a+b}{b^2} \le \frac{6}{4}$

و بالتالي فإن : $\frac{1}{8} \le \frac{a+b}{b^2} \le \frac{3}{2}$

R

نصوص التمارين

1) بدون استعمال المحسبة قارن

أ - $3\sqrt{2}$ و $2\sqrt{3}$ ب - $-10\sqrt{2}$ و $-9\sqrt{3}$

ج - $2+2\sqrt{2}$ و $2+\sqrt{10}$ د - $5-\sqrt{65}$ و $5-3\sqrt{7}$

هـ - $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ و $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

2) قارن باستعمال المحسبة

أ - $6-4\sqrt{2}$ و $3\sqrt{5}-6$

ب - $7-4\sqrt{3}$ و $5\sqrt{2}-7$

3) نعتبر العددين $A=2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$ و $B=\sqrt{39-12\sqrt{10}}$

أ – بين أن A≥0

ب – قارن A^2 و B^2 ثم استنتج مقارنة A و B

4) x و y عددان حقيقيان بحيث $2\leq x\leq 4$ و $-1\leq y\leq 3$

أعط تأطيرا للعددين $x+y$ و $x-y$

5) x و y عددان حقيقيان بحيث $3\leq x\leq 4$ و $-4\leq y\leq -2$

أعط تأطيرا للأعداد $2x-3y$ و $\frac{x}{y}$ و x^2+y^2

6) a و b عددان حقيقيان بحيث a>0 و b>0

بين أن $\frac{4a}{a+3b}\leq\frac{a+3b}{3b}$

7) a و b عددان حقيقيان بحيث $a\in[1,2]$ و $b\in[-6,-3]$ نضع $A=a^2-b^2$

أ – أطر a^2 و b^2 ثم استنتج تأطيرا للعدد A

ب – أطر $a+b$ و $a-b$ ثم استنتج تأطيرا للعدد A . ماذا تستنتج ؟

8) نضع $A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times\frac{9}{10}$ و $B=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{9}$

قارن A و B بدون حساب الجذائين

9) a و b عددان حقيقيان بحيث 0<a<b

أ – بين $a<\sqrt{ab}<b$

ب – نضع $A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times.........\times\frac{99}{100}$ و $B=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times.........\times\frac{98}{99}$

بين أن $A<B$ ثم استنتج أن $A<\frac{1}{10}<B$

R

حلول التمارين

1) أ – العددان موجبان نقارن مربعيهما:

$(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3$ $\quad$ $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2$

$= 12$ $\quad$ $= 18$

$12 \leq 18$ إذن $2\sqrt{3} \leq 3\sqrt{2}$

ب – نقارن أولا : $9\sqrt{3}$ و $10\sqrt{2}$

$(9\sqrt{3})^2 = 81 \times 3$ $\quad$ $(10\sqrt{2})^2 = 100 \times 2$

$=243$ $\quad$ $=200$

$200<243$ **و** منه $10\sqrt{2} < 9\sqrt{3}$

و بالتالي $-9\sqrt{3} < -10\sqrt{2}$

ج - نقارن أولا $\sqrt{10}$ و $2\sqrt{2}$

$(\sqrt{10})^2 = 10$ $\quad$ $(2\sqrt{2})^2 = 4 \times 2$

$=8$

إذن $2\sqrt{2} < \sqrt{10}$

و بالتالي $2 + 2\sqrt{2} < 2 + \sqrt{10}$

د – نقارن أولا $3\sqrt{7}$ و $\sqrt{65}$

$(3\sqrt{7})^2 = 9 \times 7$ $\quad$ $(\sqrt{65})^2 = 65$

$= 63$

إذن $3\sqrt{7} < \sqrt{65}$

ومنه $-\sqrt{65} < -3\sqrt{7}$

و بالتالي $5 - \sqrt{65} < 5 - 3\sqrt{7}$

هـ - نحذف أولا الجذر المربع من المقام

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 3\sqrt{3}-3\sqrt{2}$$

ندرس إشارة الفرق

$$(3\sqrt{3}-3\sqrt{2})-(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 3\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$= 2\sqrt{3}-4\sqrt{2}$$

إذن $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

2) باستعمال المحسبة

أ – نضغط على 5 ثم $\sqrt{\ }$ ثم نضرب في 3

و أخيرا نطرح 6 (استعمال -)

و نحصل على $3\sqrt{5} - 6 \approx 0{,}70$

نضغط على 2 ثم $\sqrt{\ }$ ثم نضرب في 4 و أخيرا نطرح 6

نعتبر مقابل النتيجة و نحصل على $6 - 4\sqrt{2} \approx 0{,}34$

إذن $6 - 4\sqrt{2} < 3\sqrt{5} - 6$

ب – بنفس الطريقة نحصل على

$7 - 4\sqrt{3} \approx 0{,}07179$ و $5\sqrt{2} - 7 \approx 0{,}07106$

إذن $5\sqrt{2} - 7 < 7 - 4\sqrt{3}$

3) أ- لدينا $(2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5$ $\quad$ $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2$

$= 20$ $\quad$ $= 18$

إذن $2\sqrt{5} \geq 3\sqrt{2}$

و منه $2\sqrt{5} - 3\sqrt{2} \geq 0$

أي $A \geq 0$

لدينا $A^2 = (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2$ و $B^2 = \left(\sqrt{39 - 12\sqrt{10}}\right)^2$

$= 20 - 12\sqrt{10} + 18$

$= 39 - 12\sqrt{10}$

$= 38 - 12\sqrt{10}$

و لدينا 39>38

و منه $39 - 12\sqrt{10} > 38 - 12\sqrt{10}$

أي $B^2 \geq A^2$ و A و B موجبين

إذن B≥A .

4) $2 \leq x \leq 4$ و $-1 \leq y \leq 3$

إذن $2 - 1 \leq x+y \leq 4+3$ و $-3 \leq -y \leq 1$

أي $1 \leq x+y \leq 7$

لدينا $(4\sqrt{2})^2 = 16\times 2$
$= 32$
$(2\sqrt{3})^2 = 4\times 3$
$= 12$

إذن $2\sqrt{3} < 4\sqrt{2}$ أي $2\sqrt{3}-3\sqrt{2} < 0$

و بالتالي $3\sqrt{3}-3\sqrt{2} < \sqrt{3}+\sqrt{2}$

ومنه $2-3\le x-y\le 1+4$

أي $-1\le x-y\le 5$

5) $3\le x\le 4$ و $-4\le y\le -2$

لنؤطر 2x-3y (نأطر 2x و -3y)

$6\le 2x\le 8$

$6\le -3y\le 12$

إذن $6+6\le 2x-3y\le 8+12$

أي $12\le 2x-3y\le 20$

لنؤطر $\frac{x}{y}$ (نأطر $\frac{1}{y}$ ثم $-\frac{1}{y}$)

$3\le x\le 4$

$-\frac{1}{2}\le\frac{1}{y}\le-\frac{1}{4}$ إذن $\frac{1}{4}\le-\frac{1}{y}\le\frac{1}{2}$

إذن $3\times\frac{1}{4}\le x\times(-\frac{1}{y})\le 4\times\frac{1}{2}$

أي $\frac{3}{4}\le-\frac{x}{y}\le 2$

و بالتالي $-2\le\frac{x}{y}\le-\frac{3}{4}$

لنأطر x^2+y^2 (نأطر x^2 و y^2)

$3\le x\le 4$ ؛ $-4\le y\le -2$

إذن $3^2\le x^2\le 4^2$ ؛ إذن $2\le -y\le 4$

أي (1) $9\le x^2\le 16$ ؛ و منه $2^2\le(-y)^2\le 4^2$

أي (2) $4\le y^2\le 16$

ومن (1) و (2) $9+4\le x^2+y^2\le 16+16$

أي $13\le x^2+y^2\le 32$

6) a > 0 و b > 0

نبين أن : $\frac{a+3b}{3b}\ge\frac{4a}{a+3b}$

ندرس إشارة الفرق $\frac{a+3b}{3b}-\frac{4a}{a+3b}$

$$\frac{a+3b}{3b}-\frac{4a}{a+3b}=\frac{(a+3b)^2-3b\times 4a}{3b(a+3b)}$$
$$=\frac{a^2+9b^2+6ab-12ab}{3b(a+3b)}$$

7) أ - $a\in[1,2]$ يعني أن $1\le a\le 2$

و بالتالي $1^2\le a^2\le 2^2$

أي $1\le a^2\le 4$ (1)

$b\in[-6,-3]$ يعني أن $-6\le b\le -3$

إذن $3\le -b\le 6$

و منه $3^2\le(-b)^2\le 6^2$

أي $9\le b^2\le 36$

أي $-36\le -b^2\le -9$ (2)

من (1) و (2) : $1-36\le a^2-b^2\le 4-9$

أي $-35\le A\le -5$ **(أ)**

ب - $1\le a\le 2$

$-6\le b\le -3$

إذن $1-6\le a+b\le 2-3$

أي $-5\le a+b\le -1$

وكذلك $3\le -b\le 6$

إذن $1+3\le a-b\le 2+6$

أي $4\le a-b\le 8$

لدينا $-5\le a+b\le -1$

إذن $1\le -(a+b)\le 5$

و لدينا $4\le a-b\le 8$

أي $1\times 4\le -(a+b)(a-b)\le 5\times 8$

أي $4\le -(a^2-b^2)\le 40$

أي $-40\le a^2-b^2\le -4$

و بالتالي $-40\le A\le -4$ (ب)

نستنتج أن التأطير (أ) أدق من التأطير (ب)

لأن دقة التأطير (أ) تساوي $-5-(-35)=30$

ودقة التأطير (ب) تساوي $-4-(-40)=36$ و $30<36$

8) لدينا $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$ (نتحقق من هذه المتفاوتات)

$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$

$\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$

$\frac{7}{8}<\frac{8}{9}$

R

$$= \frac{a^2+9b^2-6ab}{3b(a+3b)}$$

$$= \frac{(a-3b)^2}{3b(a+3b)}$$

لدينا $(a-3b)^2 \geq 0$ و $3b(a+3b)>0$

إذن $\frac{a+3b}{3b} - \frac{4a}{a+3b} \geq 0$

و بالتالي $\frac{a+3b}{3b} \geq \frac{4a}{a+3b}$

$$\frac{9}{10} < 1$$

نضرب المتفاوتات السابقة طرفا بطرف

نحصل على $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times\frac{9}{10} < \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{9}$

أي A<B

9) أ – لدينا 0<a<b ، إذن: $0<a^2<ab$ و $0<ab<b^2$

و منه $0 < a < \sqrt{ab}$ و $0 < \sqrt{ab} < b$

إذن : $a<\sqrt{ab}<b$

ب – مثل 8 لدينا $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$

$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

. < .

. < .

$$\frac{97}{98} < \frac{98}{99}$$

$$\frac{99}{100} < 1$$

وبضرب المتفاوتات طرفا بطرف نحصل على

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\dots\dots\dots\dots\times\frac{99}{100} < \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\dots\dots\dots\dots\times\frac{98}{99}$$

أي A<B

لكي نبين أن : $A<\frac{1}{10}<B$ نحسب أولا $A\times B$

$$A\times B = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\dots\dots\times\frac{99}{100}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\dots\dots\dots\times\frac{98}{99}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\dots\dots\dots\dots\dots\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}$$

$$= \frac{1}{100}$$

لدينا 0<A<B

إذن حسب أ-

$A<\sqrt{AB}<B$

أي $A<\sqrt{\frac{1}{100}}<B$

أي $A<\frac{1}{10}<B$

R

المعادلات و المتراجحات

I _ المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

1) – تعريف :

a و b و x أعداد حقيقية .
كل متساوية على شكـل : $ax+b=0$
تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x .
العدد الحقيقي x الذي يحقق إحدى المعادلتين

1) – مثال :

كل من الكتابات :

$$\sqrt{3}.x-\sqrt{2}=5 \quad ;; \quad 2x+11=0$$

$$\frac{1}{2}x-5=-\frac{2}{3} \quad ;; \quad -7-5x=1$$

تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد و هو x .

2) – حل المعادلة $ax+b=0$:

* / بصفة عامة :

أ) -- إذا كان : $a\neq 0$ و $b\neq 0$ فإن : للمعادلة $ax+b=0$ حــلا وحيدا هو $\frac{-b}{a}$.

ب) -- إذا كان : $a\neq 0$ و $b=0$ فإن : للمعادلة $ax+b=0$ حــلا وحيدا هو العدد 0 .

ج) -- إذا كان : $a=0$ و $b=0$ فإن : للمعادلة $ax+b=0$ عدة حلول .

د) -- إذا كان : $a=0$ و $b\neq 0$ فإن : المعادلة $ax+b=0$ ليس لها حــلا .

* / تقنيات :

عند إزالة عدد من إحدى طرفي معادلة نضيف مقابله إلى الطرف

* / أمثلة :

1) – حــل المعادلة : $2x+3=0$.

المعادلة $2x+3=0$ تكافئ على التوالي :

$$2x=-3$$

$$x=\frac{-3}{2}$$

إذن العدد $\frac{-3}{2}$ هو حل المعادلة $2x+3=0$.

R

2) – حــل المعادلة : $4x-5 = 4x-5$.

المعادلة $4x-5 = 4x-5$ تكافئ على التوالي

$$4x-4x = 5-5$$

$$0x = 0$$

إذن جميع الأعداد الحقيقية حل للمعادلة $4x-5 = 11$.

3) – حــل المعادلة : $x\sqrt{3}-7=0$.

المعادلة $x\sqrt{3}-7=0$ تكافئ على التوالي :

$$x\sqrt{3}=7$$

$$x=\frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$x=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

إذن العدد $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ هو حــل المعادلة $x\sqrt{3}-7=0$

4) – حــل المعادلة : $5x+7=-2+5x$.

المعادلة $5x+7=-2+3x$ تكافئ على التوالي :

$$5x-5x=-2-7$$

$$0x=-9$$

إذن المعادلة $5x+7=-2+3x$ ليس لها حــل .

5) – حــل المعادلة : $2x+2=3x+2$.

المعادلة $2x+2=3x+2$ تكافئ على التوالي :

$$2x-3x=2-2$$

$$2x-3x=0$$

$$-x=0$$

$$x=0$$

إذن العدد 0 هو حــل المعادلة $5x+7=-2+3x$

3) – حل المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0$:

* / بصفة عامة :

a و b عددان حقيقيان معلومان .
حلول المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0$ هي حلول المعادلتين :
$(ax+b)=0$ و $(cx+d)=0$

* / مثال :

حل المعادلة : $(2x+4)(-3x-5)=0$.

المعادلة $(2x+4)(-3x-5)=0$ تكافئ على التوالي :

$2x+4=0$ أو $-3x-5=0$

$$2x=-4 \qquad -3x=5$$

$$x=\frac{-4}{2} \qquad x=\frac{5}{-3}$$

$$x=-2$$

إذن للمعادلة حلين هما : -2 و $\frac{5}{3}$

R

4) – حل المعادلة $x^2 = a$:

* / بصفة عامة :

* / إذا كان : $a > 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ تقبل حـلـين هما : $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$.
* / إذا كان : $a = 0$ فإن لمعادلة $x^2 = a$ تقبل حــلا وحيدا هو العدد 0 .
* / إذا كان : $a < 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ لا تقبل أي حـل .

* / أمثلة :

1) – حـل المعادلة : $x^2 = 5$.

سيكون لدينا : $x = \sqrt{5}$ أو $x = -\sqrt{5}$

إذن المعادلة $x^2 = 5$ تقبل حلين هما : $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$.

2) – حـل المعادلة : $2x^2 = -6$.

المعادلة $2x^2 = -6$ تكافئ على التوالي :

$$x^2 = -\frac{6}{2}$$

$$x^2 = -3$$

إذن المعادلة $2x^2 = -6$ ليس لها حـل .

3) – حـل المعادلة : $2x^2 + 5 = x^2 + 5$.

المعادلة $2x^2 + 5 = x^2 + 5$ تكافئ على التوالي :

$$2x^2 - x^2 = 5 - 5$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

إذن للمعادلة $2x^2 + 5 = x^2 + 5$ حــلا وحيدا هو العدد 0 .

5) – المعادلات و النشـر :

1) – حـل المعادلة : $2(3x+2) - 5(x-1) = 0$.

المعادلة $2(3x+2) - 5(x-1) = 0$ تكافئ على التوالي :

$$6x + 4 - 5x + 5 = 0$$

$$6x - 5x = -4 - 5$$

$$x = -9$$

إذن العدد -9 هو حـل المعادلة $2(3x+2) - 5(x-1) = 0$.

R

2) – حـل المعادلة : $-3(2x+1)=x+2(-x-2)$.

المعادلة $-3(2x+1)=x+2(-x-2)$ تكافئ على التوالي :

$$-6x-3=x-2x-4$$

$$-6x-x+2x=-4+3$$

$$-5x=-1$$

$$x=\frac{-1}{-5}$$

$$x=\frac{1}{5}$$

إذن حـلاً هذه المعاادلة هو العدد $\frac{1}{5}$.

6) – المعادلات و التعميـل :

1) – حـل المعادلة : $(x+2)(3x-1)+(x+2)(-4x+5)=0$.

المعادلة $(x+2)(3x-1)+(x+2)(-4x+5)=0$ تكافئ على التوالي :

$$(x+2)\left[(3x-1)+(-4x+5)\right]=0$$

$$(x+2)(3x-1-4x+5)=0$$

$$(x+2)(-x+4)=0$$

$$x+2=0 \quad \text{أو} \quad -x+4=0$$

$$x=-2 \quad \text{أو} \quad -x=-4$$

$$x=4$$

إذن المعادلة $(x+2)(3x-1)+(x+2)(-4x+5)=0$ تقبل حلين هما : -2 و -4 .

2) – حـل المعادلة : $25x^2+30x+9=0$.

المعادلة $25x^2+30x+9=0$ تكافئ على التوالي :

$$(5x)^2+30x+3^2=0$$

$$(5x+3)^2=0$$

$$5x+3=0$$

$$5x=-3$$

$$x=\frac{-3}{5}$$

إذن حـل هذه المعادلة هو العدد $\frac{-3}{5}$.

R

II _ حـل المسائل :

1) – قاعدة :

لحـل مسألة نتبع الخطوات الآتية :
1) – اختيار المجهول .
2) – صياغة المعادلة .
3) – حـل المعادلة .
4) – التحقق من الحل .
5) – الرجوع إلى المسألة .

2) – مثال :

حصان يحمل على ظهره 5 أكياس و 20 kg من القمح و 3 أكيسان و 10 kg من الذرة، و جمل يحمل 3 أكياس و 80 kg من القمح و كيسان (2) و 50 kg من الشعير .
فأجهد ذلك على الجمل فقال له الحصان : كيف تشعر بالتعب و نحن نحمل نفس الوزن ؟
إذن ، إذا علمت أن الكيس الواحد من الشعير يزيد عن الكيس الواحد من القمح ب 10 kg، فما هو وزن الكيس الواحد من كـل نوع ؟

الحـل :

1) – اختيار المجهول :

ليكن x وزن الكيس الواحد من القمح .

2) – صياغة المعادلة :

بما أن x هو وزن الكيس الواحد من القمح فإن $(x+10)$ هو وزن الكيس الواحد من الشعير .
إذن : -- الوزن الذي يحمله الحصان هو : $(5x+20)+[3(x+10)+10]$.
-- الوزن الذي يحمله الجمل هو : $(3x+80)+[2(x+10)+50]$.
و بما أن الحصان و الجمل يحملان نفس الوزن فستكون لدينا المعادلة الآتية :

$$(5x+20)+[3(x+10)+10] = (3x+80)+[2(x+10)+50]$$

3) – حـل المعادلة :

المعادلة $(5x+20)+[3(x+10)+10] = (3x+80)+[2(x+10)+50]$ تكافئ على التوالي :

$$3x+80+2x+20+50 = 5x+20+3x+30+10$$
$$3x+2x-5x-3x = 20+30+10-80-20-50$$
$$-3x = -90$$
$$x = \frac{-90}{-3}$$
$$x = 30$$

R

4) – التحقق من الحـل :

$$\begin{aligned}(5x+20)+\left[3(x+10)+10\right] &= 5\times 30+20+3(30+10)+10\\ &=150+20+3\times 40+10\\ &=150+20+120+10\\ &=300\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3x+80)+\left[2(x+10)+50\right] &= 3\times 30+80+2(30+10)+50\\ &=90+80+2\times 40+50\\ &=90+80+80+50\\ &=300\end{aligned}$$

إذن العدد 30 هو حـل المعادلة $(5x+20)+\left[3(x+10)+10\right] = (3x+80)+\left[2(x+10)+50\right]$

5) – الرجوع إلى المسألة :

وزن الكيس الواحد من القمح هو : 30 kg .

وزن الكيس الواحد من الذرى هو : 40 kg .

II _ المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحـد :

1) – تعريف :

a و b و x أعداد حقيقية .
كل متفاوتة على شكـل : $ax+b>0$ أو $ax+b\geq 0$ أو $ax+b<0$ أو $ax+b\leq 0$
تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x.

2) – أمثـلة :

المتفاوتات : $2x+5<0$ و $\sqrt{2}.x-5>0$ و $\frac{1}{2}x-11\leq 0$ و $3x+3\geq 0$

تسمى متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x .

* / ملاحظة هامة :
الأعداد الحقيقية التي تحقق متراجحة تسمى حلول هذه المتراجحة .

3) – حـل متراجحة :

1) – حـل المتراجحة : $3x+2<0$.
المتراجحة $3x+2<0$ تكافئ على التوالي :

$$3x<-2$$

$$x<\frac{-2}{3}$$

الأعداد الحقيقية الأصغر قطعا من $\frac{-2}{3}$ هي حـلول المتراجحة $3x+2<0$.

R

2) – حـل المتراجحة : $-x+4\le 2x-2$.

المتراجحة $-x+4\le 2x-2$ تكافئ على التوالي :

$$-x-2x\le -2-4$$

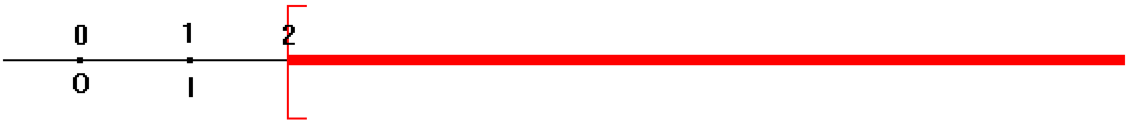
$$-3x\le -6$$

$$x\ge \frac{-6}{-3}$$

$$x\ge 2$$

الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 2 هي حـلول المتراجحة $-3x+4\le 2x-2$.

* / تمثيل الحــلول على مستقيم مدرج :



R

سلسلة تمارين حول المعادلات و المتراجحات

التمرين الأول

حل المعادلات التالية

$(1)\ 5x+3=0$

$(2)\ -x+4=3x-2$

$(3)\ 0=5-8(-2x+4)$

$(4)\ \frac{3}{2}=\frac{3}{4}x$

$(5)\ \frac{x+3}{7}=x$

$(6)\ -15+3(x-2)=-2(3x-1)-7(3x+1)$

$(7)\ \frac{-3x+2}{7}-\frac{3}{4}x=-\frac{2x-21}{5}$

$(8)\ \left(2x-\frac{1}{3}\right)(3x+1)=0$

$(9)\ (x-1)^2-7=0$

$(10)\ (2x+3)(\sqrt{2}+2x)=0$

$(11)\ \frac{x}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}=2$

التمرين الثاني

حل المتراجحات التالية

$(1)\ 5x+3\leq 5$

$(2)\ -x+4\prec 3x-8$

$(3)\ +3\geq 5-8(-2x+4)$

$(4)\ \frac{5}{2}\succ\frac{7}{4}x$

$(5)\ \frac{x+3}{7}\geq x+1$

$(6)\ -10+3(x+8)\leq -2(x-1)-3(3x+1)$

$(7)\ \frac{-x+2}{7}-\frac{3}{4}x\leq -\frac{2x-1}{5}$

$(8)\ \sqrt{3}(x+3)\leq 2x-\sqrt{5}$

$(9)\ \begin{cases}3x-2\geq 0\\ -x+5\geq 0\end{cases}$

$(10)\ \begin{cases}-2x-9\prec 3x+6\\ 10x-3\leq 2x+13\end{cases}$

التمرين الثالث

اوجد عددان حقيقيان مجموعهما يساوي 115 وان أحدهما يكبر الاخر ب 15

التمرين الرابع

حوضا يملأه الصنبور 1 في 6 ساعات ويملأه الصنبور 2 في 12 ساعة
ماهي المدة الزمنية التي سيملأ فيه الحوض اذا شغل الصنبوران في ان واحد

التمرين الخامس

المسافة بين مدينتين أ و ب تساوي 182كم
غادرت سيارة A المدينة أ نحو ب بسرعة 36km/h على الساعة 11:00 وفي نفس الوقت غادرت سيارة B مدينة ب نحو أ بسرعة 56km/h ، في أي ساعة وقي أي مكان ستلتقي السيارتان ,.؟

التمرين السادس

يؤدي احتراق الكامل للبوتان C_4H_{10} الى ثنائي اكسيد الكربون CO_2 والماء H_2O

$$aC_4H_{10}+bO_2\rightarrow cH_2O+dCO_2$$

علما أن عدد الذرات ينحفظ
احسب المعاملات a و b و c و d

التمرين السابع

توفي شخص و ترك نصيب من المال و زوجة و أماً و بنتاً ، علما أن الأم ثرث السدس و أن الزوجة ثرث الثمن و البنت ترث النصف وأن المال المتبقي عند تقسيم التركة هو 1000دهم
كم ثرك هذا الشخص من المال

التمرين الثامن

تقترح شركة الكهرباء فاتورتين
الفاتورة 1: 50د+1د لكل كيلو خلال شهر
الفاتورة 2: 40+1,2 د لكل كيلو خلال شهر
ماهي الفاتورة التي سيختارها الزبون

التمرين التاسع

Une mère a 30 ans, sa fille a 4 ans.
Dans combien d'années l'âge de la mère sera-t-il le triple de celui de sa fille?

R

مبرهنة طاليس

I _ مبرهنة طاليس المباشرة :

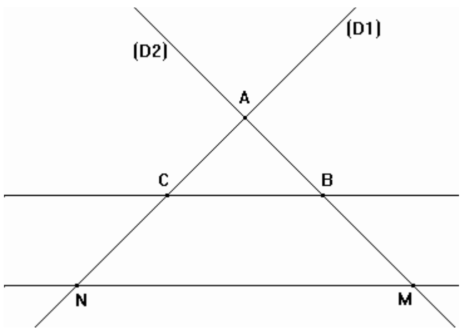
1) – مثال :

(D_1) و (D_2) مستقيمان متقاطعان في نقطة A.

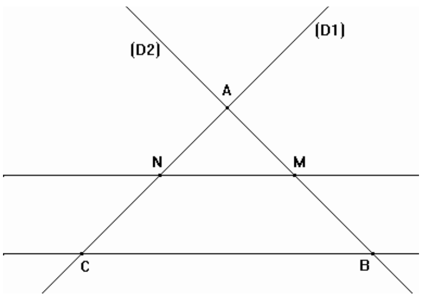
و M و B نقطتان من المستقيم (D_2) تختلفان عن A
N و C نقطتان من المستقيم (D_1) تختلفان عن A

بحيث : (MN) // (BC) .

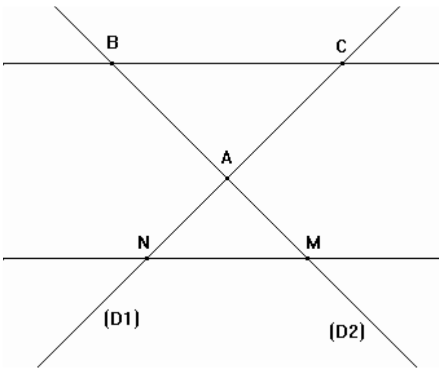
الحالة الأولى



الحالة الثانية



الحالة الثالثة



سيكون لدينا في جميع الحالات : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

2) – خاصية :

ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين في نقطة A .
B و M نقطتان من المستقيم (D) تختلفان عن A .
C و N نقطتان من المستقيم (Δ) تختلفان عن A .
إذا كان : (BC) // (MN) فإن : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

* تمرين تطبيقي :

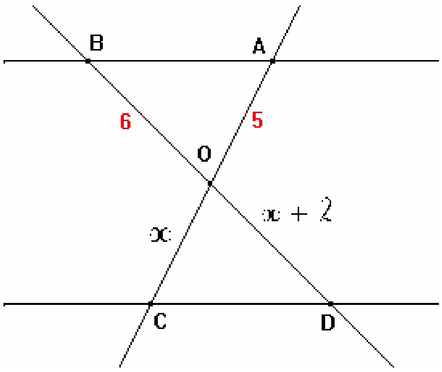
في الشكل أسفله لدينا :

(AB) // (CD) و $OB = 6$ و $OA = 5$ و $OC = x$ و $OD = x + 2$

أحسب x .

R

الحـل :



لدينا : (AC) و (BD) مستقيمان متقاطعان في O .

بما أن : (AB) // (CD)

فإن : $\frac{BA}{DC} = \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

إذن $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ يعني أن : $\frac{5}{x} = \frac{6}{x+2}$

$5(x+2) = 6x$

$5x + 10 = 6x$

و منه فإن : $5x - 6x = -10$

$-x = -10$

* ملاحظـات هـامة :

1) -- تستعمل خاصية طاليس المباشرة لحساب الأطوال.

2) – يمكن تطبيق خاصية طاليس المباشرة على مثلث ABC باعتبار (AB) و(AC) :
مستقيمان يتقاطعان في A ثم M وN : نقطتان تنتميان على التوالي إلى (AB) و (AC)
بحيث : (MN) // (BC) .
و منه سيكون لدينا : $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$

II _ مبرهنة طاليس العكسية :

1) – خاصية :

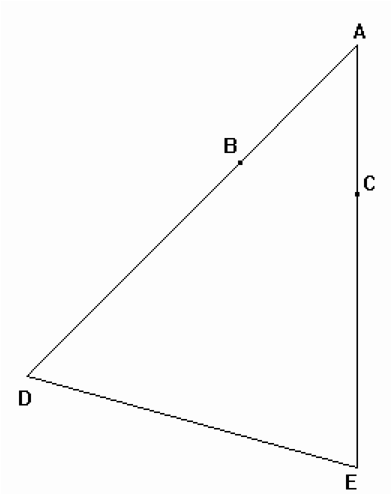
ليكن (D) و (Δ) مستقيمين متقاطعين في نقطة A .
B وM نقطتان من المستقيم (D) تختلفان عن A .
C وN نقطتان من المستقيم (Δ) تختلفان عن A .
إذا كانت النقط A وM وB و النقط A وN وC في نفس الترتيب
تحقق : $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ فإن : (MN) // (BC).

* ملاحظـات هـامة :

1) – عند تطبيق خاصية طاليس العكسية إنتبه إلى ترتيب النقط .

2) – تستعمل خاصية طاليس العكسية للبرهنة على التوازي .

R



* تمرين تطبيقي :

لاحظ الشكـل جانبه بحيث :

AB = 3 و AC = 2,4

و AD = 8 و AE = 6,4

بين أن : (BC) // (DE)

الحـل :

لدينا : $\frac{AB}{AD} = \frac{3}{8}$ و $\frac{AC}{AE} = \frac{2,4}{6,4} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$

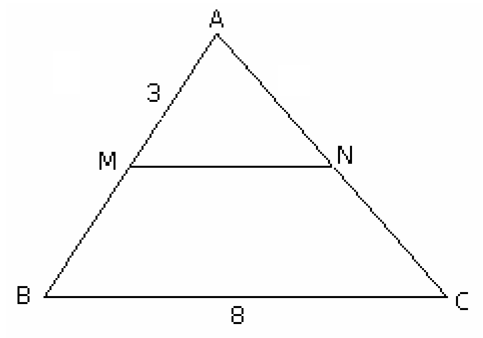
إذن : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

* نعتبر المستقيمين (AB) و (AC) .

لدينا $\left\{\begin{array}{l} D \in (AB) \\ E \in (AC) \end{array}\right.$ بحيث النقط A و B و D و النقط A و C و E في نفس الترتيب و $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

إذن : (BC) // (DE) (حسب خاصية طاليس العكسية)

نصوص التمارين



1) أنظر الشكل جانبه
حيث أن : (MN)//(BC)
و AM=3 و AB=7 و BC=8
أحسب المسافة MN .

2) (d_1) و (d_2) مستقيمان متقاطعان. على (d_1) نعتبر النقط A و B و C و D وE في هذا الترتيب بحيث:
AB=1 cm و BC=2 cm و CD=3,5 cm و DE=2,5 cm
و لتكن النقط 'A و 'B و 'C و 'D و 'E من (d_2) بحيث (AA')//(BB')//(CC')//(DD')//(EE')
أحسب 'A'B و 'C'D و 'B'E إذا علمت أن A'C'=4 cm .

3) ABCD شبه منحرف حيث (AB)//(CD) ليكن (Δ) مستقيما يوازي (AB) و يقطع [AD] و [BC] في E و F على التوالي
أحسب BF و CF إذا علمت أن AB=36 و AE=16 و FC=25 و ED=BF.

4) ABCD متوازي أضلاع و M منتصف [AB] و N منتصف [CD]
المستقيمان (MD) و (NB) يقطعان القطر [AC] في E و F على التوالي. بين أن AE=EF=FC .

5) ABCD شبه منحرف حيث (AB)//(CD) و AB=3 و CD=5
المستقيمان (AD) و (BC) يتقاطعان في النقطة E
إذا علمت أن EA=6 و EC=15 فاحسب AD و EB و BC.

6) AOB مثلث متساوي الساقين في O
ليكن : (BE) ارتفاعه ($E \in [AO]$) الموازي ل (AB) و المار من E يقطع (OB) في D
أ – أنشئ الشكل
ب – قارن بين $\frac{OE}{OA}$ و $\frac{OD}{OB}$ ثم استنتج أن OE=OD
ج – الموازي ل (AD) و المار من B يقطع (OA) في F
بين أن $OA^2 = OE \times OF$.

7) ABC مثلث. E نقطة من [AB] حيث $AE = \frac{2}{3}AB$ و F نقطة من [AC] بحيث $AF = \frac{2}{3}AC$
1 – بين أن (BC)//(EF).
2 – ليكن I المسقط العمودي ل E على (BC)
و J المسقط العمودي ل F على (BC)
و المستقيم (FJ) يقطع (AB) في النقطة O
أ – قارن بين $\frac{OE}{OB}$ و $\frac{JI}{JB}$
ب – بين أن AE.BC=AB.IJ

R

3 – منصفا الزاوية [CÂO] يقطع (BC) في K

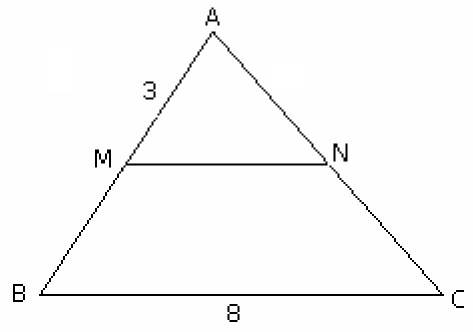
برهن على أن $\frac{AE}{AF} = \frac{KB}{KC}$.

8) ABCD رباعي محدب و I نقطة تقاطع (AC) و (BD) . الموازي للمستقيم (BC) المار من A يقطع (AD) في E و الموازي للمستقيم (AD) المار من B يقطع (AC) في F

أثبت أن : (EF) يوازي (DC).

R

حـــــلـــــول التـــمـــاريـــن



1) لدينا (MN)//(BC) و (AB) و (AC) متقاطعان في A

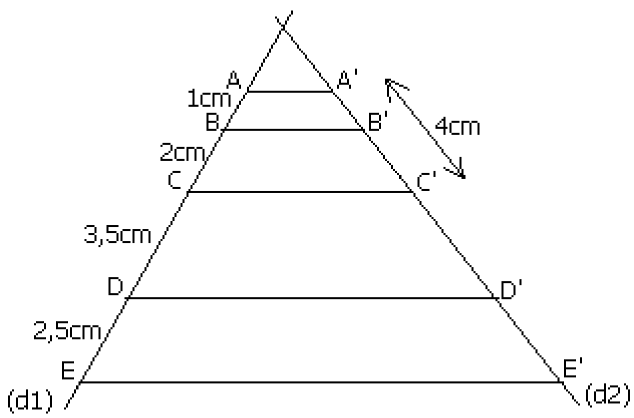
و $M \in (AB)$ و $N \in (AC)$

إذن حسب م.ط.م : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$.

و منه : $\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$

أي : $MN=\frac{BC\times AM}{AB}$

أي : $MN=\frac{8\times 3}{7}$ أي : $\boxed{MN=\frac{24}{7}}$.



2) حسب نتائج م.ط.م لدينا $\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$

و منه $A'B'=\frac{A'C'\times AB}{AC}$

أي : $A'B'=\frac{4\times 1}{3}$ ،

أي : $A'B'=\frac{4}{3}$ cm

(لأن AC=AB+BC=3 cm)

و كذلك $\frac{AC}{CD}=\frac{A'C'}{C'D'}$

و منه : $C'D'\times AC = CD\times A'C'$

أي $C'D'=\frac{CD\times A'C'}{AC}$

R

أي : $C'D' = \frac{3,5 \times 4}{3}$

أي : $\boxed{C'D' = \frac{14}{3} \text{ cm}}$

و كذلك $\frac{AB}{BE} = \frac{A'B'}{B'E'}$

أي : $B'E' \times AB = A'B' \times BE$

أي : $B'E' = \frac{A'B' \times BE}{AB}$

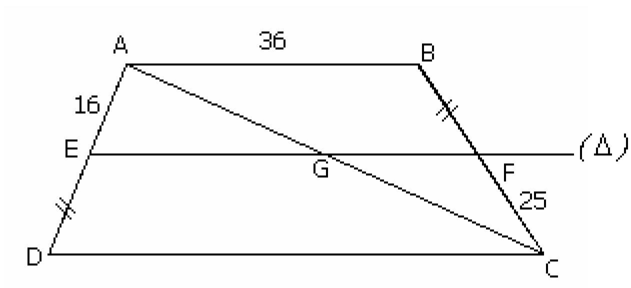
أي : $B'E' = \frac{\frac{4}{3} \times 8}{1}$

أي : $\boxed{B'E' = \frac{32}{3} \text{ cm}}$

(لأن BE=BC+CD+DF=2+3,5+2,5=8 cm)

3)

لدينا (DC)//(EF)//(AB) و ($E \in (AD)$ و $F \in (BC)$)



حسب م.ط.م : $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

و منه ED.BF = AE.FC و لدينا ED = BF

إذن $BF^2 = AE.FC$

أي $BF^2 = 16 \times 25$

أي $BF^2 = 4^2 \times 5^2$

أي $BF^2 = (4 \times 5)^2$

أي $BF^2 = 20^2$ و BF>0، إذن : **BF=20**

و لدينا كذلك حسب م.ط.م : $\frac{CF}{CB} = \frac{GF}{AB}$

إذن CB.GF=CF.AB

إذن $GF = \frac{CF.AB}{BC}$

إذن $GF = \frac{25 \times 36}{45}$

ومنه : **GF=20**

4) لدينا ABCD متوازي أضلاع إذن:

R

$(AB)//(CD)$ و $AB=CD$

ومنه $\frac{AB}{2}=\frac{CD}{2}$

أي $MB=DN$ وكذلك $(MB)//(DN)$ لأن M منصف [AB] و N منتصف [DC]

إذن MBND متوازي أضلاع و منه $(MD)//(BN)$

إذن حسب م.ط.م $\frac{AE}{EF}=\frac{AM}{MB}$ لأن في المثلث ABF لدينا ($(ME)//(BF)$)

و لدينا $AM=MB$ لأن M منتصف [AB] ، أي : $\frac{AM}{MB}=1$

إذن $\frac{AE}{EF}=1$ أي $AE=EF$ (1)

و كذلك حسب م.ط.م: $\frac{CF}{FE}=\frac{CN}{ND}$ لأن في المثلث CDE لدينا $F\in(CE)$ و $N\in(CD)$

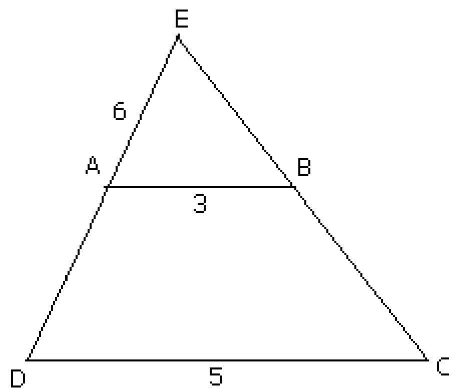
و لدينا $(NF)//(DE)$

و لدينا $CN=ND$ لأن N منتصف [CD]

إذن $\frac{CF}{FE}=1$ أي $CF=FE$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن $AE=EF=FC$

ملاحظة : يمكن البرهنة على هذا السؤال بالاعتماد فقط على خاصية المنتصفات في مثلث.



5) لدينا $(AB)//(DC)$ و $B\in(EC)$ و
$A\in(DE)$

إذن حسب م.ط.م $\frac{AB}{DC}=\frac{EB}{EC}=\frac{EA}{ED}$ (1)

و منه $\frac{EA}{ED}=\frac{AB}{DC}$

أي $ED.AB=EA.DC$

أي $ED=\frac{EA.DC}{AB}$

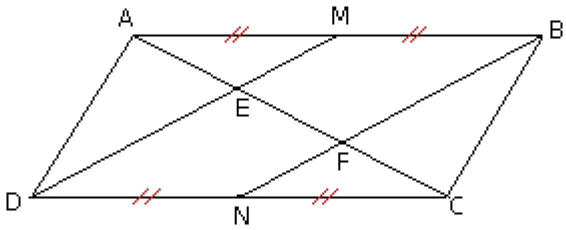
أي $ED=\frac{6\times 5}{3}$

أي $ED=10$

و لدينا $ED=EA+AD$ لأن $A\in[ED]$

إذن $AD=ED-EA$

R



إذن AD=10-6

أي AD=4

و من (1) لدينا كذلك $\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{DC}$

أي EB.DC=EC.AB

أي $EB=\frac{EC\times AB}{DC}$

أي $EB=\frac{15\times 3}{5}$

أي EB=9

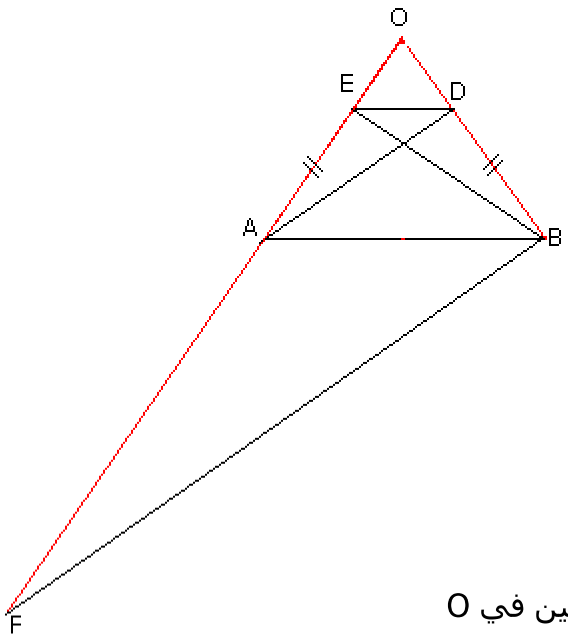
و لدينا EC=EB+BC لأن $B\in[EC]$

إذن : BC = EC - EB

إذن : BC = 15 - 9

أي : BC = 6

6) أ –



ب – لدينا (AB)//(ED) في المثلث OAB و

$E\in(OA)$ و $D\in(OB)$

إذن حسب م.ط.م $\frac{OE}{OA}=\frac{OD}{OB}$

و لدينا OA=OB لأن OAB مثلث متساوي الساقين في O

إذن OE=OD

ج – لدينا (AD)//(BF) في المثلث OBF و $A\in(OF)$ و $D\in(OB)$

إذن حسب م.ط.م $\frac{OA}{OF}=\frac{OD}{OB}$ (1)

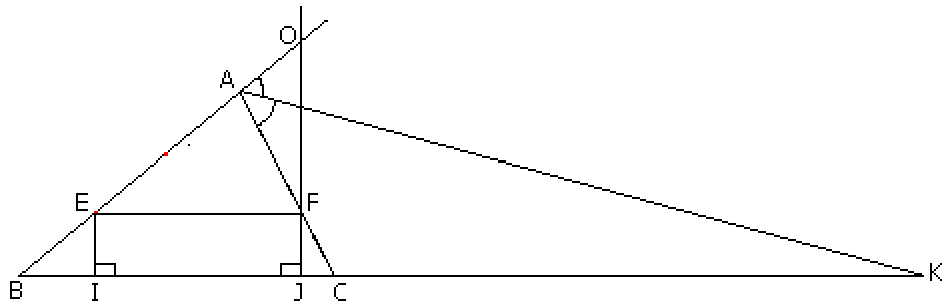
و حسب ب- لدينا $\frac{OE}{OA}=\frac{OD}{OB}$ (2)

إذن من (1) و (2) نستنتج أن $\frac{OA}{OF}=\frac{OE}{OA}$

و منه $OA^2=OE\times OF$

R

(7



1) لدينا $AE=\frac{2}{3}AB$ و $AF=\frac{2}{3}AC$

أي $\frac{AE}{AB}=\frac{2}{3}$ و $\frac{AF}{AC}=\frac{2}{3}$ و منه $\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}$

و لدينا النقط A و E و B في نفس ترتيب النقط A و F و C بحيث $E\in(AB)$ و $F\in(AC)$

إذن حسب م.ط.ع : (BC)//(EF)

2) أ – في المثلث (OBJ) لدينا (EI)//(OJ) لأن (BC) عمودي على (EI) و كذلك (BC) عمودي على (OJ) و $E\in(OB)$ و $I\in(BJ)$

إذن حسب م.ط.م : $\frac{JI}{JB}=\frac{OE}{OB}$

ب – لدينا حسب (1) $\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}$

و لدينا EFJI مستطيل لأن EFJI متوازي أضلاع ((EF)//(IJ) و (EI)//(FJ)) و له زاوية قائمة [EÎJ] مثلا

إذن EF=IJ

ومنه في (1) : $\frac{IJ}{BC}=\frac{AE}{AB}$

و منه : AE.BC=AB.IJ

3) لدينا حسب تطبيقات م.ط.م في المثلث ABC: $\frac{AB}{AC}=\frac{KB}{KC}$ (1)

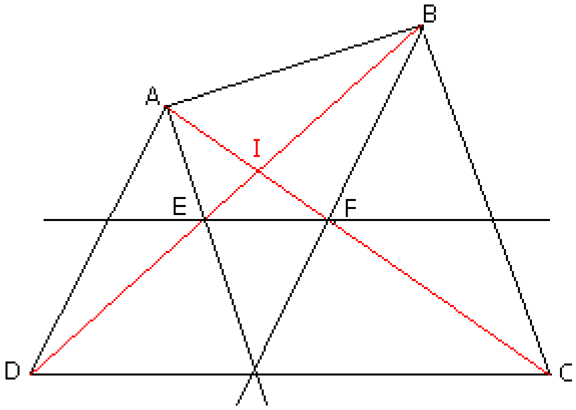
لأن K موقع المنصف الخارجي للزاوية [BÂC]

و حسب (1) $\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}$ أي $\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}$ (2)

R

و من (1) و (2) لدينا $\frac{KB}{KC}=\frac{AE}{AF}$

8)



في المثلث ADI لدينا $B\in(ID)$ و $F\in(AI)$ و (BF)//(AD)

إذن حسب م.ط.م : $\frac{AD}{BF}=\frac{ID}{IB}=\frac{IA}{IF}$ (1)

و في المثلث BCI لدينا $A\in(IC)$ و $E\in(IB)$ و (AE)//(BC)

إذن حسب م.ط.م : $\frac{AE}{BC}=\frac{IE}{IB}=\frac{IA}{IC}$ (2)

من (1) و (2) لدينا :

$\frac{ID}{IB}=\frac{IA}{IF}$ و $\frac{IE}{IB}=\frac{IA}{IC}$

إذن IA.IB=IF.ID و IA.IB=IE.IC

و منه IE.IC= IF.ID

أي $\frac{ID}{IC}=\frac{IE}{IF}$

و لدينا النقط I و E و D مستقيمية وفي نفس ترتيب النقط المستقيمية I و F و C ،

إذن حسب م.ط.ع : (EF)//(DC).

R

مبرهنـــــة فيتـاغـــــــورس

I_ مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

1) – خاصية :

إذا كان ABC مثلثا قائم الزاوية في A
فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

2) – مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في C بحيث : $AC = 2\sqrt{2}$ و $AB = 10$.
لنحسب BC .
بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في C فإن : $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة)

إذن :
$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 - AC^2 \\ &= 10^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 100 - 8 \\ &= 92 \end{aligned}$$

و منه فإن :
$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{92} \\ &= \sqrt{4 \times 23} \\ &= 2\sqrt{23} \end{aligned}$$

II_ مبرهنة فيتاغورس العكسية :

1) – خاصية :

إذا كان ABC مثلثا بحيث $BC^2 = AB^2 + AC^2$
فإن : ABC قائم الزاوية في A .

2) – مثال :

EFG مثلث بحيث : EF = 10 و FG = 8 و CG = 6
لنبين أن EFG مثلث قائم الزاوية .

R

لدينا :

$$EF^2 = 10^2 = 100$$
$$EG^2 = 6^2 = 36$$
$$FG^2 = 8^2 = 64$$

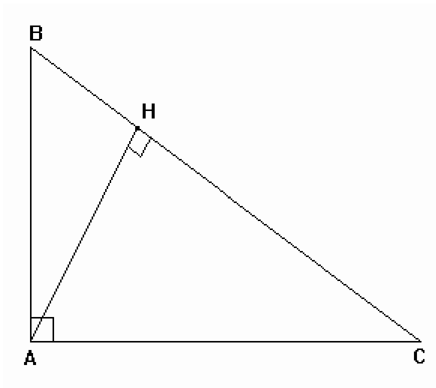
نلاحظ أن : $100 = 36 + 64$

أي : $EF^2 = EG^2 + FG^2$

وحسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن EFG مثلث قائم الزاوية في G .

III _ نتائج :

ABC مثلث قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .



سيكون لدينا :

$$AB \times AC = AH \times BC$$
$$AH^2 = HB \times HC$$
$$AB^2 = BH \times BC$$
$$AC^2 = CH \times CB$$

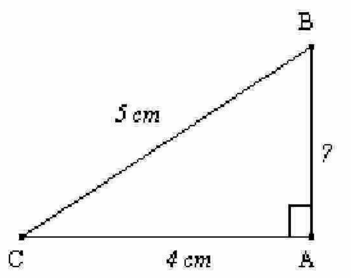
نسمي هذه العلاقات : العلاقات المترية في المثلث القائم الزاوية .

مبرهنة فيثاغورس + العلاقات المترية

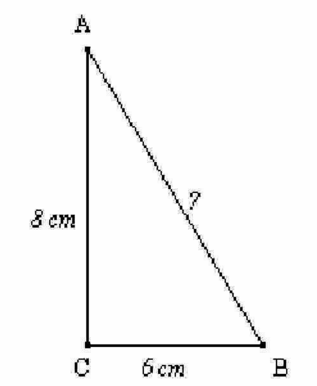
تمرين 1

أحسب طول الضلع AB في كل حالة من الحالات الآتية :

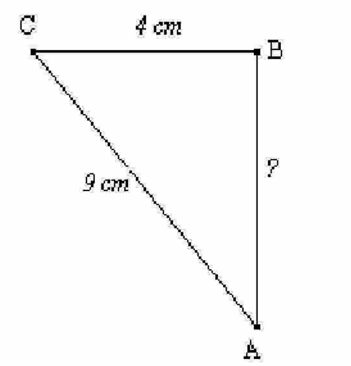
الحالة الأولى



الحالة الثانية



الحالة الثالثة



تمرين 2

ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A بحيث : AB = 2 cm .
لتكن M منتصف الضلع [BC] .

1) – أرسم شكــلا.
2) – أحسب BC .
3) – استنتج حساب AM .

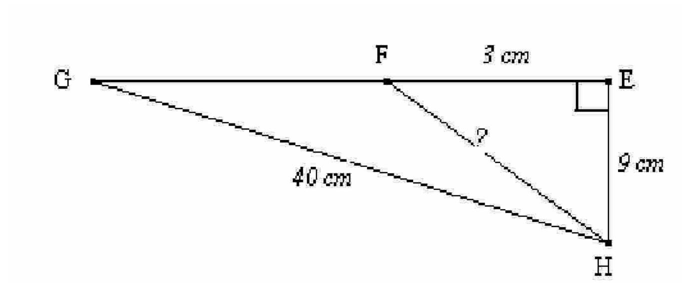
تمرين 3

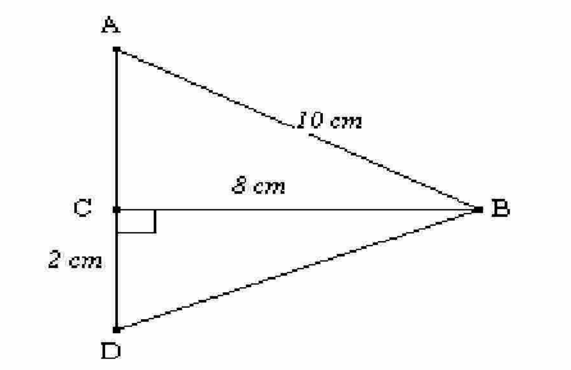
ABCD مستطيل بحيث : AB = 6 cm و BC = 4 cm .

1) – أرسم شكــلا.
2) – أحسب معللا جوابك : AC ثم BD .

تمرين 4

لاحظ الشكلين الآتيين :





أحسب : AC و BD ثم EG و FH و FG .

R

تمرين 5

حدد من بين المثلثات الآتية المثلث القائم الزاوية :

1) – المثلث ABC بحيث : AB = 5 cm و AC = 4 cm و BC = 7 cm .

2) – المثلث EFG بحيث : EF = 6 cm و FG = 6,5 cm و EG = 2,5 cm .

3) – المثلث LMN بحيث : $MN = \frac{3}{2}$ cm و $LM = 3$ cm و $LN = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

تمرين 6

EFG مثلث بحيث : EF = 8 cm و EG = 10 cm و FG = 6 cm .

1) – أرسم شكلا.

2) – أثبت أن EFG مثلث قائم الزاوية.

3) – لتكن H المسقط العمودي للنقطة E المستقيم (FG) .

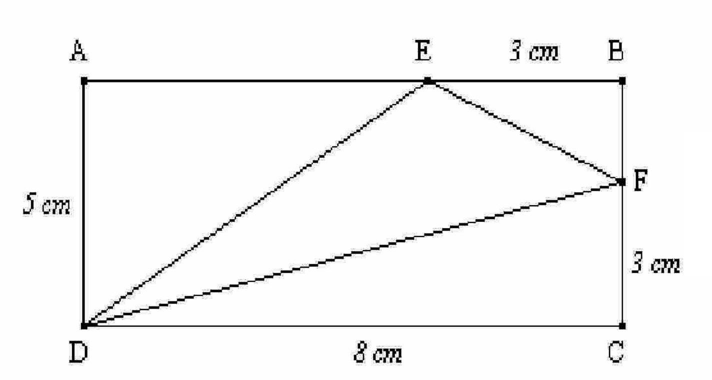
أ) -- أثبت أن $AB \times AC = BC \times AH$.

ب) -- استنتج حساب AH .

تمرين 7

لاحظ الشكل جانبه بحيث :

ABCD مستطيل :



1) – أحسب محيط المثلث EFD .

2) – هل EFD مثلث قائم الزاوية ؟

علل جوابك .

تمرين 8

ABC مثلث و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) بحيث :

$BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$. أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية في A .

تمرين 9

ABC مثلث قائم الزاوية في E بحيث :

$AB = 12$ و $BC = x$ و $AC = x - 8$.

أحسب x .

تمرين 10

ABC مثلث بحيث : AB = 6 و AC = 8 و BC = 10 .

1) – بين أن المثلث ABC قائم الزاوية.

2) – لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .

أحسب : AH و BH و CH .

تمرين 11

ABC مثلث قائم الزاوية في A .

1) – أحسب BC إذا علمت أن : AB = 12 و AC = 5 .

2) – أحسب AC إذا علمت أن : AB = 8 و BC = 20 .

3) – أحسب AB إذا علمت أن : AC = 9 و $BC = 3\sqrt{13}$.

R

المثلث القائم الزاوية و الحساب المثلثي

I _ النسب المثلثية لزاوية حادة :

1) – تعاريف :

أ) -- جيب تمام زاوية حادة :

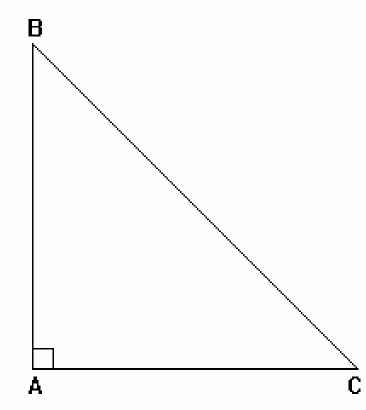
النسبة $\frac{AB}{BC}$ تسمى جيب تمام الزاوية $A\hat{B}C$.

يرمز لها بالرمز $\cos A\hat{B}C$ و نقرأ $\text{cosinus}\, A\hat{B}C$

و نكتب : $\cos A\hat{B}C = \frac{AB}{BC}$

أي $\cos A\hat{B}C = \frac{\text{طول الضلع المحادي للزاوية } A\hat{B}C}{\text{طول الوتر}}$

ABC مثلث قائم الزاوية في A



ب) -- جيب زاوية حادة :

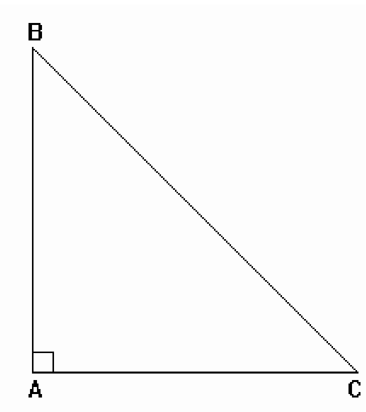
النسبة $\frac{AC}{BC}$ تسمى جيب الزاوية $A\hat{B}C$.

يرمز لها بالرمز $\sin A\hat{B}C$ و نقرأ $\text{sinus}\, A\hat{B}C$

و نكتب : $\sin A\hat{B}C = \frac{AC}{BC}$

أي $\sin A\hat{B}C = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } A\hat{B}C}{\text{طول الوتر}}$

ABC مثلث قائم الزاوية في A



ج) -- ظل زاوية حادة :

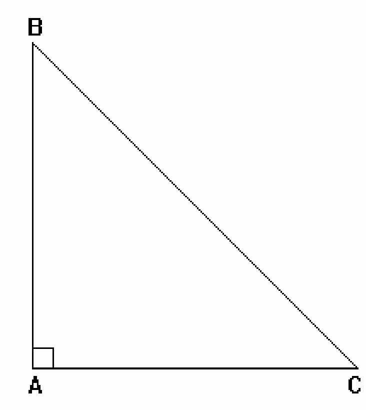
النسبة $\frac{AC}{AB}$ تسمى ظل الزاوية $A\hat{B}C$.

يرمز لها بالرمز $\tan A\hat{B}C$ و نقرأ $\text{tangente}\, A\hat{B}C$

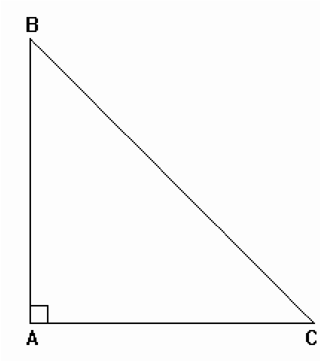
و نكتب : $\tan A\hat{B}C = \frac{AB}{BC}$

أي $\tan A\hat{B}C = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } A\hat{B}C}{\text{طول الضلع المحادي للزاوية } A\hat{B}C}$

ABC مثلث قائم الزاوية في A



R



2) – مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث :

$AC = 4\text{ cm}$ و $AB = 3\text{ cm}$ و $BC = 5\text{ cm}$

لنحسب النسب المثلثية للزاوية $A\hat{C}B$.

أ) --- حساب $\cos A\hat{C}B$:

لدينا :

$$\cos A\hat{C}B = \frac{AC}{BC}$$

إذن :

$$\cos A\hat{C}B = \frac{4}{5}$$

ب) --- حساب $\sin A\hat{C}B$:

لدينا :

$$\sin A\hat{C}B = \frac{AB}{BC}$$

إذن :

$$\sin A\hat{C}B = \frac{3}{5}$$

ج) --- حساب : $\tan A\hat{C}B$

لدينا :

$$\tan A\hat{C}B = \frac{AB}{AC}$$

إذن :

$$\tan A\hat{C}B = \frac{3}{4}$$

II _ خصـــائص :

1) – الخاصية الأولى :

مهما كان α قياس زاوية حادة $(0° < \alpha < 90°)$

فإن : $0 < \cos\alpha < 1$ و $0 < \sin\alpha < 1$

2) – الخاصية الثانية :

مهما كان α قياس زاوية حادة $(0° < \alpha < 90°)$

فإن : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

R

3) – الخاصية الثالثة :

مهما كان α قياس زاوية حادة $\left(0° < \alpha < 90°\right)$

فإن : $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

4) – الخاصية الرابعة : النسب المثلثية لزاويتين متتامتين .

α و β قياسي زاويتن حادتين بحيث : $\alpha + \beta = 90°$

$$\cos\alpha = \sin\beta$$

$$\sin\alpha = \cos\beta$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$$

5) – النسب المثلثية لزوايا خاصة :

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\cos\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف

تطبيقات :

α قياس زاوية حادة غير منعدمة بحيث : $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$.

أ) --- لنحسب $\sin\alpha$:

نعلم أن : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

إذن :

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{9-4}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

R

و بما أن : $0 < \sin\alpha < 1$

فإن :

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{9}}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}}$$

ب) --- لنحسب $\tan\alpha$:

نعلم أن : $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

إذن :

$$\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{2}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

ج) --- لنحسب $\sin(90° - \alpha)$:

لدينا :

$$\begin{aligned} \alpha + (90° - \alpha) &= \alpha + 90° - \alpha \\ &= 90° + \alpha - \alpha \\ &= 90° \end{aligned}$$

إذن : α و $(90° - \alpha)$ قياسا زاويتين متتامتين .

و منه فإن : $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

و بما أن : $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ فإن : $\boxed{\sin(90° - \alpha) = \dfrac{2}{3}}$

R

نصوص التمارين

1) ليكن ABC مثلث بحيث AB=3 و AC=4 و BC=5

أ – بين أن المثلث ABC قائم الزاوية في A

ب – أحسب النسب المثلثية للزاوية $[A\hat{B}C]$

2) α قياس زاوية حادة غير منعدمة

أ – بين أن $1+\tan^2(\alpha)=\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$

ب – بين أن $1+\dfrac{1}{\tan^2(\alpha)}=\dfrac{1}{\sin^2(\alpha)}$

3) α قياس زاوية حادة

أحسب $\cos(\alpha)$ و $\tan(\alpha)$ في الحالات التالية:

أ- $\sin(\alpha)=0,3$ ب - $\sin(\alpha)=\dfrac{5}{7}$ ج - $\sin(\alpha)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

4) α قياس زاوية حادة

أحسب sin(α) و tan(α) في الحالات التالية:

أ- $\cos(\alpha)=0,6$ ب - $\cos(\alpha)=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ ج - $\cos(\alpha)=\dfrac{4}{5}$

5) α قياس زاوية حادة

أحسب sin(α) و cos(α) في الحالات التالية:

أ- $\tan(\alpha)=\sqrt{7}$ ب - $\tan(\alpha)=\dfrac{3}{4}$ ج - $\tan(\alpha)=6$

6) α قياس زاوية حادة غير منعدمة بين أن:

أ – $\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=2\times\cos^2(\alpha)-1$

ب - $\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=1-2\times\sin^2(\alpha)$

ج - $(\cos(\alpha)+\sin(\alpha))^2+(\cos(\alpha)-\sin(\alpha))^2=2$

7) α قياس زاوية حادة غير منعدمة

بسط التعابير التالية

أ . $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2-1$

ب. $\cos^2(\alpha)+2\sin^2(\alpha)-1$

ج. $\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)\times\cos^2(\alpha)$

د. $\sin^5(\alpha)+\sin^3(\alpha)\times\cos^2(\alpha)$

R

هـ. $\cos^4(\alpha) - \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) - \sin^4(\alpha)$

8) أحسب قيمة كل من A و B و C

A=cos²10°+cos²42°+cos²80°+cos²48°

B=3cos35°-sin70°+cos20°-3sin55°

C=2cos²25°+sin13°+2cos²65°-cos77°

9) باستعمال المحسبة:

أ) أعط قيم مقربة ل $\cos(\alpha)$ و $\sin(\alpha)$ و $\tan(\alpha)$

- إذا كانت $\alpha=27°$
- إذا كانت $\alpha=65°$

ب) أعط قيم مقربة ل α في الحالات التالية:

$\tan\alpha = 2{,}1445$, $\sin\alpha = 0{,}5299$, $\cos\alpha = 0{,}9781$

10) أوجد قيمة α إذا علمت أن ($0°<\alpha<90°$)

أ) $\tan\alpha - 2\sin\alpha = 0$

ب) $2\cos^2\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha = 0$

ج) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

11) α قياس زاوية حادة. أحسب $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$

إذا علمت أن $\dfrac{\cos\alpha}{4} = \dfrac{\sin\alpha}{3}$

12) ABC مثلث قائم الزاوية في A مساحته S

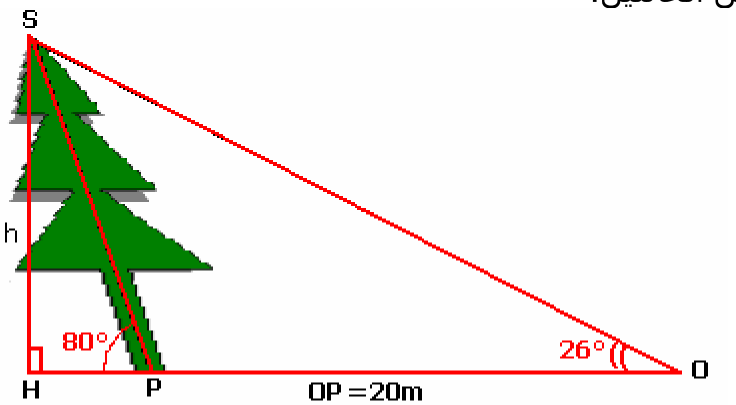
1) بين أن : AB×AC=2S

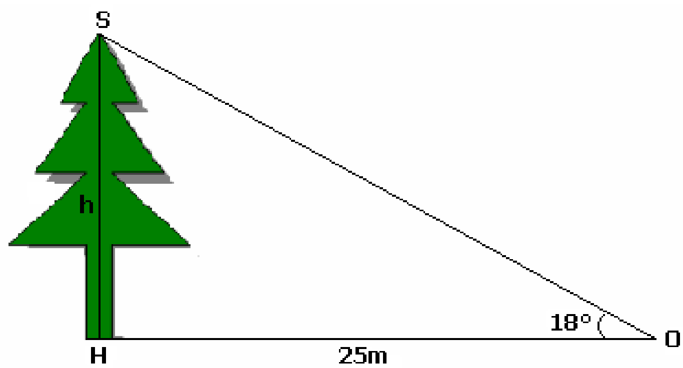
2) نفترض أن $\tan A\hat{C}B = \dfrac{1}{2}$ و S=6,25

أ – أحسب AB و AC

ب – استنتج BC

13) أحسب h ارتفاع الشجرة في كل من الحالتين:

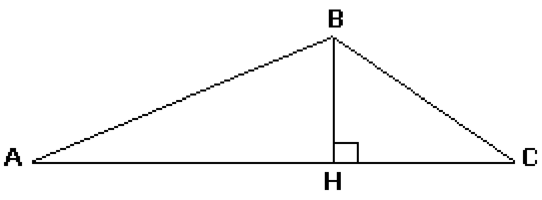




R

14) ليكن ABC مثلث زواياه كلها حادة
و ليكن H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)
أ – أحسب AH بدلالة AB و $A\hat{B}C$
ب – بين أن مساحة المثلث ABC تساوي $\frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin A\hat{B}C$
ج – استنتج من ذلك أن $\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}}$

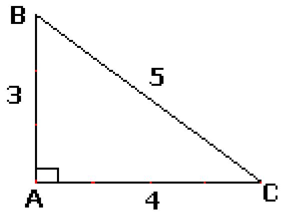
15) ABC مثلث زاويته $[B\hat{A}C]$ حادة لتكن H المسقط العمودي للنقطة B على (AC)
(انظر الشكل)
أ – أحسب BC^2 بدلالة AB و AC و AH
ب – استنتج : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times \cos B\hat{A}C$



R

حلول التمارين

1)



أ)لدينا $AB^2+AC^2=16+9=25$

و $BC^2=25$

إذن $AB^2+AC^2= BC^2$

و بالتالي حسب مبرهنة فيتاغورس : ABC مثلث قائم الزاوية في A

ب) $\cos A\hat{B}C=\dfrac{AB}{BC}$ و $\sin A\hat{B}C=\dfrac{AC}{BC}$ و $\tan A\hat{B}C=\dfrac{AC}{AB}$

أي $\cos A\hat{B}C=\dfrac{3}{5}$ و $\sin A\hat{B}C=\dfrac{4}{5}$ و $\tan A\hat{B}C=\dfrac{4}{3}$

2) أ) $0<\alpha<90°$

لدينا $1+\tan^2\alpha=1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ ($\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$)

$=\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2}$

$=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ لأن $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

إذن $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

ب) لدينا $1+\dfrac{1}{\tan^2\alpha}=1+\dfrac{1}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$

$=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

إذن $1+\dfrac{1}{\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

3) $0<\alpha<90°$

$\sin\alpha=0,3$

حسب العلاقة $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

R

لدينا $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$= 1 - 0{,}09$

$= 0{,}91$

أي $\cos\alpha = \sqrt{0{,}91} = \sqrt{\dfrac{91}{100}}$ لأن : $\cos\alpha > 0$

أي $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{91}}{10}$

و حسب العلاقة $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

نحصل على $\tan\alpha = \dfrac{0{,}3}{\dfrac{\sqrt{91}}{10}}$

أي $\tan\alpha = \dfrac{3\sqrt{91}}{91}$

ملاحظة : يمكن كذلك استعمال العلاقة $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \dfrac{1}{\tan^2\alpha}$ (التمرين 1) لحساب $\tan\alpha$ باستعمال $\sin\alpha$ مباشرة

ب) $\sin\alpha = \dfrac{5}{7}$

مثل أ) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\cos^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{5}{7}\right)^2$

$= 1 - \dfrac{25}{49}$

$= \dfrac{49-25}{49}$

$= \dfrac{24}{49}$

أي $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{24}{49}}$

أي $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

و $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

أي $\tan\alpha = \dfrac{\dfrac{5}{7}}{\dfrac{2\sqrt{6}}{7}}$

R

أي $\tan\alpha = \frac{5\sqrt{6}}{12}$

ج) $sin\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

مثل أ) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$$cos^2\,\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{5}{9}$$

$$= \frac{4}{9}$$

أي $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

و $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

أي $\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}$

أي $\tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

4) $0<\alpha<90°$

أ) $\cos\alpha = 0{,}6$

حسب العلاقة $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

لدينا $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$=1-0{,}36$

$=0{,}64$

أي $\sin\alpha = \sqrt{0{,}64}$ و $\sin\alpha>0$

إذن $\sin\alpha=0{,}8$

و لدينا $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

أي $\tan\alpha = \frac{0{,}8}{0{,}6}$

أي $\tan\alpha = \frac{4}{3}$

ملاحظة : يمكن كذلك استعمال العلاقة $1 + tan^2\,\alpha = \frac{1}{cos^2}$ (التمرين 1) لحساب $tan\,\alpha$ باستعمال $cos\,\alpha$ مباشرة.

R

ب) $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

مثل أ) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$$= 1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{18}{25}$$

أي $= \frac{7}{25}$

أي $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$

و $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

أي $\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{7}}{5}}{\frac{3\sqrt{2}}{5}}$

أي $\tan\alpha = \frac{\sqrt{14}}{6}$

ج) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

مثل أ) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$$= 1 - \frac{16}{25}$$

$$= \frac{9}{25}$$

أي $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

و $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

أي $\tan\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}$

أي $\tan\alpha = \frac{3}{4}$

5) $0 < \alpha < 90°$

R

أ) $\tan\alpha = \sqrt{7}$

حسب العلاقة $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

لدينا $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\left(\sqrt{7}\right)^2$

$=1+7= 8$

أي $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{8}$

أي $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{8}}$ لأن $\cos\alpha>0$

أي $\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

أي $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

و لدينا $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha=\cos\alpha\times\tan\alpha$

أي $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\times\sqrt{7}$

أي $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$

ب) مثل أ) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha$

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\dfrac{9}{16}$

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{25}{16}$

أي $\cos^2\alpha = \dfrac{16}{25}$

أي $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$

و $\sin\alpha = \cos\alpha\times\tan\alpha$

$= \dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}$

أي $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$

ج) مثل أ) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha$

R

$=1+36$
$=37$

أي $\cos^2\alpha = \frac{1}{37}$

أي $\cos\alpha = \frac{\sqrt{37}}{37}$

و $\sin\alpha = \cos\alpha \times \tan\alpha$

$= \frac{\sqrt{37}}{37} \times 6$

أي $= \frac{6\sqrt{37}}{37}$

6) $0<\alpha<90°$

أ) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)$

$= \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

أي $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

ب) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha$

$= 1 - 2\sin^2\alpha$

أي $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

ج) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha-\sin\alpha)^2 =$

$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\cos\alpha \times \sin\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\cos\alpha \times \sin\alpha$

$=1+1$
$=2$

أي $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha-\sin\alpha)^2 = 2$

7) $0<\alpha<90°$

أ) $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2 - 1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\times\cos\alpha\times\sin\alpha - 1$

$= 1 - 2\cos\alpha\sin\alpha - 1$

$= -2\cos\alpha\sin\alpha$

أي $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2 - 1 = -2\cos\alpha\sin\alpha$

ب) $\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha - 1 = 1 - \sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha - 1$

$= \sin^2\alpha$

أي $\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha - 1 = \sin^2\alpha$

ج) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \times \cos^2\alpha = \cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$

$= \cos^2\alpha \times \cos^2\alpha$

$= \cos^4\alpha$

أي $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \times \cos^2\alpha = \cos^4\alpha$

R

د) $\sin^5\alpha + \sin^3\alpha\cos^2\alpha = \sin^3\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

أي $= \sin^3\alpha$

أي $\sin^5\alpha + \sin^3\alpha\cos^2\alpha = \sin^3\alpha$

هـ) A= $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \sin^4\alpha = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

و باستعمال المتطابقة الهامة $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ نحصل على

$A = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

$A = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ لأن $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

$= 0$

أي $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \sin^4\alpha = 0$

ملاحظة هناك طرق أخرى مثل :

$\cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \sin^4\alpha = \cos^4\alpha - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha - \sin^4\alpha$

$= \cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 - \sin^4\alpha$

$= (1-\cos^2\alpha)^2 - \cos^4\alpha$

$= (\sin^2\alpha)^2 - \sin^4\alpha$

$= \sin^4\alpha - \sin^4\alpha$

$= 0$

8) $A = \cos^2 10° + \cos^2 42° + \cos^2 80° + \cos^2 48°$ (لدينا : $48°+42°=90°$

$A = \cos^2 10° + \cos^2 42° + \sin^2 10° + \sin^2 42°$ و: $10°+80°=90°$)

$A = \cos^2 10° + \sin^2 10° + \cos^2 42° + \sin^2 42°$

$= 1+1$

أي : $A=2$

$B = 3\cos 35° - \sin 70° + \cos 20° - 3\sin 55°$ (لدينا: $35°+55°=90°$

$B = 3\cos 35° - \sin 70° + \sin 70° - 3\cos 35°$ و: $70°+20°=90°$)

$= 0$

أي $B=0$

$C = 2\cos^2 25° + \sin 13° + 2\cos^2 65° - \cos 77°$ (لدينا : $25°+65°=90°$

$C = 2\cos^2 25° + \sin 13° + 2\sin^2 25° - \sin 13°$ و : $13°+77°=90°$)

$= 2(\cos^2 25°+\sin^2 25°)$

$= 2$

أي $C=2$

9) نحرس أولا أن نجعل الوحدة المستعملة هي الدرجة (Degrés)

أ) نكتب 27 و نضغط على زر cos و نقرأ :(أو العكس حسب المحسبة)

$\cos\alpha \approx 0{,}891$ $\sin\alpha \approx 0{,}454$ $\tan\alpha \approx 0{,}5095$

R

ب) نكتب 0,9781 ثم نضغط على Shift ثم cos فيما بعد و نقرأ $\alpha \approx 12°$
و نفس الشيء للحالتين الأخر تين
$\sin\alpha = 0{,}5299$ نقرأ $\alpha \approx 32°$
$\tan\alpha = 2{,}1445$ نقرأ $\alpha \approx 65°$

10) (0°<α<90°)
أ) $\tan\alpha - 2\sin\alpha = 0$
تكافئ : $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 2\sin\alpha = 0$
تكافئ : $\dfrac{\sin\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$ ($\cos\alpha \neq 0$ لأن (0°<α<90°))
تكافئ : $\sin\alpha(1-2\cos\alpha) = 0$
تكافئ : $\sin\alpha = 0$ أو $1-2\cos\alpha = 0$
أي $\sin\alpha = 0$ أو $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$
أي α=0 أو α=60° حسب النسب المثلثية للزوايا الخاصة
لكن $\alpha \neq 0$ إذن قيمة α هي α=60°
ب) $2\cos^2\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha = 0$
تكافئ $\cos\alpha\left(2\cos\alpha - \sqrt{3}\right) = 0$
تكافئ $2\cos\alpha - \sqrt{3} = 0$ أو $\cos\alpha = 0$
تكافئ $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ أو $\cos\alpha = 0$
تكافئ α=30° أو α=90°
لكن $\alpha \neq 90°$ إذن قيم α هي α=30°
ج) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
تكافئ $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
تكافئ sinα=1 ($\cos\alpha \neq 0$)
تكافئ α=90°
لكن $\alpha \neq 90°$ إذن لا توجد قيمة ل α (0°<α<90°) تحقق المتساوية.

11) (0°<α<90°)
لدينا $\dfrac{\sin\alpha}{3} = \dfrac{\cos\alpha}{4}$
إذن $\dfrac{\sin^2\alpha}{9} = \dfrac{\cos^2\alpha}{16}$
و منه $\dfrac{\sin^2\alpha}{9} = \dfrac{\cos^2\alpha}{16} = \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{9+16} = \dfrac{1}{25}$
و منه $\dfrac{\sin^2\alpha}{9} = \dfrac{1}{25}$ و $\dfrac{\cos^2\alpha}{16} = \dfrac{1}{25}$

R

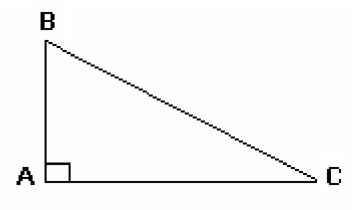
أي $\sin^2\alpha = \frac{9}{25}$ و $\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$

أي $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

لأن sinα>0 و cosα>0

و نتحقق بسهولة أن $\frac{\cos\alpha}{4} = \frac{\sin\alpha}{3}$

(12



.1 إذا أخذنا [AB] كقاعدة فإن [AC] هو الارتفاع المرتبط بها لأن (AB) و (AC) متعامدان

و منه مساحة المثلث ABC هي $\frac{AB \times AC}{2}$

أي $S = \frac{AB \times AC}{2}$

أي $2S = AB \times AC$

. 2 نفترض أن $\tan A\hat{C}B = \frac{1}{2}$ و S=6,25

أ – نحسب AB و AC

في المثلث ABC $\tan(A\hat{C}B) = \frac{AB}{AC}$

أي $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ و 2AB=AC (1)

و حسب 1) $AB \times AC = 2 \times 6,25$ (2)

من (1) نحصل في (2) على :

$AB \times 2AB = 2 \times 6,25$

أي $AB^2 = 6,25$ و AB>0

و منه $AB = \sqrt{6,25}$

أي AB=2,5

ومن (1) نحصل على AC=2AB

=2×2,5

أي AC=5

R

ب) ABC قائم الزاوية في A إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة $AB^2+AC^2=BC^2$

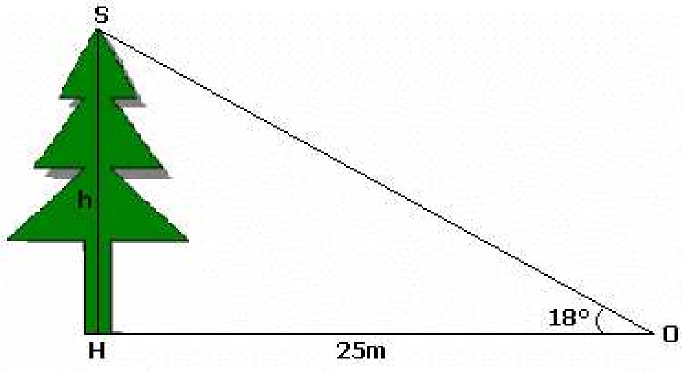
أي $BC^2=(2,5)^2+5^2$

أي $=6,25+25$

أي $=31,25$

و منه $BC=\sqrt{31,25}$

أي $BC=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$



13) أ) المثلث OSH قائم الزاوية في H

لدينا $\tan H\hat{O}S=\dfrac{HS}{OH}$

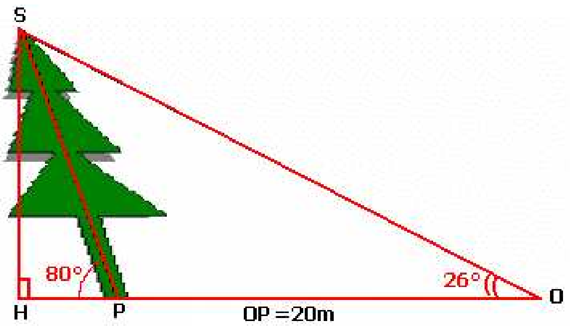
أي $HS=OH\times\tan H\hat{O}S$

أي $HS = 25 \times \tan 18°$

أي $HS = 25 \times 0,3249$

أي **$HS = 8,1225$**

إذن ارتفاع الشجرة هو **8,1225 m** (قيمة مقربة)



ب) المثلث OSH قائم الزاوية في H

لدينا $\tan H\hat{O}S=\dfrac{HS}{OH}$

أي $HS=OH\times\tan H\hat{O}S$

أي (1) $HS=OH \times \tan 26°$

و كذلك المثلث HSP قائم الزاوية في H

إذن $\tan H\hat{P}S=\dfrac{HS}{HP}$

إذن $HS=\tan H\hat{P}S\times HP$

أي (2) $HS=\tan 80°\times HP$

ومن (1) و (2) نستنتج أن $\tan 26° \times OH = \tan 80° \times HP$

ولدينا $OH = OP + HP$ لأن $P\in[HO]$

إذن $OH = 20 + HP$

إذن $\tan 26°(20+HP) = \tan 80° \times HP$

أي $20 \times \tan 26° + HP \times \tan 26° = HP \times \tan 80°$

أي $20 \times \tan 26° = (\tan 80° - \tan 26°) \times HP$

أي (3) $HP=\dfrac{20.\tan 26°}{\tan 80°-\tan 26°}$

A REVOIR

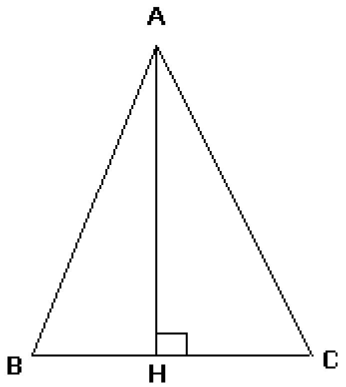
و نعود إلى (2) : $HS=\tan 80°\times HP$

إذن من (2) و (3) نستنتج أن $HS=\dfrac{20.\tan 26°\times\tan 80°}{\tan 80°-\tan 26°}$

أي HS=10,6725 m

إذن ارتفاع الشجرة هو 10,6725 m (قيمة مقربة)

R



14) أ) المثلث ABH قائم الزاوية في H

إذن $\sin A\hat{B}H = \dfrac{AH}{AB}$

أي $AH = AB.\sin A\hat{B}H$ و لدينا $A\hat{B}H = A\hat{B}C$

إذن $AH = AB.\sin A\hat{B}C$

ب) في المثلث ABC نعتبر [BC] كقاعدة إذن [AH] هو الارتفاع المرتبط بها :

و منه مساحة المثلث ABC (نرمز لها ب $\mathcal{A}$(ABC))

تساوي $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{BC \times AH}{2}$

و حسب أ) $AH = AB.\sin A\hat{B}C$

إذن (1) $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin A\hat{B}C$

ج) بالمثل يمكن أن نبين أن $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin B\hat{A}C$ (2)

و كذلك $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin B\hat{C}A$ (3)

ومن (1) و (2) و (3) نستنتج أن :

$$\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin B\hat{A}C = \frac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin C\hat{B}A = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin B\hat{C}A$$

أي $\dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} = \dfrac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \hat{B} = \dfrac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \hat{C}$

أي $\dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} = \dfrac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \hat{B}$

و $\dfrac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \hat{B} = \dfrac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \hat{C}$

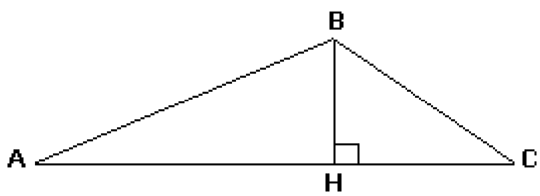
أي $AC \times \sin \hat{A} = BC \times \sin \hat{B}$ و $BA \times \sin \hat{B} = CA \times \sin \hat{C}$

أي (4) $\dfrac{BC}{\sin \hat{A}} = \dfrac{AC}{\sin \hat{B}}$ و $\dfrac{AC}{\sin \hat{B}} = \dfrac{AB}{\sin \hat{C}}$ (5)

ومن (4) و (5) نستنتج أن $\dfrac{BC}{\sin \hat{A}} = \dfrac{AC}{\sin \hat{B}} = \dfrac{AB}{\sin \hat{C}}$

(وتسمى هذه العلاقة بعلاقة الجيب (sinus) في مثلث)

15)



R

أ) لدينا المثلث BCH قائم الزاوية في H

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة: $BC^2=BH^2+CH^2$

و لدينا $CH = AC - AH$

إذن $BC^2 = BH^2 + (AC-AH)^2$ (1)

و لدينا كذلك المثلث ABH قائم الزاوية في H

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة: $AB^2=BH^2+AH^2$

إذن $BH^2=AB^2-AH^2$ (2)

إذن من (1) و(2) نستنتج أن : $BC^2=AB^2-AH^2+(AC-AH)^2$

$=AB^2-AH^2+AC^2+AH^2-2AC.AH$

أي $BC^2=AB^2+AC^2-2AC.AH$

ب) حسب أ) $BC^2=AB^2+AC^2-2AC.AH$ (1)

و لدينا في المثلث ABH القائم الزاوية في H

$$\cos B\hat{A}H = \frac{AH}{AB} \quad \text{و} \quad B\hat{A}H = B\hat{A}C$$

أي $AH = AB.\cos B\hat{A}C$ (2)

ومن (1) و (2) نستنتج أن

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos B\hat{A}C$$

و هذه العلاقة هي تعميم لمبرهنة فيتاغورس في حالة مثلث أحد زواياه حادة ، و هذا التعميم هو مبرهنة الكاشي و هو من العلماء المسلمين المتوفى حوالي سنة 1436 ميلادية.

R

المثلثات المتقايسة و المثلثات المتشابهة

المثلثات المتقايسة

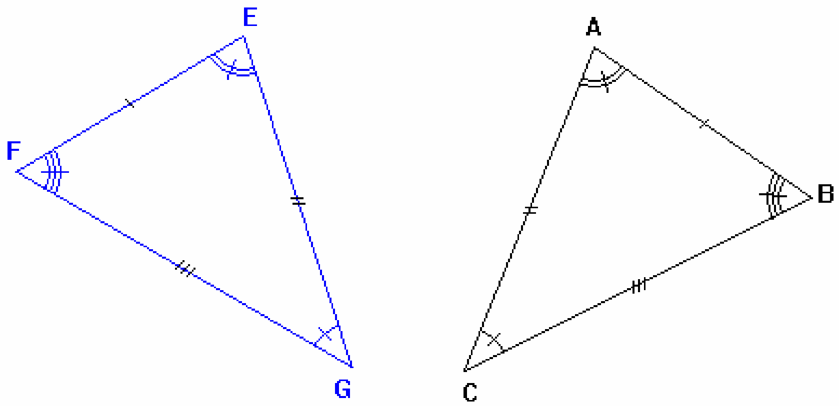
I _ مثلثان متقايسان :

1) – تعريف :

مثلثان متقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق

2) – مثـــال :

ABC و EFG مثلثان متقايسان .



الضلعان [EF] و [AB] يسميان ضلعان متناظران .

و كذلك الضلعان [EG] و [AC] و الضلعان [FG] و [BC] .

الزاويتان $F\hat{E}G$ و $B\hat{A}C$ تسميان زاويتان متناظرتان .

و كذلك الزاويتان $E\hat{F}G$ و $A\hat{B}C$ و الزاويتان $E\hat{G}F$ و $A\hat{C}B$.

3) – خـاصيــة :

إذا كان مثلثان متقايسين فإن أضلاعهما متناظرة متقايسة وزواياهما المتناظرة متقايسة

سيكون لدينا في المثال أعلاه :

$$AB = EF \quad و \quad AC = EG \quad و \quad BC = FG$$

$$A\hat{B}C = E\hat{F}G \quad و \quad A\hat{C}B = E\hat{G}F \quad و \quad A\hat{C}B = E\hat{G}F$$

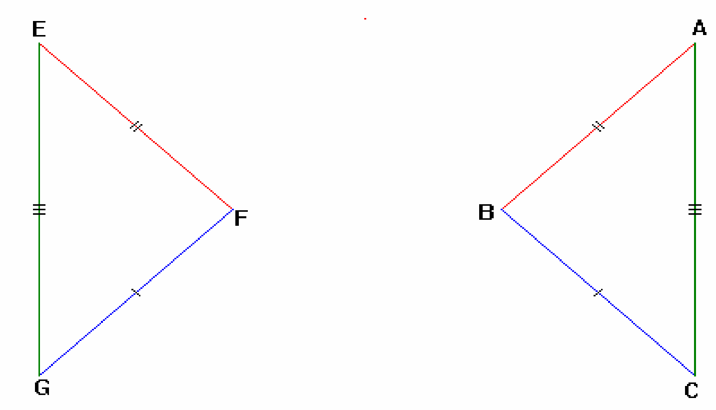
R

II _ حالات التقايس :

1) – الحالة الأولى :

* مثال :

نعتبر ABC و EFG مثلثين بحيث : AB = EF و AC = EG و BC = FG



نقول أن المثلثين ABC و EFG متقايســان .

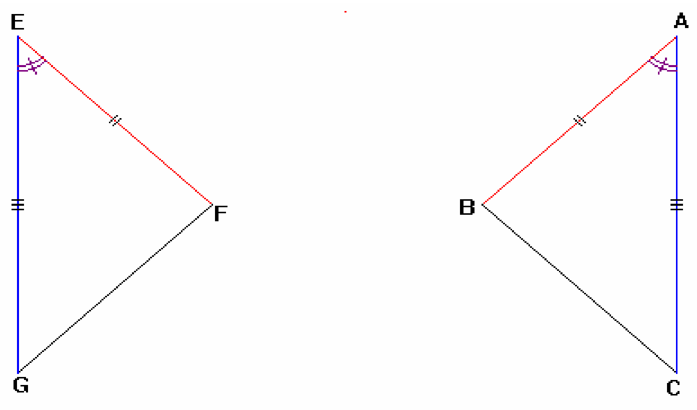
* خاصية :

إذا قايست أضلاع مثلث على التوالي أضلاع مثلث آخر فإن هذين المثلثين متقايســان

2) – الحالة الثانية :

* مثال :

نعتبر ABC و EFG مثلثين بحيث : AB = EF و AC = EG و $B\hat{A}C = F\hat{E}G$



نقول أن المثلثين ABC و EFG متقايســان .

* خاصية :

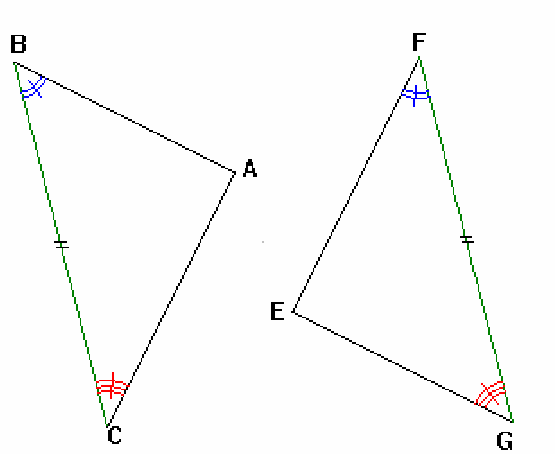
إذا قايس ضلعان في مثلث و الزاوية المحصورة بينهما على التوالي ضلعان في مثلث آخر و الزاوية المحصورة بينهما فإن هذين المثلثين متقايســان

R

3) – الحالة الثالثة :

* مثال :

نعتبر ABC و EFG مثلثين بحيث : $A\hat{B}C = E\hat{F}G$ و $A\hat{C}B = E\hat{G}F$ و $BC = FG$



نقول أن المثلثين ABC و EFG متقايسان .

* خاصية :

إذا قايست زوايتان لمثلث و الضلع المحاذي لهما على التوالي زوايتان لمثلث آخر و الضلع المحاذي لهما فإن هذين المثلثين متقايسـان

** **

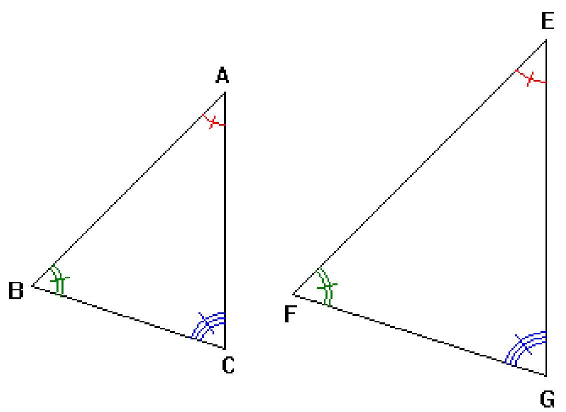
المثلثات المتشابهة

I _ مثلثان متشابهان :

1) – تعريف :

يكون مثلثان متشابهين إذا قايست زوايا أحدهما على التوالي زوايا المثلث الآخر

2) – مثال :



للمثلثين ABC و EFG (الشكل جانبه) :

$A\hat{B}C = E\hat{F}G$ و $A\hat{C}B = E\hat{G}F$ و $B\hat{A}C = F\hat{E}G$

نقول إذن أن ABC و EFG مثلثان متشابها.

* ملاحظات هامة :

1) – الضلعان [EF] و [AB] يسميان ضلعان متناظران .

و كذلك الضلعان [EG] و [AC] و الضلعان [FG] و [BC] .

الزاويتان $F\hat{E}G$ و $B\hat{A}C$ تسميان زاويتان متناظرتان .

و كذلك الزاويتان $E\hat{F}G$ و $A\hat{B}C$ و الزاويتان $E\hat{G}F$ و $A\hat{C}B$.

2) – مثلثان متقايسان هما مثلثان متشابهان .

R

3) – خاصية :

إذا كان مثلثان متشاهان فإن أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة

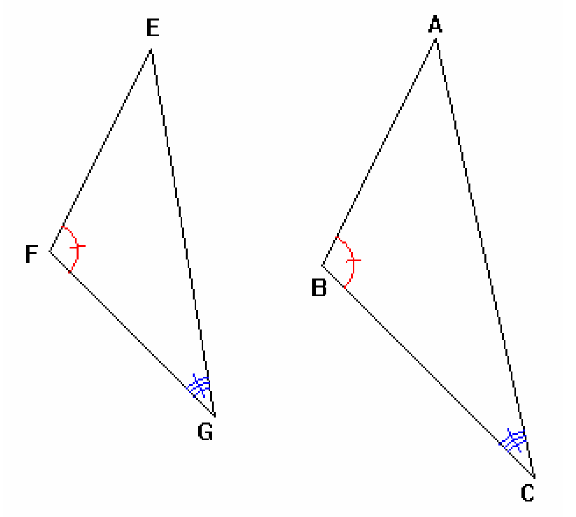
* بتعبير آخر :

إذا كان ABC و EFG مثلثين متشابهين فإن : $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$

II _ حــالات التشـــابه :

1) – الحالة الأولى :

* مثــال :



ABC و EFG مثلثان بحيث :

$A\hat{B}C = E\hat{F}G$ و $A\hat{C}B = E\hat{G}F$.

نقول أن المثلثين ABC و EFG متشابهان

* خـــاصية :

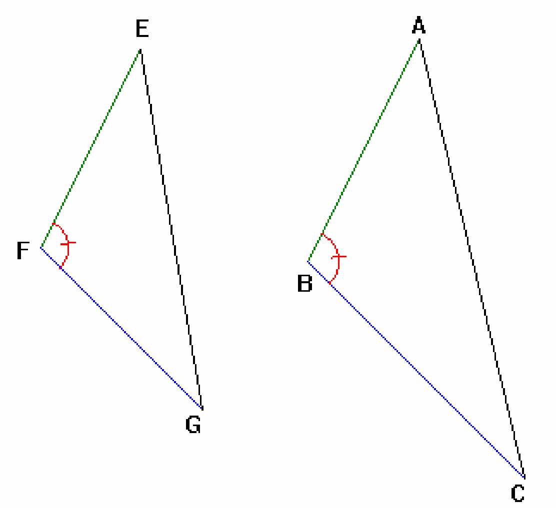
إذا قايست زاويتان في مثلث على التوالي زاويتين في مثلث آخـر فإن المثلثين متشابهان

* بتعبير آخر :

إذا كان ABC و EFG مثلثين بحيث : $A\hat{B}C = E\hat{F}G$ و $A\hat{C}B = E\hat{G}F$ فإنهما متشابهان

2) – الحالة الثانية :

* مثــال :



ABC و EFG مثلثان بحيث :

$A\hat{B}C = E\hat{F}G$ و $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$.

نقول أن المثلثين ABC و EFG متشابهان

* خـــاصية :

إذا قايست زاوية في مثلث زاوية في مثلث آخـر وكانت أطوال الأضلاع المحادية للزاويتين متناسبة فإن المثلثين متشابهان

* بتعبير آخر :

إذا كان ABC و EFG مثلثين بحيث : $A\hat{B}C = E\hat{F}G$ و $\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{FG}$ فإنهما متشابهان

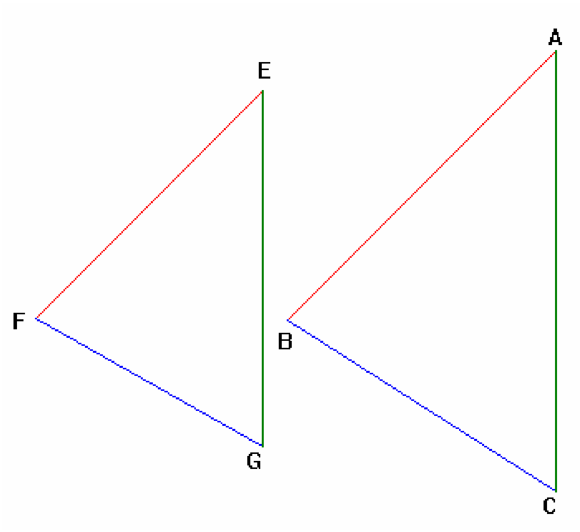
R

3)– الحالة الثالثة :

*** مثــال :**

ABC و EFG مثلثان بحيث :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$$



نقول أن المثلثين ABC و EFG متشابهان

*** خــاصية :**

إذا كانت أطوال أضلاع مثلث متناسبة مع أطوال أضلاع مثلث أخــرفإن المثلثين متشابهان

*** بتعبير آخر :**

إذا كان ABC و EFG مثلثين بحيث :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$$ فإنهما متشابهان

R

نصوص التمارين

1) (ξ) دائرة مركزها O وشعاعها r و M نقطة تقع داخل (ξ).
(Δ) مستقيم يمر من M ويقطع (ξ) في نقطتين A و B
(Δ') مستقيم آخر يمر من M و O ويقطع (ξ) في نقطتين E و F
أ) بين أن المثلثين MAE و MBF متشابهان.
ب) استنتج أن
$MA \times MB = ME \times MF = r^2 - OM^2$.

2) ABC مثلث. لتكن B' المسقط العمودي للنقطة B على (AC) و C' المسقط العمودي للنقطة C على (AB) . أثبت أن : AC'×AB=AB'×AC .

3) ABC و MEN مثلثان متشابهان بحيث [AB] و [AC] متناظران على التوالي مع [ME] و [EN]
أ) أذكر الزوايا المتناظرة بالنسبة لهذين المثلثين.
ب) إذا تعلمت أن:
AB=5 و AC=6 و BC=8 و MN=4
فأحسب ME و EN.

4) ABC و DEF مثلثان متشابهان بحيث:
$\hat{A} = \hat{D}$ و $\hat{E} = \hat{C}$
إذا علمت أن نسبة التشابه هي $\frac{2}{3}$
وأن AB=9 و AC=6 و EF=8
فأحسب BC و DE و DF.

5) ABCD مستطيل بحيث AB=2BC
العمودي على(BD) المار من A يقطع (CD) في E
أ) بين أن المثلثين ADE و BCD متشابهان
ب) استنتج أن $DE = \frac{1}{4}CD$

6) ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A بحيث AB>AC
منصف الزاوية $[A\hat{C}B]$ يقطع [AB] في النقطة E .
المستقيم (Δ) العمودي على (BC) في النقطة B يقطع (EC) في النقطة F
1) أنجز الشكل بأكمله
2) أ - بين أن المثلثين AEC و BFC متشابهان.
ب - استنتج أن AE×FC=EC×FB

7) ليكن ABC مثلث متساوي الساقين في A .
على نصف المستقيم [AC) نعتبر نقطتين M و N

8) ليكن ABC مثلث متساوي الساقين في A و لتكن $\xi(O,R)$ الدائرة المحيطة به. لتكن M منتصف [BC]
و F النقطة بحيث [BF] قطر في الدائرة $\xi(O,R)$
أ) بين أن المثلثين AFB و MCA متشابهان
ب) استنتج أن AB×MC=AF×AM

9) ABCD رباعي محدب محاط بدائرة (ξ) قطرها [AC].
لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على(BD)
قارن المثلثين ABH و ACD
و استنتج أن AB×AD=AC×AH

10) ABC مثلث متساوي الأضلاع لتكن D مماثلة A بالنسبة إلى (BC) و E نقطة من القطعة [AB]
المستقيم (DE) يقطع (AC) في F
أ) قارن المثلثين BDE و CFD
ب) استنتج أن الجداء BE×CF يضل ثابتا عندما تتغير E على [AB] .

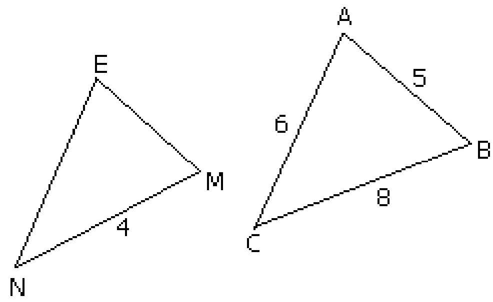
11) ABC مثلث و M نقطة من نصف المستقيم [BA) حيث BM>BA
نفترض أن MA×MB=MC²
أ) قارن المثلثين MAC و MCB
و استنتج أن $A\hat{C}M = A\hat{B}C$
ب) بين أن المستقيم (MC) مماس للدائرة (ξ) المحيطة بالمثلث ABC

12) $[x\hat{A}y]$ زاوية و M نقطة من منصفها الداخلي ($M \neq A$)
لتكن B نقطة من [Ax) و C نقطة من [Ay) حيث :
$AB = \frac{3}{4}AM$ و $AC = \frac{4}{3}AM$
أ) قارن المثلثين ABM و AMC
ب) لتكن B' مماثلة B بالنسبة إلى (AM)
بين أن $A\hat{M}B' = A\hat{C}M$
و استنتج أن الدائرة (ξ) المحيطة بالمثلث MCB' مماسة للمستقيم (AM)

13) لتكن [AA'] و [BB'] و [CC'] ارتفاعات مثلث و H مركز تعامده.
أثبت أن $HA \times HA' = HB \times HB' = HC \times HC'$

حيث $M \in [AC]$ و $M\hat{B}C = N\hat{B}C$ ($M \neq N$)
أ) قارن الزاويتين $[A\hat{B}N]$ و $[A\hat{M}B]$
ب) قارن المثلثين ABN و AMB
و استنتج أن AB²=AM×AN

حلول تمارين المثلثات المتشابهة



1) أ) ABC و MEN مثلثان متشابهان

[AB] و [AC] متناظران على التوالي مع [ME] و [NE]

و منه نستنتج أن الضلع [BC] متناظر مع الضلع [MN] .

الزوايا المتناظرة هي الزوايا المحصورة بين ضلعين متناظرين.

الزاوية $[B\hat{A}C]$ متناظرة مع الزاوية $[M\hat{E}N]$

و الزاوية $[A\hat{B}C]$ متناظرة مع الزاوية $[E\hat{M}N]$

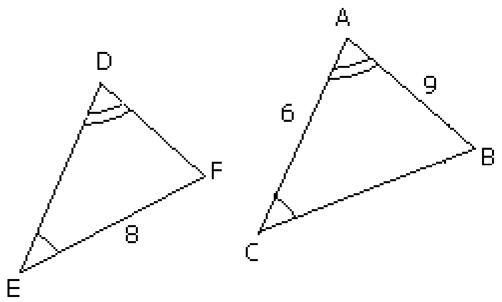
و الزاوية $[A\hat{C}B]$ متناظرة مع الزاوية $[EN\hat{M}]$

ب) الأضلاع المتناظرة متناسبة يعني $\frac{AB}{EM}=\frac{AC}{EN}=\frac{BC}{MN}$

و لدينا AB=5 و AC=6 و BC=8 و MN=4

إذن $\frac{5}{EM}=\frac{6}{EN}=\frac{8}{4}=2$ أي $\frac{5}{EM}=2$ و $\frac{6}{EN}=2$

وبالتالي $EM=\frac{5}{2}$ و $EN=3$



2) $\hat{A}=\hat{D}$ و $\hat{E}=\hat{C}$ و المثلثان ABC و DEF متشابهان

إذن $[\hat{A}]$ و $[\hat{C}]$ متناظرتان على التوالي مع الزاويتين $[\hat{D}]$ و $[\hat{E}]$

و بالتالي الزاوية $[\hat{B}]$ متناظرة مع الزاوية $[\hat{F}]$

و لدينا الأضلاع المتناظرة هي الأضلاع المحصورة بين زوايا متناظرة

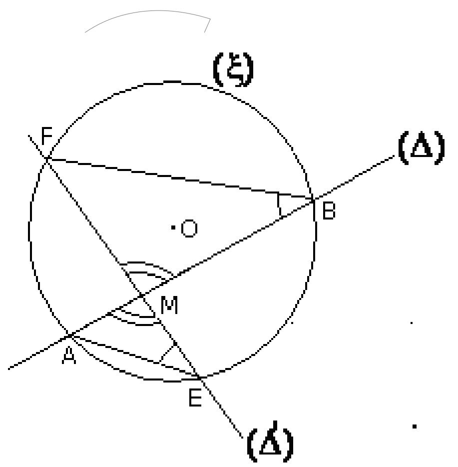
أي [AB] و [AC] و [BC] متناظرة على التوالي مع [DF] و [DE] و [EF]

و بالتالي $\frac{AB}{DF}=\frac{AC}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{2}{3}$ وبما أن: AB=9 و AC=6 و EF=8

فإن: $\frac{9}{DF}=\frac{6}{DE}=\frac{BC}{8}=\frac{2}{3}$

أي $\frac{9}{DF}=\frac{2}{3}$ و $\frac{6}{DE}=\frac{2}{3}$ و $\frac{BC}{8}=\frac{2}{3}$

أي $DF=\frac{27}{2}$ و DE=9 و $BC=\frac{16}{3}$.



3) أ) لدينا الزاويتان $[A\hat{M}E]$ و $[F\hat{M}B]$ متقابلتان بالرأس M

إذن فهما متقايستان أي $A\hat{M}E=F\hat{M}B$

و الزاويتان $[M\hat{E}A]$ و $[F\hat{B}M]$ محيطيتان في الدائرة (ξ) و تحصران نفس القوس [AF]

إذن فهما متقايستان أي $M\hat{E}A=F\hat{B}M$

R

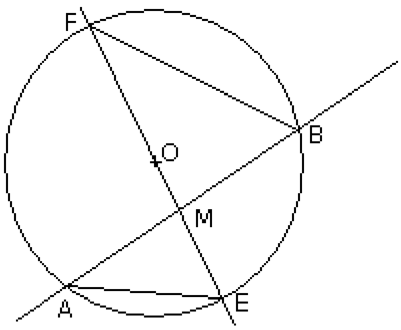
و بالتالي فالمثلث MAE و MBF متشابهان.
(حسب الحالة 1)

ب) من أ) نستنتج أن الزوايا $[A\hat{M}E]$ و $[M\hat{A}E]$ و $[A\hat{E}M]$ (في المثلث AME)
متناظرة على التوالي مع الزوايا $[F\hat{M}B]$ و $[M\hat{F}B]$ و $[M\hat{B}F]$ (في المثلث FMB)
و بالتالي الأضلاع [AM] و [AE] و [ME] متناظرة على التوالي مع الأضلاع [FM] و [BF] و [MB]

و منه $\frac{AM}{FM} = \frac{AE}{BF} = \frac{ME}{MB}$

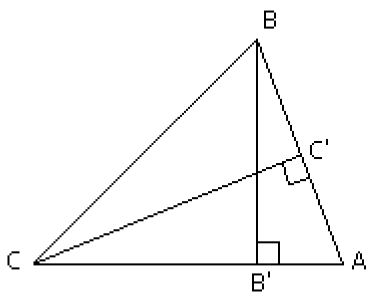
و منه $\frac{MA}{MF} = \frac{ME}{MB}$

أي $MA \times MB = ME \times MF$ **(1)**



نفترض حالة $M \in [OE]$ (أنظر الشكل)
أي $ME = OE - OM$
و $MF = OF + OM$
و لدينا $OE = OF = r$ (لأن $E \in (\xi)$ و $F \in (\xi)$)
و بالتالي $ME \times MF = (OE - OM)(OF + OM)$
$= (r - OM)(r + OM)$
أي $ME \times MF = r^2 - OM^2$ **(2)**
و من **(1)** و **(2)** نستنتج أن $ME \times MF = ME \times MF = r^2 - OM^2$
و نبين نفس النتيجة في حالة $M \in [OF]$

4) نعتبر المثلثين 'ACC و 'ABB (وذلك انطلاقا من الأطوال التي تتضمنها المتساوية $AC' \times AB = AB' \times AC$)

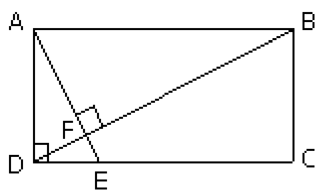


لدينا $[B\hat{A}C]$ زاوية مشتركة بين المثلثين
و $A\hat{B'}B = A\hat{C'}C$ (زاويتان قائمتان)
إذن المثلثان 'ACC و 'ABB متشابهان (حسب الحالة 1)
و منه أطوال الأضلاع المتناظرة (المرتبطة بالزوايا المتناظرة) متناسبة أي:
الضلعين [AB] و ['AB] المتناظرين مع الضلعين [AC] و ['AC] على التوالي متناسبة :

و منه $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$

و منه $AC' \times AB = AB' \times AC$

5) $AB = 2BC$



أ) نبين أن المثلثين ADE و BCD متشابهان
لدينا $A\hat{D}E = 90°$ $B\hat{C}D = 90°$ أي $B\hat{C}D = A\hat{D}E$ (1)
نسمي F نقطة تقاطع (AE) و (BD)
المثلث DEF قائم الزاوية في F لأن (DF) و (AF) متعامدان
و منه الزاويتان $[F\hat{E}D]$ و $[B\hat{D}C]$ متتامتان (2)

R

و في المثلث BCD القائم الزاوية في C لدينا :

الزاويتان $[D\hat{B}C]$ و $[B\hat{D}C]$ متتامتان (3)

و من (2) و (3) نستنتج أن الزاويتين $[F\hat{E}D]$ و $[D\hat{B}C]$ متقايستان أي $D\hat{B}C = F\hat{E}D$ (4)

و من (1) و (4) نستنتج أن المثلثين ADE و BCD متشابهان (حسب الحالة 1)

ب) من أ) نستنتج أن الأضلاع [AD] و [AE] و [DE] (في المثلث ADE)
متناظرة مع الأضلاع [DC] و [BD] و [BC] (في المثلث BCD) على التوالي

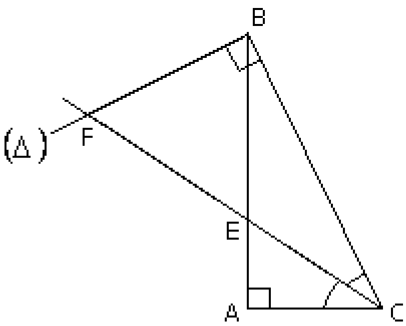
و بالتالي فهي متناسبة أي : $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$

و لدينا AD=BC و DC=AB لأن ABCD مستطيل

و AB=2BC حسب المعطيات أي $BC = \dfrac{1}{2}AB$

أي $DE = BC.\dfrac{AD}{DC} \quad = \dfrac{1}{2}AB.\dfrac{BC}{AB} \quad = \dfrac{1}{2}BC \quad = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}AB) \quad = \dfrac{1}{4}AB$

و لدينا **AB=CD** إذن $DE = \dfrac{1}{4}CD$



6) 2 أ) نبين أن المثلثين AEC و BFC متشابهان

لدينا $A\hat{C}E = B\hat{C}F$ (1) لأن (CE) منصف الزاوية $[A\hat{C}B]$

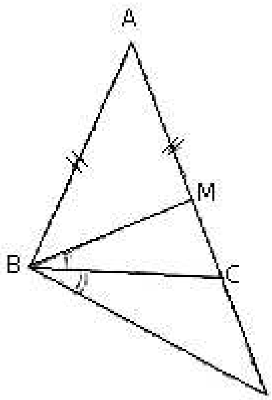
و $C\hat{A}E = 90°$ $C\hat{B}F = 90°$ أي $C\hat{A}E = C\hat{B}F$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين AEC و BFC متشابهان (حسب الحالة 1)

ب) من أ) نستنتج أن الأضلاع [AE] و [AC] و [EC] (في المثلث AEC)
متناظرة مع الأضلاع [BF] و [BC] و [FC] (في المثلث BFC)

و بالتالي فأطوالها متناسبة أي : $\dfrac{AE}{BF} = \dfrac{EC}{FC}$

و منه AE×FC=EC×BF



7) أ) نقارن الزاويتين $[A\hat{B}N]$ و $[A\hat{M}B]$

لدينا $A\hat{B}N = A\hat{B}C + N\hat{B}C$ (1) (انظر الشكل)

و في المثلث MBC الزاوية $[A\hat{M}B]$ خارجية

ومنه $A\hat{M}B = M\hat{B}C + M\hat{C}B$

و لدينا $M\hat{C}B = A\hat{C}B$ (انظر الشكل)

و $M\hat{B}C = N\hat{B}C$ (حسب المعطيات)

إذن $A\hat{M}B = A\hat{C}B + N\hat{B}C$ (2)

$= A\hat{B}C + N\hat{B}C$

(لدينا $A\hat{C}B = A\hat{B}C$ لأن المثلث ABC متساوي الساقين في A)

من (1) و (2) نستنتج أن $A\hat{B}N = A\hat{M}B$

ب) نقارن المثلثين ABN و AMB و نستنتج أن $AB^2=AM\times AN$

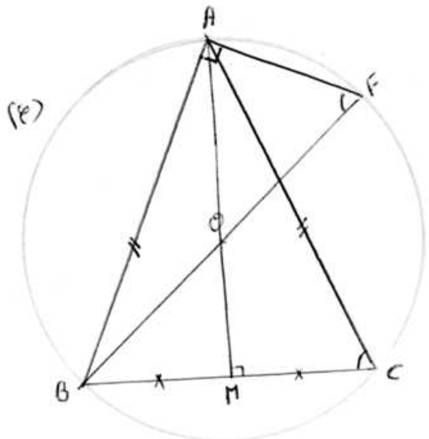
لدينا $A\hat{B}N = A\hat{M}B$ (حسب أ) و الزاوية $[B\hat{A}N]$ مشتركة

إذن المثلثان ABN و AMB متشابهان (حسب الحالة 1)

و بالتالي أطوال الأضلاع [AB] و [AN] (في المثلث ABN) المتناظرة

مع أطوال الأضلاع [AM] و [AB] (في المثلث AMB) على التوالي متناسبة

و منه $\frac{AN}{AB} = \frac{AB}{AM}$ أي $AB^2=AM\times AN$



8) أ) نبين أن المثلثين AFB و MCA متشابهان

لدينا M منتصف [BC] أي (AM) متوسط في المثلث ABC المتساوي

الساقين في A إذن (AM) هو كذلك واسط [BC] أي $A\hat{M}C = 90°$

و لدينا $B\hat{A}F = 90°$ لأن [BF] قطر في $\xi(O,R)$

أي المثلث ABF قائم الزاوية في A

إذن $A\hat{M}C = B\hat{A}F$ (1)

و الزاويتان $[A\hat{F}B]$ و $[B\hat{C}A]$ محيطيتان في الدائرة $\xi(O,R)$ و تحصران

نفس القوس [AB]

إذن $B\hat{C}A = A\hat{F}B$ (2)

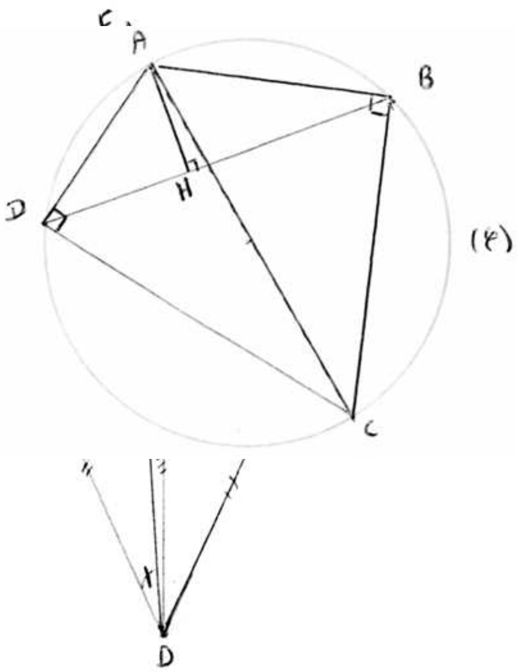
و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين AFB و MCA متشابهان (حسب الحالة 1)

ب) من أ) نستنتج أن الضلعين [AB] و [AF] (في المثلث AFB) متناظرتان على التوالي

مع الضلعين [AM] و [MC] (في المثلث MCA)

و بالتالي أطوالها متناسبة أي $\frac{AF}{MC} = \frac{AB}{AM}$

أي $AB\times MC=AF\times AM$



9) نقارن المثلثين ABH و ACD :

لدينا [AC] قطر في الدائرة (ξ) و $D \in (\xi)$

إذن $A\hat{D}C = 90°$

ولدينا $A\hat{H}B = 90°$ (1)

و الزاويتان $[A\hat{B}H]$ و $[A\hat{C}D]$ محيطيتان في الدائرة (ξ)

وتحصران نفس القوس [AD]

و منه $A\hat{B}H = A\hat{C}D$ (2)

ومن (1) و (2) نستنتج أن المثلثين ABH و ACD متشابهان

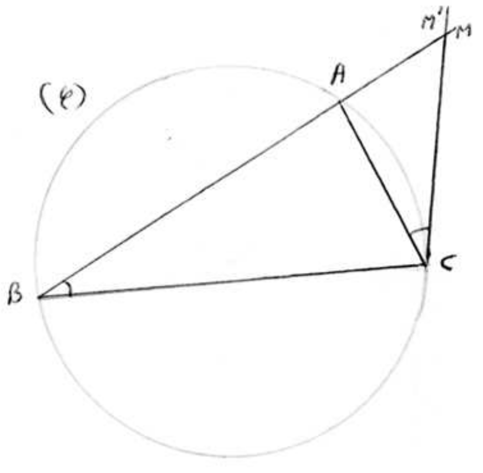
R

(حسب حالة 1)
و بالتالي الضلعان [AB] و [AH] (في المثلث ABH) المتناظران
على التوالي مع الضلعين [AC] و [AD] متناسبة
أي $\frac{AH}{AD}=\frac{AB}{AC}$ أي AB×AD=AC×AH

10) أ) نعتبر النقطة I منتصف [BC]
لدينا إذن I منتصف [AD] (لأن ABC متساوي الأضلاع أي (AI) محور تماثل للمثلث ABC)
إذن الرباعي ABDC متوازي الأضلاع و هو معين.
و بالتالي $E\hat{B}D=A\hat{C}D$ (1)
و لدينا (AC)//(BD) و (EF) قاطع
و بالتالي الزاويتان $[C\hat{F}D]$ و $[B\hat{D}E]$ المتبادلتان داخليا متقايستان أي : $B\hat{D}E=C\hat{F}D$ (2)
و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين BDE و CFD متشابهان (حسب الحالة 1)

ب) من أ) نستنتج أن الضلعين [BD] و [BF]
(في المثلث ADE) متناظران على التوالي مع الضلعين [CF] و [CD] (في المثلث CFD)
و بالتالي $\frac{BE}{CD}=\frac{BD}{CF}$
أي BE×CF=CD×BD و CD×BD ثابت (أي غير مرتبط ب E)
و بالتالي يضل الجداء BE×CF الجداء ثابتا عندما تتغير E على [AB]

11) نفترض
أ) نقارن المثلثين MAC و MBC
لدينا الزاوية $[A\hat{M}C]$ مشتركة بين المثلثين (1)
و لدينا MA×MB=MC²
أي $\frac{MC}{MB}=\frac{MA}{MC}$ (2)
من (1) و(2) نستنتج أن المثلثين MAC و MBC متشابهان (
حسب الحالة 2)
وبما أن الضلعان [MA] و [MC]
(في المثلث MAC) متناظرة على التوالي مع الضلعين [MC] و
[MB] (في المثلث MCB) فإن الزاويتين $[A\hat{C}M]$ و $[M\hat{B}C]$
المحاذيتين لكل من الضلعين متناظرتين وبالتالي متقايستان
(لأن $[M\hat{B}C]=[A\hat{B}C]$)
أي $A\hat{C}M=A\hat{B}C$



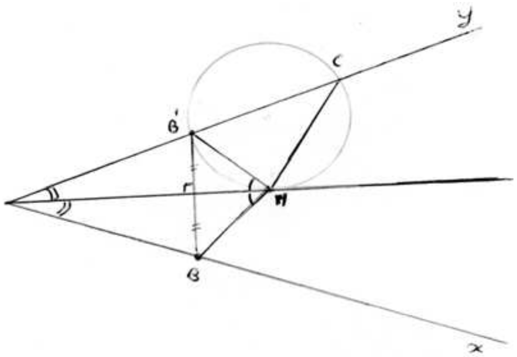
ب) في الدائرة (ع) المحيطة بالمثلث ABC
الزاوية $[A\hat{B}C]$ محيطية في الدائرة (ع) و تحصر القوس [AC]
و إذا افترضنا نقطة 'M من [BA] بحيث يكون ('CM) مماسا للدائرة (ع) في C فيكون لدينا $[A\hat{C}M']$ محيطية في (ع) و تحصر نفس القوس [AC]
و بالتالي $A\hat{B}C=A\hat{C}M'$

R

و حسب أ) $A\hat{B}C = A\hat{C}M$

و بالتالي $A\hat{C}M = A\hat{C}M'$ أي أن M'=M

و بالتالي المستقيم (CM) مماس للدائرة (ع) المحيطة بالمثلث ABC في النقطة C



12) $AB = \frac{3}{4}AM$ و $AC = \frac{4}{3}AM$

أ) نقارن المثلثين ABM و AMC

لدينا $M\hat{A}C = M\hat{A}B$ (لأن (AM) منصف للزاوية $[x\hat{A}y]$ (1)

و $AB = \frac{3}{4}AM$ و $AC = \frac{4}{3}AM$

أي $\frac{AB}{AM} = \frac{3}{4}$ و $\frac{AC}{AM} = \frac{4}{3}$

أي $\frac{AB}{AM} = \frac{3}{4}$ و $\frac{AM}{AC} = \frac{3}{4}$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن المثلثين ABM و AMC متشابهان (حسب الحالة 2)

ب) بالتماثل المحوري الذي محوره (AM) : $S_{(AM)}$

$S_{(AM)}$: A→A

$S_{(AM)}$: B→B'

أي $[A\hat{M}B] \rightarrow [A\hat{M}B']$

و بالتالي $A\hat{M}B = A\hat{M}B'$ (3)

ومن أ) نستنتج أن الزاوية $[A\hat{M}B]$ (في المثلث ABM) متناظرة مع الزاوية $[A\hat{C}M]$ (في المثلث AMC)

ومنه $A\hat{M}B = A\hat{C}M$ (4)

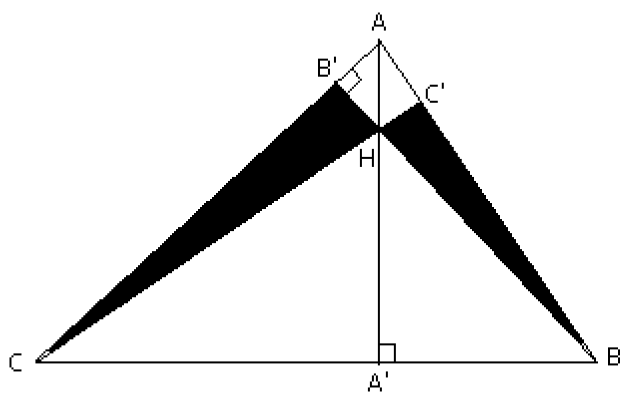
ومن (3) و (4) نستنتج أن $A\hat{M}B' = A\hat{C}M$

ومثل السؤال ب) من التمرين 11)

نستنتج أن الزاويتين $[A\hat{C}M]$ و $[A\hat{M}B']$ محيطيتان في

(ع) و تحصران نفس القوس [B'M] و أ، المستقيم (AM)

مماس للدائرة (ع) في M



13) نثبت أن HA×HA'=HB×HB'=HC×HC'

نعتبر المثلثين AHB' و BHA'

R

لدينا $A\hat{B}'H = B\hat{A}'H = 90°$

و $A\hat{H}B' = B\hat{H}A'$ (لأن الزاويتين $[A\hat{H}B']$ و $[B\hat{H}A']$ متقابلتان بالرأس H)

و بالتالي فالمثلثان 'AHB و 'BHA متشابهان

و منه الأضلاع المتناظرة متناسبة أي :

$$\frac{HA}{HB} = \frac{HB'}{HA'}$$

و منه $HA \times HA' = HB \times HB'$ (1)

نعتبر كذلك المثلثين 'BHC و 'CHB

لدينا $H\hat{B}'C = H\hat{C}'B = 90°$

و $B\hat{H}C' = B'\hat{H}C$ (لأن الزاويتين $[B'\hat{H}C]$ و $[B\hat{H}C']$ متقابلتان بالرأس H)

و بالتالي فالمثلثين 'BHC و 'CHB متشابهان ومنه الأضلاع المتناظرة متناسبة أي :

$$\frac{HB}{HC} = \frac{HC'}{HB'}$$

و منه $HB \times HB' = HC \times HC'$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن :

$HA \times HA' = HB \times HB' = HC \times HC'$

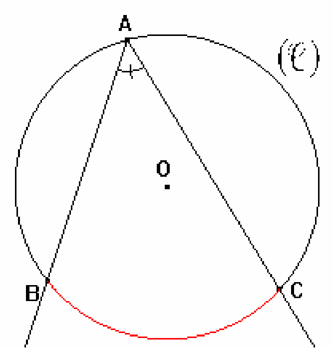
R

الزوايا المحيطية و الزوايا المركزية

I _ الزاوية المحيطية :

1) – تعريف :

الزاوية المحيطية هي كل زاوية رأسها ينتمي إلى دارة و ضلعاها يقطعان الدائرة



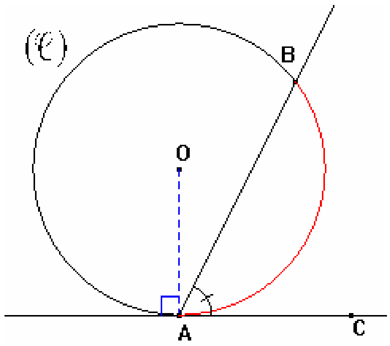
نعتبر الشكـل جانبه :

لدينا الزاوية $B\hat{A}C$ زاوية محيطية.

نقول كذلك : $B\hat{A}C$ زاوية محيطية تحصر القوس $\overset{\frown}{BC}$.

3) – حالة خاصة :

لاحظ الشكـل جانبه بحيث المستقيم (AC) مماس للدئرة في النقطة A .

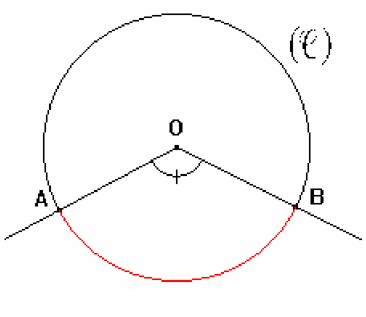


لدينا : الزاوية $B\hat{A}C$ زاوية محيطية تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$.

II _ الزاوية المركزية :

1) – تعريف :

الزاوية المركزية هي كل زاوية رأسها مركز دارة و ضلعاها يقطعان الدائرة



2) – مثال :

نعتبر الشكـل جانبه :

لدينا الزاوية $A\hat{O}B$ زاوية مركزية.

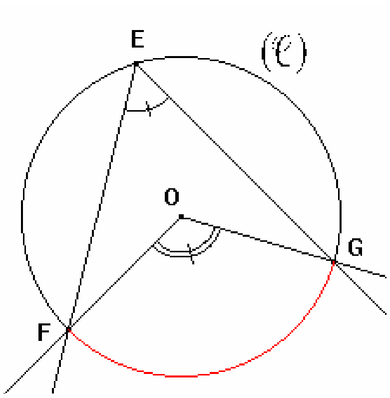
نقول كذلك : الزاوية $A\hat{O}B$ زاوية مركزية تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$.

R

III _ خصـــائص :

1) – الخــاصية الأولى :

تكون زاوية مركزية مرتبطة بزاوية محيطية
إذا كانتا تحصران نفس القــوس



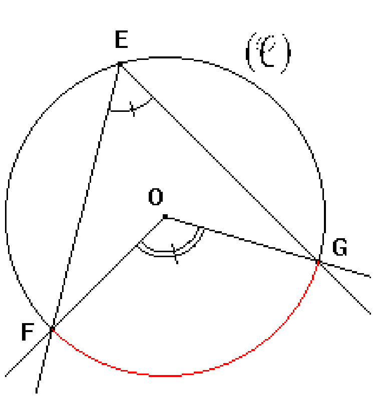
* مثال :

لاحظ الشكـل جانبه :

نقول : الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $F\hat{E}G$ هي $F\hat{O}G$
لأنهما تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{FG}$

2) – الخــاصية الثانية :

قياس زاوية محيطية يساوي نصف قياس الزاوية
المركزية المرتبطة بها



* مثال :

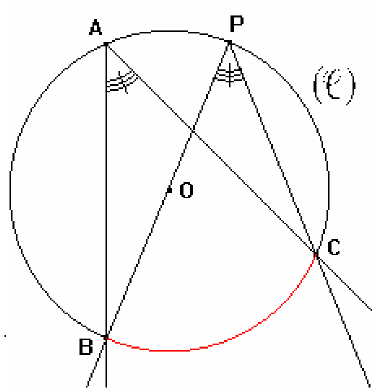
لاحظ الشكـل جانبه :

لدينا : $F\hat{E}G$ زاوية محيطية و $F\hat{O}G$ الزاوية المركزية المرتبطة بها.

إذن : $F\hat{E}G = \frac{1}{2} F\hat{O}G$

3) – الخــاصية الثالثة :

زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس
تكونان مقايستين



* مثال :

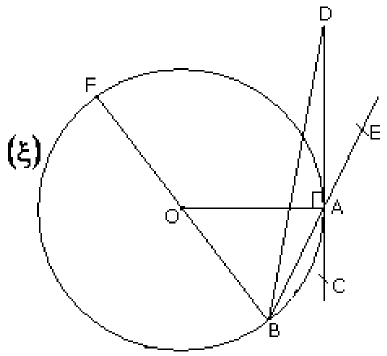
لاحظ الشكـل جانبه :

لدينا : $B\hat{A}C$ و $B\hat{P}C$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{BC}$

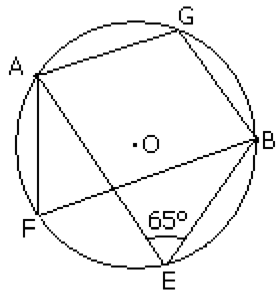
إذن : $B\hat{A}C = B\hat{P}C$

R

نصوص التمارين



1) انطلاقا من الشكل التالي : حيث (ξ) دائرة مركزها O
حدد الزوايا المحيطية من بين الزوايا التالية :
$[B\hat{A}C]$, $[C\hat{A}E]$, $[A\hat{B}D]$, $[A\hat{O}B]$, $[E\hat{A}D]$
$[D\hat{A}F]$, $[D\hat{B}F]$, $[C\hat{D}B]$



2) في الشكل التالي (ξ) دائرة مركزها O
حدد قياس الزوايا :
$[A\hat{F}B]$, $[A\hat{O}B]$, $[A\hat{G}B]$

3) ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A و (ξ) الدائرة المحيطة به . لتكن M نقطة تنتمي إلى القوس الصغرى [BC] ($M \neq C$ و $M \neq B$)
بين أن نصف المستقيم [MA) هو منصف الزاوية $[B\hat{M}C]$

4) لتكن (ξ) دائرة محيطة بمثلث ABC متساوي الأضلاع و M نقطة تنتمي إلى القوس الصغرى [AB]
أحسب قياسات الزوايا $[A\hat{M}C]$, $[C\hat{M}B]$, $[A\hat{M}B]$

5) (ξ) و (ξ') دائرتان لهما نفس الشعاع r و متقاطعتان في A و B لتكن O مركز (ξ) و 'O مركز (ξ') . (Δ) مستقيم مار من A يقطع (ξ) في M ($M \neq A$ و $M \neq B$) و (ξ') في 'M ($M' \neq A$ و $M' \neq B$) .
أ) بين أن الرباعي 'AOBO معين.
ب) استنتج أن المثلث 'MBM متساوي الساقين.

6) لتكن (ξ) دائرة مركزها O و [AB] و [CD] قطرين حاملاهما متعامدان . ولتكن M نقطة من القوس الصغرى [AC] بحيث $M \neq A$ و $M \neq C$
أحسب قياسات الزوايا $[A\hat{M}D]$ و $[C\hat{M}B]$ و $[B\hat{M}D]$ و $[A\hat{M}C]$
و $[A\hat{M}B]$ و $[C\hat{M}D]$

7) ليكن ABC مثلثا و O مركز الدائرة المحيطة به (ξ) .
المستقيمان (CO) و (BO) يقطعان الدائرة (ξ) في M و N على التوالي $M \neq C$ و $N \neq B$
أتبث أن $C\hat{A}N = B\hat{A}M$

8) ABC مثلث محاط بدائرة (ξ) مركزها O . المنصفان الداخلي و الخارجي للزاوية $[C\hat{A}B]$ يقطعان (ξ) في D و 'D .
أ) بين أن النقط D و 'D و O مستقيمية.
ب) برهن أن ('DD) واسط [BC] .

R

9) ليكن [AB] وتر في دائرة (ξ) مركزها O ولتكن I منتصف القوس الصغرى [AB] و C النقطة المقابلة قطريا للنقطة A (أي [AC] قطر في الدائرة (ξ)) . المستقيم المار من I و العمودي على (AC) يقطع [AB] في M .
المستقيم (IC) يقطع [AB] في N
أتبث أن IM=AM=MN

10) ليكن ABC مثلثا و O مركز دائرته المحيطة (ξ). المنصف الداخلي للزاوية $[B\hat{A}C]$ يقطع (ξ) في D .
المستقيم المار من D و الموازي للمستقيم (AB) يقطع (ξ) في E. ($D \neq E$)
أتبث أن CD=AE

11) ليكن ABC مثلثا و(ξ) دائرته المحيطة. المنصف الداخلي للزاوية $[B\hat{A}C]$ يقطع (ξ) في O .
الدائرة (ξ') التي مركزها O وشعاعها OB تقطع [AO] في I .
أتبث أن I هي نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزوايا المثلث ABC .

12) ليكن [AB] وتر في دائرة (ξ) و C نقطة تنتمي إلى المماس للدائرة (ξ) في النقطة A بحيث AC=AB
المستقيم (BC) يقطع الدائرة (ξ) في نقطة ثانية D ($D \neq B$)
أتبث أن المثلث ADC متساوي الساقين.

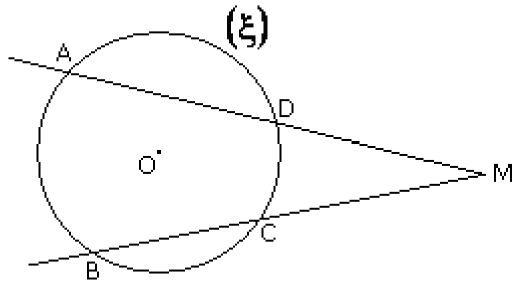
13) ليكن ABC مثلثا و O مركز دائرته المحيطة (ξ). و [AH] ارتفاع له و D هي نقطة تقاطع منصف الزاوية $[B\hat{A}C]$ مع (ξ) ($D \neq A$)
أثبت أن : (AD) هو منصف للزاوية $[O\hat{A}H]$

14) ABC مثلث متساوي الأضلاع و (ξ) الدائرة المحيطة به
لتكن D نقطة من القوس الصغرى [AB] و M نقطة منتمية إلى [DC] بحيث DM=DA
أ) برهن على أن المثلث DAM متساوي الأضلاع.
ب) (AM) يقطع (ξ) في E ($E \neq A$) برهن على أن الرباعي DMEB متوازي الأضلاع.
ج) برهن على أن المثلث MEC متساوي الأضلاع و أن DB=MC.
د) برهن على أن : DC = DA + DB .

15) (ξ) دائرة مركزها O . A و B نقطتان منتميتان إلى (ξ) A و B نقطتان منتميتان إلى (ξ)
نعتبر نقطة M خارج (ξ). (AM) يقطع (ξ) في D ($D \in [AM]$ و $D \neq A$)
(BM) يقطعها في C ($C \in [BM]$ و $C \neq B$)

برهن على أن : $A\hat{M}B = \frac{1}{2}(A\hat{O}B - D\hat{O}C)$

R



حلول التمارين

1) الزوايا المحيطية

$[D\hat{B}F]$ ، $[D\hat{A}F]$ ، $[A\hat{B}D]$ ، $[B\hat{A}C]$

2) $A\hat{F}B = A\hat{E}B = 65°$ محيطيتان في الدائرة (ع) و تحصران نفس القوس

الزاوية $[A\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[A\hat{E}B]$

إذن $A\hat{O}B = 2A\hat{E}B$ و لدينا $A\hat{E}B = 65°$ إذن $A\hat{O}B = 130°$

الزاوية $[A\hat{G}B]$ و $[A\hat{E}B]$ محيطيتان وتحصران قوسين لهما نفس الطرفين A و B و رأساهما G و E لا ينتميان إلى نفس القوس إذن فهما متكاملتين

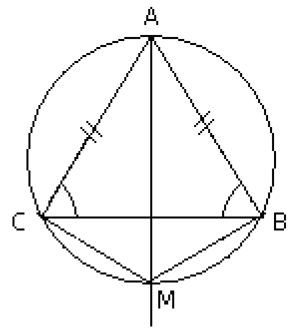
و منه $A\hat{G}B + A\hat{E}B = 180°$

أي $A\hat{G}B = 180° - A\hat{E}B$

أي $A\hat{G}B = 180° - 65°$

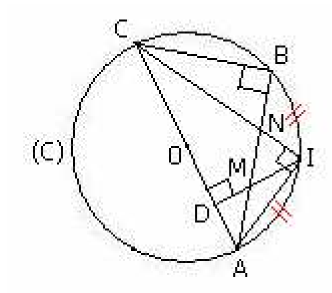
أي $A\hat{G}B = 115°$

3)



الزاويتان $[A\hat{M}B]$ و $[A\hat{C}B]$ محيطيتان

9)



ليكن D المسقط العمودي للنقطة I على المستقيم (AC)

المثلث DCI قائم الزاوية في D لأن (DC) و (ID) متعامدان

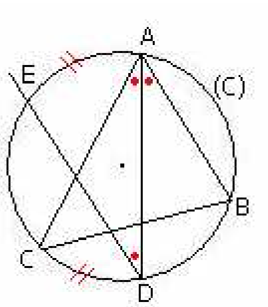
المثلث INA قائم الزاوية في I لأن [AC] قطر في (ع)

الزاويتان $[N\hat{C}A]$ و $[N\hat{A}I]$ محيطيتان وتحصران قوسين متقايسين [AI] و [IB] إذن فهما متقايستان و بالتالي تكون متممتاهما $[M\hat{I}N]$ $[M\hat{N}I]$ على التوالي متقايستان أيضا و بالتالي فإن المثلث MIN متساوي الساقين في M و منه IM=MN (1)

و بالمثل نبين أن المثلث MIA متساوي الساقين في M ومنه IM=AM (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن IM=AM=MN

10)

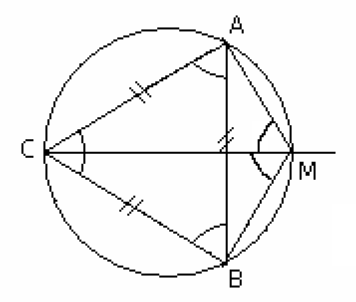


نصف المستقيم [AD) منصف للزاوية $[C\hat{A}B]$ إذن الزاويتان $[C\hat{A}D]$ و $[D\hat{A}B]$ متقايستان.

الزاويتان $[A\hat{D}E]$ و $[D\hat{A}B]$

[$A\hat{C}B$] محيطيتان وتحصران نفس القوس [AB]
إذن $A\hat{M}B = A\hat{C}B$ **(1)**
الزاويتان [$A\hat{M}C$] و [$A\hat{B}C$] محيطيتان وتحصران نفس القوس [CA]
إذن $A\hat{M}C = A\hat{B}C$ **(2)**
و لدينا $A\hat{C}B = A\hat{B}C$ **(3)** لأن المثلث ABC متساوي الساقين في A
و من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $A\hat{M}B = A\hat{M}C$
و بالتالي [MA) هو منصف الزاوية [$B\hat{M}C$].

4)

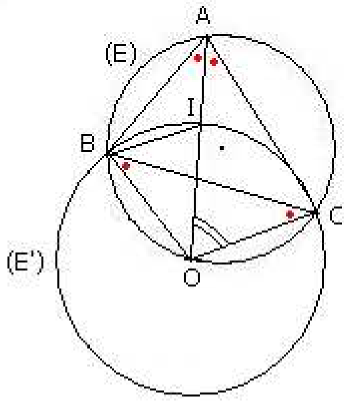


الزاويتان [$A\hat{M}C$] و [$A\hat{B}C$] محيطيتان وتحصران نفس القوس [CA]
إذن $A\hat{M}C = A\hat{B}C$
لدينا $A\hat{B}C = 60°$
لأن المثلث ABC متساوي الأضلاع
إذن $A\hat{M}C = 60°$
الزاويتان [$C\hat{M}B$] و [$B\hat{A}C$] محيطيتان وتحصران نفس القوس [BC]
إذن $C\hat{M}B = B\hat{A}C$
لدينا $B\hat{A}C = 60°$ لأن المثلث ABC متساوي الأضلاع
إذن $C\hat{M}B = 60°$
الزاويتان [$A\hat{M}C$] و [$C\hat{M}B$] متجاديتان و منه
$$A\hat{M}B = C\hat{M}B + A\hat{M}C$$
$$= 60° + 60°$$
أي $A\hat{M}B = 120$

<u>ملاحظة :</u>
يمكن إيجاد قياس الزاوية [$A\hat{M}B$] بملاحظة أنها و [$A\hat{C}B$] محيطيتان وتحصران قوسين لهما نفس الطرفين A و B و رأساهما M و C لا ينتميان إلى نفس القوس ، إذن [$A\hat{M}B$] و [$A\hat{C}B$] متكاملتان،
أي $A\hat{M}B + A\hat{C}B = 180°$ و $A\hat{C}B = 60°$
إذن $A\hat{M}B = 120°$

متقايستان لأنهما متبادلتان داخليا
و لأن (DE) و (AB) متوازيان و (AD) قاطع لهما.
إذن الزاويتان المحيطيتان [$C\hat{A}D$] و [$A\hat{D}E$] متقايستان.
إذن فإنهما تحصران قوسين متقايسين [CD] و [AE] و بالتالي وترين متقايسين
أي أن CD=AE

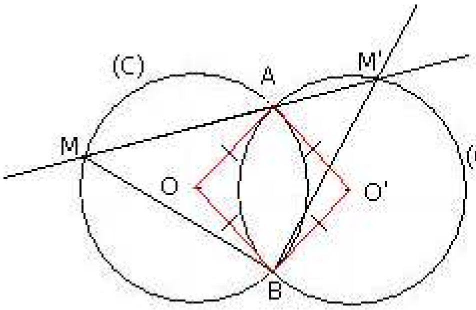
11)



لتكن (E') الدائرة التي مركزها هو O وشعاعها هو OB.
الزاويتان [$O\hat{A}B$] و [$O\hat{C}B$] متقايستان لأنهما محيطيتان في الدائرة (E)، وتحصران نفس القوس [$O\hat{B}$].
لدينا إذن :
$O\hat{A}B = O\hat{C}B$
الزاويتان [$O\hat{A}C$] و [$O\hat{B}C$] محيطيتان في الدائرة (E) و تحصران نفس القوس [OC]، فهما متقايستان.
لدينا إذن : $O\hat{A}C = O\hat{B}C$
وحيث أن : $O\hat{A}B = O\hat{A}C$ فإن : $O\hat{C}B = O\hat{B}C$.
ومنه نستنتج أن المثلث OBC متساوي الساقين وأن : $OB = OC$
وهذا يدل على أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (E') .
الزاوية [$I\hat{B}C$] محيطية في الدائرة (E') والزاوية المركزية المرتبطة بها هي [$I\hat{O}C$]،
وبالتالي فإن $I\hat{B}C = \frac{1}{2} I\hat{O}C$.
الزاويتان [$I\hat{O}C$] (أو [$A\hat{O}C$]) و [$A\hat{B}C$] محيطيتان في الدائرة (E) وتحصران تفس القوس [AC]، وبالتالي فإن : $I\hat{O}C = A\hat{B}C$. تستنتج إذن أن : $I\hat{B}C = \frac{1}{2} A\hat{B}C$.
أي أن (BI) منصف للزاوية [$A\hat{B}C$] وحيث أن (AI) منصف للزاوية [$C\hat{A}B$]. فإن I هي نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزوايا المثلث ABC.

R

5)



أ)لدينا OA=OB =O'A= O'B لأن للدائرتين (ع) و (ع') نفس الشعاع r و $A\in(ع)$ و $B\in(ع)$ و $A\in(ع')$ و $B\in(ع')$

إذن AOBO' معين

ب) الزاوية $[A\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[A\hat{M}B]$ في الدائرة (ع)

إذن $A\hat{M}B=\frac{1}{2}A\hat{O}B$ (1)

الزاوية $[A\hat{O}'B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[A\hat{M}'B]$ في الدائرة (ع')

إذن $A\hat{M}'B=\frac{1}{2}A\hat{O}'B$ (2)

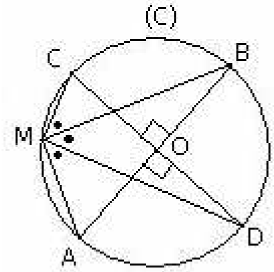
و بما أن AOBO' معين فإن $A\hat{O}B=A\hat{O}'B$ لأن الزاويتين $[A\hat{O}B]$ و $[A\hat{O}'B]$ متقابلتان في المعين AOBO'

و منه $\frac{1}{2}A\hat{O}B=\frac{1}{2}A\hat{O}'B$ (3)

ومن (1) و (2) و (3) نستنتج ان $A\hat{M}B=A\hat{M}'B$

و بالتالي المثلث MBM' متساوي الساقين في B

6)



الزاوية $[A\hat{O}D]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[A\hat{M}D]$ و

لدينا $A\hat{O}D=90°$

لأن المستقيمين (CD) و (AB) متعامدان في O

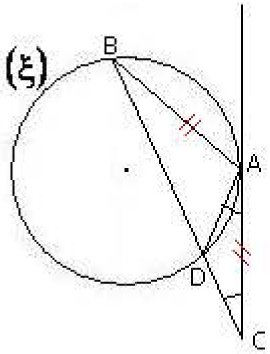
و منه $A\hat{M}D=\frac{1}{2}\times 90°$

أي $A\hat{M}D=45°$

الزاوية $[C\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة

بالزاوية المحيطية $[C\hat{M}B]$ و لدينا $C\hat{O}B=90°$

12)



الزاوية $[C\hat{A}D]$ محيطية في الدائرة (ع) وتحصر القوس [AD]

و الزاوية $[A\hat{B}D]$ محيطية في الدائرة (ع) و تحصر نفس القوس [AD]

إذن $A\hat{B}D=C\hat{A}D$ (1)

و لدينا AB=AC

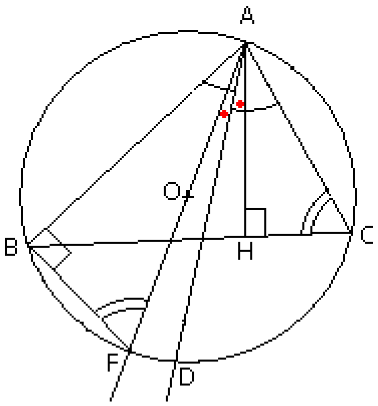
إذن المثلث ABC متساوي الساقين في A

و بالتالي $A\hat{B}D=A\hat{C}D$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن $A\hat{C}D=C\hat{A}D$

و بالتالي ADC مثلث متساوي الساقين في D

13)



نعتبر النقطة F المقابلة قطريا بالنقطة A أي [AF] قطر في (ع)

المثلث BAF قائم الزاوية في B و بالتالي فإن الزاوية $[O\hat{A}B]$ تتمم الزاوية $[A\hat{F}B]$.

أي $O\hat{A}B+A\hat{F}B=90°$

و كذلك الزاوية $[H\hat{A}C]$ تتمم الزاوية $[A\hat{C}B]$ في المثلث القائم الزاوية AHC

أي $H\hat{A}C+A\hat{C}B=90°$

الزاويتان $[A\hat{F}B]$ و $[A\hat{C}B]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [AB] فهما إذن زاويتان متقايستان و بالتالي فإن متممتيهما $[O\hat{A}B]$ و $[H\hat{A}C]$ متقايستان : أي $O\hat{A}B=H\hat{A}C$ (1)

و بما أن (AD) منصف للزاوية $[B\hat{A}C]$ فإن $B\hat{A}D=C\hat{A}D$ (2)

و نستنتج من (1) و (2) أن :

$B\hat{A}D-O\hat{A}B=C\hat{A}D-H\hat{A}C$ (2)-(1)

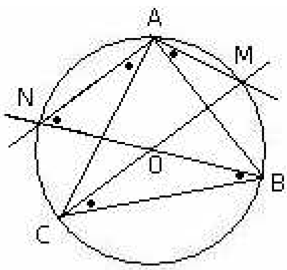
إذن : $O\hat{A}D=D\hat{A}H$

و بالتالي فإن (AD) منصف كذلك للزاوية $[O\hat{A}H]$.

R

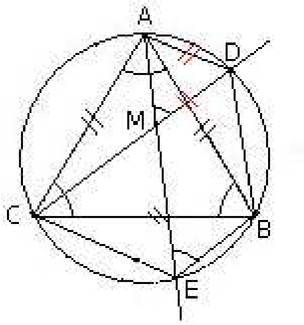
بالزاوية المحيطية $[C\hat{M}B]$ و لدينا $C\hat{O}B = 90°$
لأن المستقيمين (OD) و (OC) متعامدان في O
و منه $C\hat{M}B = \frac{1}{2} \times 90°$
أي $C\hat{M}B = 45°$
الزاوية $[B\hat{O}D]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة
بالزاوية المحيطية $[B\hat{M}D]$ و لدينا $B\hat{O}D = 90°$
لأن المستقيمين (OD) و (OB) متعامدان في O
و منه $B\hat{M}D = \frac{1}{2} \times 90°$
أي $B\hat{M}D = 45°$
لدينا $A\hat{M}C = A\hat{M}D + D\hat{M}B + B\hat{M}C$
إذن $A\hat{M}C = 45° + 45° + 45°$
أي $A\hat{M}C = 135°$
الزاوية $[A\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة
بالزاوية المحيطية $[A\hat{M}B]$ و لدينا $A\hat{O}B = 180°$
لأن النقط A و O و B مستقيمية و $O \in [AB]$
و منه $A\hat{M}B = \frac{1}{2} \times 180°$
أي $A\hat{M}B = 90°$
و بالمثل نبين أن $C\hat{M}D = 90°$
ملاحظة: يمكن في الحالتين الأخيرتين استعمال خاصية مثلث أحد أضلاعه هو قطر(أي محاط بنصف دائرة)

7)



الزاويتان $[C\hat{A}N]$ و $[C\hat{B}N]$ محيطيتان في الدائرة $(\mathcal{C})$ و تحصران نفس القوس [CN]
إذن $C\hat{A}N = C\hat{B}N$ (1)
الزاويتان $[B\hat{A}M]$ و $[B\hat{C}M]$ محيطيتان في الدائرة $(\mathcal{C})$ و تحصران نفس القوس [BM]
إذن $B\hat{A}M = B\hat{C}M$ (2)
و لدينا المثلث OBC متساوي الساقين في O (لأن OB=OC=r حيث r شعاع الدائرة $(\mathcal{C})$
إذن زاويتا قاعدته متقايستان أي :
$C\hat{B}N = B\hat{C}M$ (3)

14)

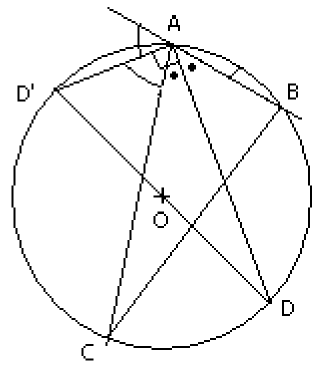


أ) الزاويتان $[A\hat{D}C]$ و $[A\hat{B}C]$ محيطيتان في الدائرة $(\mathcal{C})$ وتحصران نفس القوس [AC]
إذن $A\hat{D}C = A\hat{B}C$ (1)
و لدينا المثلث ABC متساوي الأضلاع إذن $A\hat{B}C = 60°$ (2)
و من (1) و(2) نستنتج أن $A\hat{D}C = 60°$
و لدينا المثلث ADM متساوي الساقين في D لأن AD=DM
و بالتالي نستنتج أنه في المثلث ADM
$M\hat{A}D = D\hat{M}A = A\hat{D}M = 60°$
أي أن المثلث DAM متساوي الأضلاع .

ب) لدينا الزاويتان $[M\hat{E}B]$ و $[A\hat{C}B]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [AB]
إذن $A\hat{C}B = M\hat{E}B$
و لدينا $A\hat{C}B = 60°$ لأن المثلث ABC متساوي الأضلاع
و منه $M\hat{E}B = 60°$
و لدينا $A\hat{M}D = 60°$ لأن المثلث DAM متساوي الأضلاع
و بالتالي الزاويتان $[A\hat{M}D]$ و $[M\hat{E}B]$ متناظرتان ومتقايستان بالنسبة للمتوازين (EB) و (MD) و القاطع لهما (ME) ، إذن : (EB) // (MD) (1).
و لدينا الزاويتان $[C\hat{D}B]$ و $[B\hat{A}C]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [BC]
إذن $B\hat{A}C = C\hat{D}B$
و لدينا $B\hat{A}C = 60°$
إذن $C\hat{D}B = 60°$
و رأينا أن $A\hat{M}D = 60°$
إذن الزاويتان $[C\hat{D}B]$ و $[A\hat{M}D]$ متبادلتان داخليا بالنسبة للمستقيمين (ME) و (DB) و قاطعهما (MD) و متقايستان إذن(DB)//(ME) (2)
و من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي DMEB متوازي الأضلاع.

R

و نستنتج من (1) و (2) و(3) أن : $C\hat{A}N = B\hat{A}M$



8)

أ) الزاوية $[D\hat{O}D']$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[D\hat{A}D']$

و منه : $D\hat{O}D' = 2.D\hat{A}D'$

و لدينا $D\hat{A}D' = 90°$ لأن المنصف الداخلي و الخارجي لنفس الزاوية في مثلث (هنا $[C\hat{A}B]$) يكونان متعامدان

و بالتالي $DOD' = 180°$

إذن النقط D و 'D و O مستقيمية.

ب) لدينا الزاويتان $[D\hat{A}B]$ $[D\hat{C}B]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [BD]

إذن $D\hat{C}B = D\hat{A}B$ (1)

و الزاويتان $[D\hat{B}C]$ $[D\hat{A}C]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [CD]

إذن $D\hat{B}C = D\hat{A}C$ (2)

و لدينا $D\hat{A}B = D\hat{A}C$ (3) (لأن [AD] منصف الزاوية $[B\hat{A}C]$)

و من (1) و (2) و(3) نستنتج أن : $D\hat{B}C = D\hat{C}B$

أي أن المثلث DBC متساوي الساقين في D

و منه DB=DC (4)

و لدينا OB=OC=r (5) لأن B و C ينتميان إلى الدائرة (ع) شعاعها r

و من (4) و (5) نستنتج أن (OD) واسط ل [BC] أي أن (DD') واسط [BC] لأن (OD) و (OD') متعامدان

ج) الزاويتان $[M\hat{E}C]$ و $[A\hat{B}C]$ محيطيتان وتحصران نفس القوس [AC]

إذن $M\hat{E}C = A\hat{B}C$

و لدينا $A\hat{B}C = 60°$

إذن $M\hat{E}C = 60°$ (1)

و لدينا الزاويتان $[A\hat{M}D]$ و $[C\hat{M}E]$ متقابلتان بالرأس M و $A\hat{M}D = 60°$

إذن $C\hat{M}E = 60°$ (2)

و من (1) و(2) نستنتج أن المثلث MEC متساوي الأضلاع (بين أن $M\hat{C}E = 60°$)

لدينا DMEB متوازي أضلاع و منه DB=ME (3) و ME=MC (4) (لأن المثلث MEC متساوي الأضلاع)

و من (3) و (4) نستنتج أن DB=MC

د) لدينا $M \in [DC]$ و منه DC=DM+MC

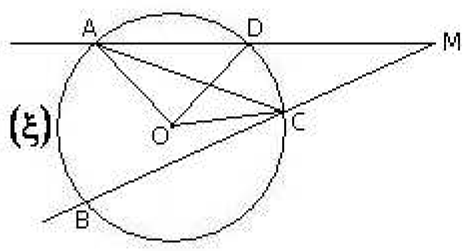
و لدينا DM=DA (لأن المثلث ADM متساوي الأضلاع)

و MC=DB حسب ج)

و بالتالي DC=DA+DB

15)

لدينا $\hat{C}M = 180°$ (1) (مجموع زوايا المثلث AMC)



و $A\hat{C}M + A\hat{C}B = 180°$ (2) لأن الزاويتين $[A\hat{C}B]$ و $[A\hat{C}M]$ متحاديتان ومتكاملتان.

و من (1) و(2) نستنتج أن $A\hat{C}B = A\hat{M}B + M\hat{A}C$

(يمكن استعمال خاصية الزاوية الخارجية في مثلث في هذه النتيجة)

أي $A\hat{M}B = A\hat{C}B - M\hat{A}C$ (3)

و لدينا $[A\hat{O}B]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[A\hat{C}B]$

و منه $A\hat{C}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B$ (4)

و كذلك $[C\hat{O}D]$ هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية $[M\hat{A}C]$

R

و منه $M\hat{A}C = \frac{1}{2}C\hat{O}D$ (5) و من (3) و(4) و (5) نستنتج أن $A\hat{M}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B - \frac{1}{2}C\hat{O}D$ أي $A\hat{M}B = \frac{1}{2}\left(A\hat{O}B - C\hat{O}D\right)$.	

R

نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

I _ نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين :

1) – تعريف :

a و a' و b و b' و c و c' أعداد حقيقية غير منعدمة .

كل كتابة على شكل : $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

تسمى نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين هما العددان الحقيقيان x و y.

2) – مثال :

نعتبر النظمة الآتية : $\begin{cases} 3x-2y+5=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases}$.

II _ حـل النظمة :

1) – تعاريف :

* / حـل نظمة هو تحديد الأزواج $(x;y)$ التي تحقق معادلتي هذه النظمة .

* / حـل نظمة ينقسم إلى قسمين :

-- الحـل الجبري ، و هو نوعان : طريقة التعويض و طريقة التآلفية الخطية .

-- الحـل المبياني .

2) – أمثلة :

أ) -- الحـل الجبري لنظمة معادلتين :

* / طريقة التعويض : لنحـل النظمة : $(E):\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\begin{cases} 2x+y=11 \\ x+3y=18 \end{cases}$

في المعادلة (1) نحسب y بدلالة x . إذن : $y=11-2x$.

في المعادلة (2) نعوض y بالقيمة $11-2x$ ثم نحسب x. إذن :

$$x+3(11-2x)=18$$

$$x+33-6x=18$$

$$x-6x=18-33$$

$$-5x=-15$$

$$x=\frac{-15}{-5}$$

$$x=3$$

R

و منه فإن :

$$y = 11 - 2 \times 3$$
$$y = 11 - 6$$
$$y = 5$$

و بالتالي الزوج $(3;5)$ هو حـل هذه النظمة (E).

* / طريقة التعويض : لنحـل النظمة : $(F) : \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 6y = 14 \end{cases}$

بضرب طرفي المعادلة (1) في العدد -2 نحصل على النظمة : $\begin{cases} -4x - 6y = -10 \\ 5x + 6y = 14 \end{cases}$

بجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف نحصل على :

$$-4x - 6y + 5x + 6y = -10 + 14$$
$$-4x + 5x - 6y + 6y = 4$$
$$x = 4$$

بضرب طرفي المعادلة (1) في العدد 5 و طرفي المعادلة (2) في العدد -2 نحصل على النظمة :

$$\begin{cases} 10x + 15y = 25 \\ -10x - 12y = -28 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف نحصل على :

$$10x + 15y - 10x - 12y = 25 - 28$$
$$10x - 10x + 15y - 12y = -3$$
$$3y = -3$$
$$y = \frac{-3}{3}$$
$$y = -1$$

و بالتالي الزوج $(4;-5)$ هو حـل النظمة (F).

ب) -- الحـل المبياني لنظمة معادلتين :

لنحـل النظمة : $(S) : \begin{cases} 4x - y - 2 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$

ليكن (D_1) المستقيم الذي معادلته : $4x - y - 2 = 0$.

ليكن (D_2) المستقيم الذي معادلته : $2x - y + 2 = 0$.

R

لنحدد المعادلة المختصر لكل من المستقيمين $\left(D_1\right)$ و $\left(D_2\right)$.

لدينا : $\begin{cases}\left(D_1\right): y = 4x - 2 \\ \left(D_2\right): y = 2x + 2\end{cases}$

نلاحظ أن المستقيمين $\left(D_1\right)$ و $\left(D_2\right)$ ليس لهما نفس الميل ، إذن فهما مستقيمان متقاطعان .

و بالتالي للنظمة حــلا وحيدا هو زوج إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين $\left(D_1\right)$ و $\left(D_2\right)$.

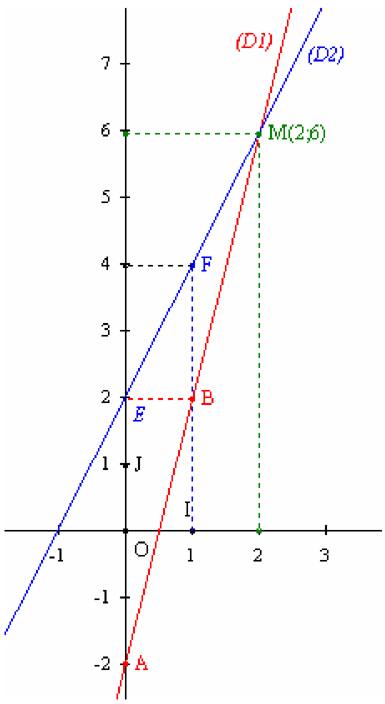
لتكن $M\left(x_M ; y_M\right)$ نقطة تقاطع المستقيمين $\left(D_1\right)$ و $\left(D_2\right)$. لنحدد زوج إحداثيتي M .

نعتبر المستوى منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

لننشئ المستقيمين $\left(D_1\right)$ و $\left(D_2\right)$.

	$\left(D_1\right)$	
x	0	1
y	-2	2
$M(x;y)$	$A(0;-2)$	$B(1;2)$

	$\left(D_2\right)$	
x	0	1
y	2	4
$M(x;y)$	$E(0;2)$	$F(1;4)$



نلاحظ من خلال المبيان أن : $M(2;6)$

و بالتالي الزوج $(2;6)$ هو حــل النظمة (S) .

* / ملاحظــة هامة :

-- إذا كان للمستقيمين نفس الميل نقول أنهما متوازيان قطعا و أن النظمة ليس لها حــل .

-- إذا كان للمستقيمين نفس الميل و نفس الأرتوب عند الأصل نقول أنهما متوازيان منطبقان و أن النظمة لها عدة حلول .

R

III _ مسائل تؤول في حلها إلى نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين .

1) – قاعدة :

لحـل مسألة نتبع المراحل التالية :
-- اختيار المجهولين .
-- صياغة النظمة .
-- حـل النظمة (جبريا).
-- التحقق من الحـل .
-- الرجوع إلى المسألة .

2) – مثـال :

ساهمت مجموعة تتكون من 20 فردا (أساتذة و تلاميذ)، في شراء مجموعة من الكتب لخزانة المدرسة بثمن 320 درهما .
إذا علمت أن كل أستاذ ساهم ب 30 درهم و أن كل تلميذ ساهم ب 10 دراهم، فما هو إذن عدد الأساتذة و ما هو عدد التلاميذ المساهمين ؟

1) – اختيار المجهولين :

ليكن x هو عدد التلاميذ المساهمين و y هو عدد الأساتذة المساهمين .

2) – صياغة النظمة :

عدد الأفراد الذين ساهموا هو 20 فردا من بينهم أساتذة و تلا ميذ ، إذن : $x + y = 20$.

ساهم كل أستاذ ب 30 درهم و ساهم كل تلميذ ب 10 دراهم بحيث مطجموع كمساهماتهم يساوي 320 درهما ، إذن : $10x + 30y = 320$.

إذن النظمة هي : $\begin{cases} x + y = 20 \\ 10x + 30y = 320 \end{cases}$.

3) – حـل النظمة :

باتباع إحدى الطريقتين المذكرتين أعلاه نحصل على : $x = 14$ و $y = 6$.

4) – التحقق من الحـل :

لدينا : $14 + 6 = 20$ و $10 \times 14 + 30 \times 6 = 140 + 180 = 320$.

إذن الزوج $(14;6)$ هو حـل النظمة أعلاه .

5) – الرجوع إلى المسألــة :

عدد التلاميذ هو : 14 .

عدد الأساتذة هو : 6 .

R

نظمة معادلتين
ممن الدرجة I بمجهولين

تمرين رقم 1

1) من بين الأزواج التالية : (2؛2)؛ (1؛2)؛(0؛3-) ؛ أذكر التي هي تحقق النظمة التالية : $\begin{cases} x-2y=-3 \\ 2x+y=4 \end{cases}$.

2) إستنتج الحل اهذه النظمة .

تمرين رقم 2

حل النظمات التالية .

$(s_1)\begin{cases} x=y \\ 2x-y=3 \end{cases}$ $(S_2)\begin{cases} x-3y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ $(s_3)\begin{cases} 5x-2y=7 \\ 3x+y=-5 \end{cases}$ $(s_4)\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x+2y=1 \end{cases}$

تمرين رقم 3

حل النظمة التالية : $(E_1)\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+3y=14 \end{cases}$ و استنتج حل النظمات التالية :

$(E_2)\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{y}=14 \end{cases}$ و $(E_3)\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2x^2+3y^2=14 \end{cases}$

تمرين رقم 4

نعتبر النظمة التالية : $(E)\begin{cases} x+y=2500 \\ xy=1200 \end{cases}$ علما أن $x\rangle y$

أ ـ بين أن $x+y=70$ و $x-y=10$ و استنتج قيمتي x و y

ب ـ أراد ملك قطعة أرضية على شكل مثلث ABC قائم الزاوية في A أن يحيطها بسياج إذاعلمت أن وتر ABC هو 50 m ومساحته 600m^2 و $AB\rangle AC$ ؛ فماهو طول السياج

R

الدالة الخطيــــة و الدالة التآلفيـــة

I _ الدالة الخطيــة :

1) – تعريف :

a عدد حقيقي معلوم
العلاقة f التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي ax
تسمى دالة خطية معاملها a و نكتب :
$f(x) = ax$ أو $f : x \rightarrow ax$
العدد ax يسمى صورة x بالدالة الخطية f

2) – أمثلة :

f و g و h دوال معرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{x}{3} \quad \text{و} \quad g(x) = 0x \quad \text{و} \quad h(x) = -\sqrt{5}x$$

إذن :

-- f دالة خطية معاملها العدد $\frac{1}{3}$.
-- g دالة خطية معاملها العدد 0.
-- h دالة خطية معاملها العدد $-\sqrt{5}$

3) – خــاصيـة :

إذا كانت f دالة خطية و x عدد حقيقي غير منعدم فإن :
معامل الدالة f هو العدد الحقيقي : $\frac{f(x)}{x}$

*** / تمرين تطبيقي :**

f دالة خطية بحيث : $f(-5) = \frac{2}{3}$
حدد معامل الدالة f ثم حدد $f(x)$.

الحــل :

لدينا :

f دالة خطية إذن : $f(x) = ax$ ومعاملها هو العدد الحقيقي : $a = \frac{f(-5)}{-5} = \frac{\frac{2}{3}}{-5} = \frac{2}{3} \times \frac{-5}{1} = \frac{-10}{3}$.

و منه فإن : $f(x) = \frac{-10}{3}x$.

R

4) – التمثيل المبياني لدالة خطية :

* / تعريف :

معلم متعامد في المستوى $(O;I;J)$
تمثيل المبياني لدالة خطية هو مستقيم يمر من أصل المعلم O .

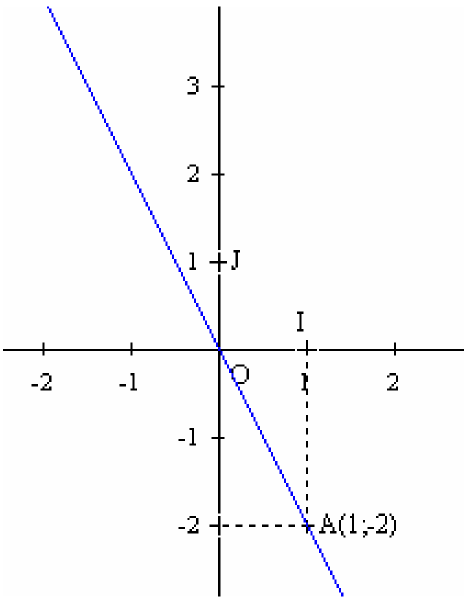
* / مثال :

f دالة خطية معرفة كما يلي : $f(x) = -2x$.

لننشئ التمثيل المبياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

لدينا :

x	1
$f(x)$	-2



إذن التمثيل المبياني للدالة هو المستقيم من O و من النقطة $A(1;-2)$.

* / ملاحظة هامة :

-- إذا كانت $M(x;y)$ نقطة تنتمي إلى التمثيل المبياني لدالة خطية f فإن : $f(x) = y$.

-- إذا كانت M نقطة تنتمي إلى التمثيل المبياني لدالة خطية f فإن : $M(x;f(x))$.

II _ الدالة التآلفيـــة :

1) – تعريف :

a و b عددان حقيقيان معلومان .
العلاقة f التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي $ax+b$
تسمى دالة تآلفية معاملها a و نكتب :
$f(x) = ax+b$ أو $f : x \to ax+b$
العدد $ax+b$ يسمى صورة x بالدالة الخطية f

2) – أمثلة :

f و g دالتان معرفتان كما يلي :

$$f(x) = -\frac{x}{7} + 11 \quad \text{و} \quad g(x) = 5$$

-- f دالة تآلفية معاملها $-\frac{1}{7}$.

-- g دالة تآلفية معاملها 0

R

3) – خـــاصيـة :

إذا كانت f دالة تآلفية و x عدد حقيقي غير منعدم فإن :
معامل الدالة f هو العدد الحقيقي : $\dfrac{f(x)-f(x')}{x-x'}$

* / تمرين تطبيقي :
f دالة تآلفية بحيث : $f(2)=2$ و $f(-1)=-3$
حدد معامل الدالة f ثم حدد $f(x)$.

الحـل :

لدينا دالة تآلفية إذن : $f(x)=ax+b$ و معاملها هو العدد الحقيقي :

$$a=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{2-(-3)}{2-(-1)}=\frac{2+3}{2+1}=\frac{5}{3}$$

و منه فإن : $f(x)=\dfrac{5}{2}x+b$.

لنحسب العدد الحقيقي b .

$f(-1)=-3$ يعني أن :

$$\frac{5}{2}(-1)+b=-3$$
$$-5+2b=-6$$
$$2b=-6+5$$
$$2b=-1$$
$$b=\frac{-1}{2}$$

وبالتالي فإن : $f(x)=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

4) – التمثيل المبياني لدالة تآلفية :

* / تعريف :

$(O;I;J)$ معلم متعامد في المستوى
تمثيل المبياني لدالة خطية هو مستقيم يمر من نقطتين مختلفتين
$A(x;f(x))$ و $B(x';f(x'))$

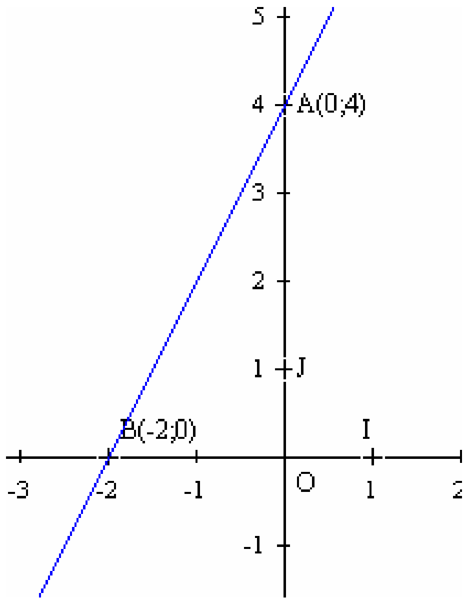
* / مثال :

لننشئ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$، الدالة التآلفية f بحيث : $f(x)=2x+4$.

R

لدينا :

x	0	-2
$f(x)$	4	0



إذن التمثيل المبياني للدالة هو المستقيم (AB) بحيث :

$A(0;4)$ و $B(-2;0)$

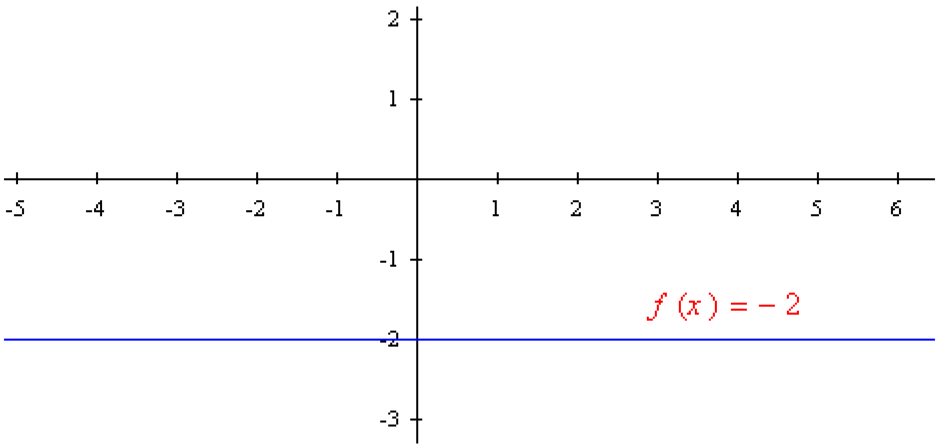
5) – حـالة خـاصة :

a عدد حقيقي معلوم
الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=a$ تسمى دالة تآلفية معاملها 0
و تمثيلها المبياني هو المستقيم المار من النقطة $A(0;a)$ و الموازي لمحور الأفاصيل .

* / مثال :

لننشئ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$، الدالة التآلفية f بحيث :

$f(x)=-2$.



الدوال الخطية

تمرين 1

لتكن f دالة خطية معاملها $\frac{-7}{3}$.

1) حدد $f(x)$ بدلالة x .

2) أتمم الجدول التالي .

x	$-\frac{3}{7}$	....	0	14	....
$f(x)$	....	-63	....	....	49

تمرين 2

لتكن f دالة خطية بحيث : $f(7)=-5$.

1) أحسب معامل الدالة الخطية f .

2) أحسب $f(x)$ بدلالة x .

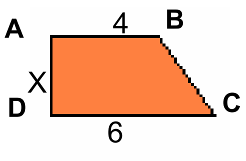
تمرين 3

$ABCD$ شبه المنحرف . (أنظر الشكل)

لتكن $f(x)$ مساحة شبه المنحرف $ABCD$

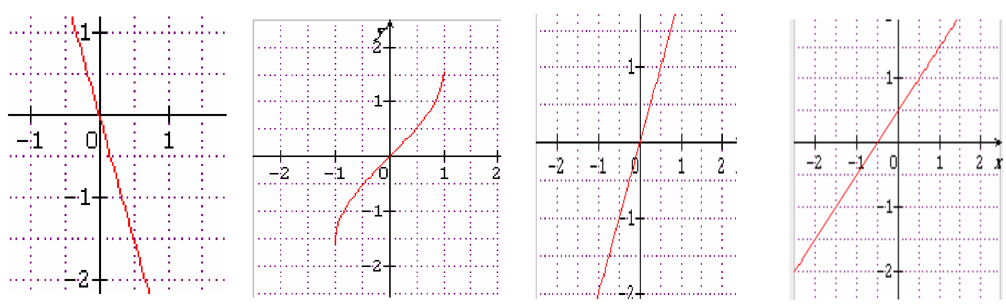
1) عبرعن $f(x)$ بدلالة x

2) هل f دالة خطية ؟



تمرين 4

من بين التمثيلات التالية حدد التي تمثل دالة خطية



د ج ب أ

R

الدوال التآلفية

تمرين 1

لتكن f الدالة التآلفية المعرفة كمايلي: $f(x) = x\sqrt{2} - \frac{1}{3}$.

1) أحسب : $f(\sqrt{6})$ ؛ $f(x\sqrt{2}+1)$ ؛ $f\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$.

2) حدد قيمة العدد x الذي من أجله : $f(x) = 0$ ؛ $f(x) = -2$

تمرين 2

h دالة تآلفية معرفة كما يلي : $h(x) = 2 - 3x$.

1) هل النقطتين: A (0 ؛ 2) و B (1 ؛ 1) من التمثيل المبياني (D) للدالة التآلفية h في معلم متعامد ممنظم(J ؛ I ؛ O)

2) أرسم (Δ) التمثيل المبياني للدالة التآلفية g المعرفة كمايلي : $g(x) = x - 2$

3) حل مبيانيا المعادلة : $h(x) = g(x)$.

4)إ ستنتج الوضع النسبي للمستقيمين : (D) و (Δ) .

5) حدد الدالة التآلفية f التي تحقق : $f(2) = 1$ و $f(-3) = -1$.

تمرين 3

حدد جميع الدوال الخطية التي تحقق : لكل عدد حقيقي x : $g(g(x)) = 1936x$

تمرين 4

أراد شخص شراء هاتف نقال فكان له الإختيار بين صيغتين عروضهما على الشكل التالي :

	الإشتراك الشهري مع ساعتين للإتصال	عند إستهلاك الساعتين الممنوحتين أداء عن كل دقيقة من المكالمات
الصيغة (1)	300 dh	2,50 dh
الصيغة (2)	150 dh	7,50 dh

نرمز لِ x بعدد الدقائق المستهلكة بعد استهلاك الساعتين الممنوحتين حدد حسب x أفضل الصيغتين .

R

الإحصاء

I- تذكير

1) تعاريف

1) الدراسة الإحصائية : هي دراسة لظاهرة أو خاصية يتميزبها أفراد مجموعة.

2) الساكن الإحصائية : هي المجموعة التي تشملها الدراسة الإحصائية وكل عنصر من هذه المجموعة يسمى فردا أو وحدة إحصائية.

3) الميزةالإحصائية : هي المعيار الذي يصنف وفقه أفراد الساكنة الإحصائية وهي نوعان :

أ) الميزة الكمية : هي الميزة التي يمكن التعبير عنها بأعداد..(السن ؛ الطول ؛ الوزن ؛....).

ب) الميزة النوعية : هي الميزة التي لا يمكن التعبير عنها بأعداد.(اللون ؛ اللغة ؛ الجنس ؛ التعثر الدراسي؛...).

4) الحصيص الموافق لقيمة ميزة هو عدد أفراد الساكنة الإحصائية التي تتوفر فيهم هذه القيمة. .

5) الحصيص الإجمالي لمتسلسلة إحصائية هو مجموع الحصيصات.

6) الحصيص المتراكم:المرتبط بقيم من قيم الميزة الكمية هو عدد أفراد الساكنة الإحصائية الذين يتوفرون على ميزة أصغر من أو تساوي هذه القيمة .

7) التردد f_i الموافق للميزة x_i هو النسبة بين الحصيص n_i والحصيص الإجمالي N . أي : $f_i = \frac{n_i}{N}$.

8) التردد المتراكم : الموافق لقيمة الميزة x_i هو نسبة الحصيص المتراكم لـ N_i والحصيص الإجمالي N أي $F_i = \frac{N_i}{N}$

9) النسبة المئوية P_i الموافقة للميزة x_i هي : $P_i = \frac{n_i}{N} \times 100 = 100 f_i$.

10) المعدل الحسابي : لتكن x_1 ؛ x_2 ؛ x_3 ؛.....؛ x_k القيم التي تأخذها الميزة x_i .

و : n_1 ؛ n_2 ؛ n_3 ؛....؛ n_k الحصيصات الموافقة لها .

المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية هو العدد :

$$m = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + n_3 \times x_3 + \dots + n_k \times x_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k}$$

ملحوظة : إذاكانت المتسلسلة معبر عنها بالأصناف فإنه لحساب المعدل الحسابي نعتبر مراكز الأصناف كقيم للميزة .

مثل : بالنسبة للصنف $[a_1;a_2[$ نأخذ $x_1 = \frac{a_1+a_2}{2}$.

تطبيق1: أجرت دراسة على 20 عائلة تهم عدد الأطفال في كل عائلة وأعطت النتائج التالية .

3 – 2 – 4 – 3 – 4 – 0– 3 – 2– 4 –1
1–4 – 4 – 4 – 3 –3 – 4 – 4 –3–1

◂ الحصيص الإجمالي هو: 20. (أي : $(N = 20$.

1) أعط جدولا للحصيصات ؛الحصيصات المتراكمة ؛الترددات؛ الترددات المتراكمة و النسب المئوية .

2) مثل مبيانيا هذه المتسلسلة الإحصائية .

3) أحسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة .

---

1) جدول الحصيصات ؛ الحصيصات المتراكمة ؛ الترددات ؛ الترددات المتراكمة ؛ النسب المئوية .

ع ـ الأطفال: x_i	0	1	2	3	4
الحصيصات : n_i	1	3	2	6	8
ح ـ المتراكم: N_i	1	4	6	12	20
التردد : f_i	0.05	0.15	0.1	0.3	0.4
ت ـ المتراكم: F_i	0.05	0.2	0.3	0.6	1
النسبة المئوية: Pi	5%	15%	10%	30%	40%
α^0	18	54	36	108	144

II– التمثيلات المبيانية

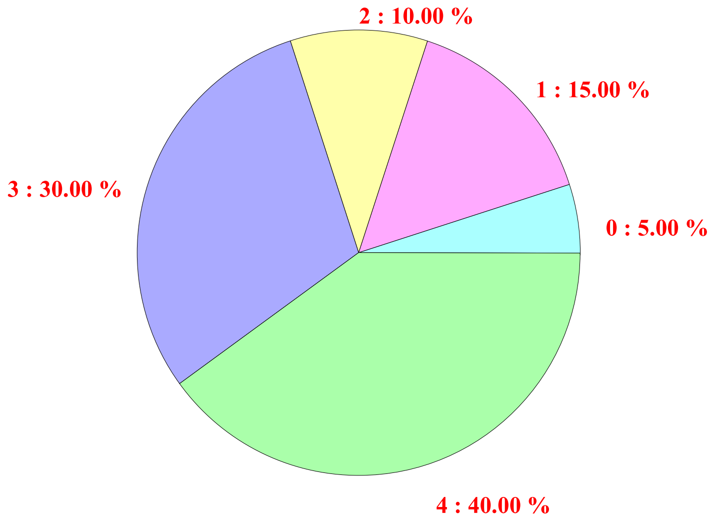
أ ـ التمثيل (أومخطط) بالقضبان ؛ تمثيل بخط منكسر؛ مخطط قطاعي .

R

التمثيل بالأحمر: يسمى تمثيل(أومخطط)بالقضبان: للحصيصات

التمثيل بالأزرق : يسمى تمثيل بخط منكسر: للحصيصات

التمثيل التالي يسمى: مخطط قطاعي دائري .



3) المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية .

ليكن m المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية

إذن : $m = \dfrac{1\times 0+3\times 1+2\times 2+3\times 6+4\times 8}{20}$

ومنه : $m = 2,85$

تطبيق2 :

الجدول التالي يعطي تصنيف السن لقسم السنة الثالثة الإعدادي في إحدى المؤسسات التعليمية.

السن (الصنف)	$[13;15[$	$[15;17[$	$[17;19[$
الحصيصات	20	8	4
ح ـ المتراكم	20	28	32
المركز	14	16	18

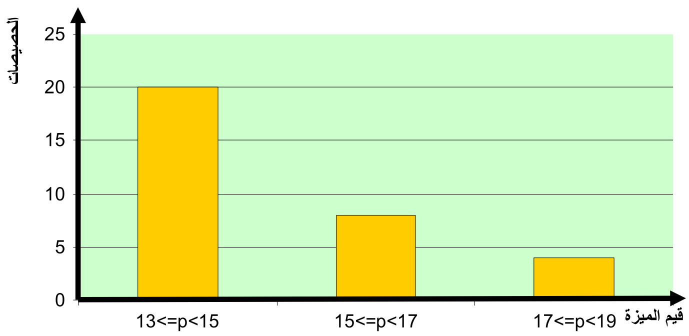
ليكن m المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية

إذن : $m = \dfrac{14\times 20+16\times 8+18\times 4}{32}$

ومنه : $m = 15$

ب ـ تمثيل أو مخطط بالأشرطة .

لاحظ أن : المستطيلات لها نفس العرض .(2 = 13 – 15 = 15 – 17=17 – 19).



R

4) القيمة الوسطية لمتسلسلة إحصائية :

تعريف :

أصغر قيمة الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي هي القيمة الوسطية.

أمثلة :

➢ في التطبيق 1:

لدينا نصف الحصيص الإجمالي هو : $\frac{20}{2}=10$

إذن : 3 هي القيمة اوسطية . (لإن 3 هي أصغرقيمة ميزة التي حصيصها المتراكم (12) أكبر من أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي.

➢ في التطبيق 2 :

لدينا نصف الساكنة الإحصائية هو : $\frac{32}{2}=16$

في الصنف المقابل للحصيص المتراكم 20 (أي $[13;15[$) تو جد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية.

ملا حظة :

يمكن القول أن : 14 (مركز الصنف $[13;15[$) هي القيمة الوسطية للمتسلسلة الإحصائية لأن : $\frac{13+15}{2}=14$.

5) منوال متسلسلة إحصائية:

تعريف :

منوال متسلسلة إحصائية هو قيمة (أوصنف) الميزة التي لها أكبرحصيص .

أمثلة :

** في التطبيق 1:

منوال هذه المتسلسلة الإحصائية هو 4 لأن لها أكبر حصيص هو 8

** في التطبيق 2:

منوال هذه المتسلسلة الإحصائية يوجد في الصنف: $[13;15[$

6) التشتت :

تعريف:

نعتبر متسلسلتين إحصائيتين S_1 و S_2 لهما نفس المعدل الحسابي m . نقول إن S_1 أقل تشتتا من S_2 يعني أن قيم ميزة S_1 أقرب إلى m من قيم ميزة S_2.

مثال:

الجدول التالي يعطي نقط التي حصل عليها 20 تلميذ من 3/6 في مادة الرياضيات .

الرياضيات	4	7	10	15	17
عدد التلاميذ	5	3	4	6	2

الجدول التالي يعطي نقط التي حصل عليها 20 تلميذ من 3/5 في مادة الرياضيات.

الرياضيات	3	7	8	9	11	13	14	17
عدد التلاميذ	1	4	2	4	2	4	1	2

R

✓ حساب المعدل الحساب في كل من القسمين : 3/5 و 3/6.

✓ حساب المعدل الحساب في القسم : 3/5.

لتكن m المعدل الحسابي إذن : $m = \dfrac{17\times2+14\times1+13\times4+11\times2+9\times4+8\times2+7\times4+3\times1}{2+1+4+2+4+2+4+1}$

أي : $m = \dfrac{34+14+52+22+36+16+28+3}{20}$

ومنه : $m = \dfrac{205}{20} = 10,25$

✓ حساب المعدل الحساب في القسم : 3/6.

لتكن m' المعدل الحسابي إذن : $m' = \dfrac{17\times2+15\times6+10\times4+7\times3+4\times5}{2+6+4+3+5}$

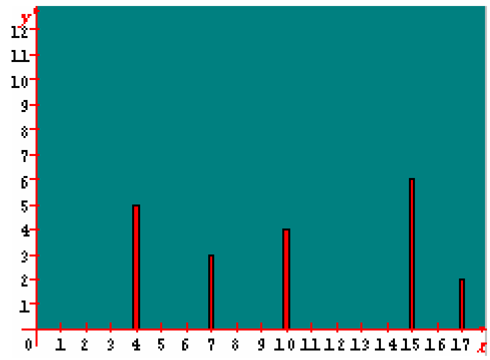
أي : $m' = \dfrac{34+90+40+21+20}{2+6+4+3+5}$

ومنه : $m' = \dfrac{205}{20} = 10,25$

التمثيل المبياني

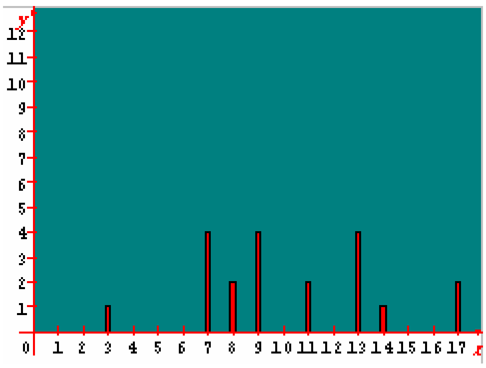
3/5

الحصصات



3/6

الحصصات



قيمة المزة

لاحظ أن : المعدل الحسابي لهتين المتسلسلتين هو : 10,5 (للقسمين معا نفس المعدل الحسابي $m = m' = 2,85$).

لاحظ أن : العصي في مبيان نقط تلاميذ 3/6 أكثر تجمعا حول المعدل الحسابي من عصي مبيان نقط 3/5 .

نقول إن : نقط تلاميذ 3/6 (نقط تلاميذ 3/5) أقل تشتتا من نقط تلاميذ 3/5 (أكثر تشتتا من نقط تلاميذ 3/6).

R

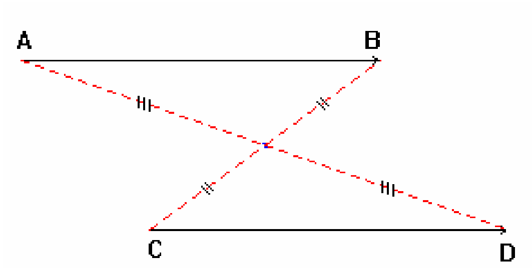
المتجهــــــات و الإزاحة

I _ تساوي متجهتين :

1) – تعريف ❶ :

إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ فإن [AD] و [BC] لهما نفس المنتصف
إذا كان [AD] و [BC] لهما نفس المنتصف فإن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

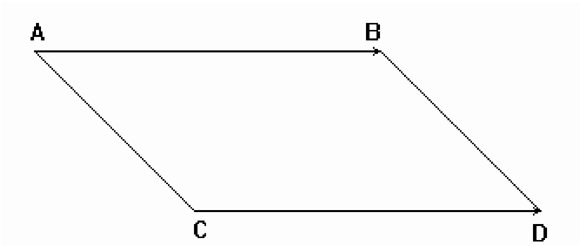
* / مثال :



2) – تعريف ❷ :

إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ فإن الرباعي ABDC متوازي الأضلاع
إذا كان رباعي ABDC متوازي الأضلاع فإن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

* / مثال :



3) – خاصية :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ يعني أن :

-- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس الإتجاه أي (AB) // (CD)

-- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المنحى .

-- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المنظم (المعيار) أي AB = CD .

R

4) – المتجهة المنعدمة :

متجهة منعدمة : $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{O}$

إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{O}$ فإن : A = B (A و B منطبقتان)

5) – مقابل متجهة :

مقابل المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هي المتجهة $\overrightarrow{BA}$.

و نكتب : $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

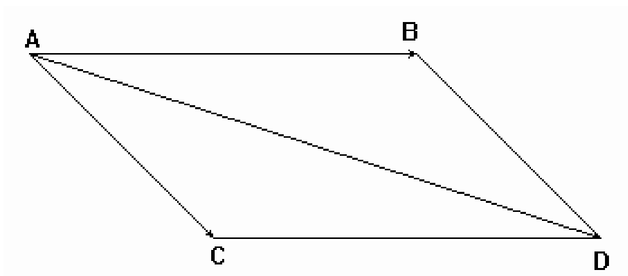
6) – مجموع متجهتين :

مجموع المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو المتجهة $\overrightarrow{AD}$
بحيث الرباعي ABDC متوازي الأضلاع.

* / مثال 1 :

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتان غير منعدمتين .

لننشئ النقطة D بحيث : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$



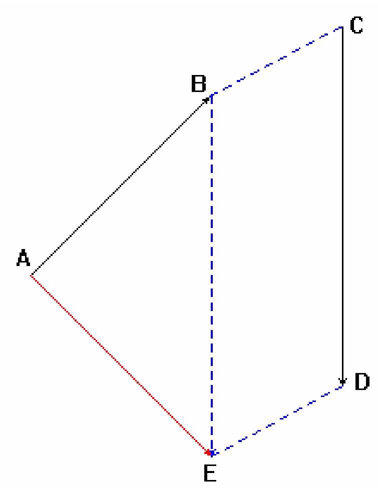
* / مثال 2 :

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتان غير منعدمتين .

لننشئ E بحيث : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

من أجل هذا سننشئ E بحيث : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CD}$

أي BEDC متوازي الأضلاع .



$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

R

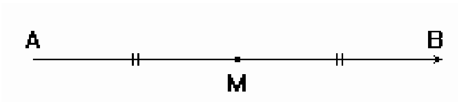
7) – ضرب متجهة في عدد حقيقي :

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي .
نسمي المتجهة $\overrightarrow{AM}$ جداء المتجهة $\overrightarrow{AB}$ في العدد الحقيقي k ، إذا كانت M نقطة من المستقيم (AB) بحيث : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
-- إذا كان $k > 0$ فإن : AM = k.AM و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ لهما نفس المنحى .
-- إذا كان $k < 0$ فإن : AM = – k.AB و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ لهما منحى معاكس.
-- إذا كان $k = 0$ فإن : A = M .

8) – المتجهة و المنتصف :

A و B و M ثلاث نقط
M منتصف [AB] يعني أن : $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{O}$
M منتصف [AB] يعني أن : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

* / مثال :



9) – خاصيات :

K عدد حقيقي غير منعدم
* / إذا كان : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ فإن النقط A و B و C مستقيمية .
* / إذا كان : $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ فإن (AB) // (CD)
و نقول : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتان مستقيميتان .

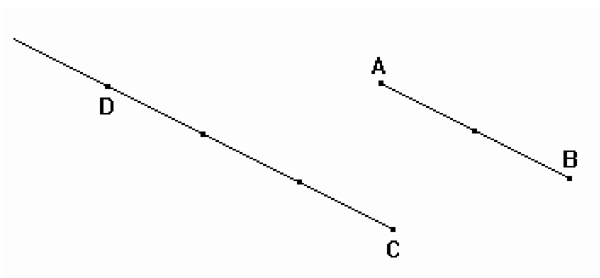
* / مثال :

A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية .

لننشئ D بحيث : $\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ يعني أن (AB) // (CD)

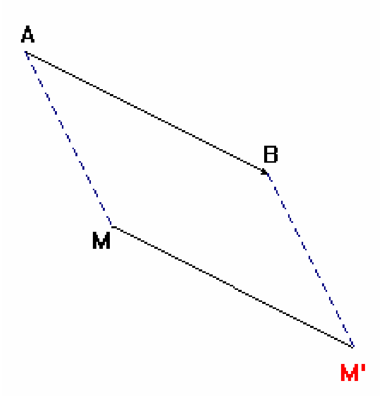
و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتان مستقيميتان منحاهما منعكسان .



R

II _ الإزاحـة :

1) – مثال :



$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و M نقطة .

لننشئ النقطة M’ بحيث : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$ يعني أن ABM’M متوازي الأضلاع .

1) – تعريف :

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و M نقطة .
M’ صورة M بالإزاحة ذات المتجهة (أو بالإزاحة التي تحول A إلى B)
يعني أن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$ أي ABM’M متوازي الأضلاع .

2) – خاصية أساسية :

إذا كانت M’ و N’ صورتي M و N على التوالي بإزاحة
فإن : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.

3) – صور بعض الأشكـال :

أ) -- صورة مستقيم :

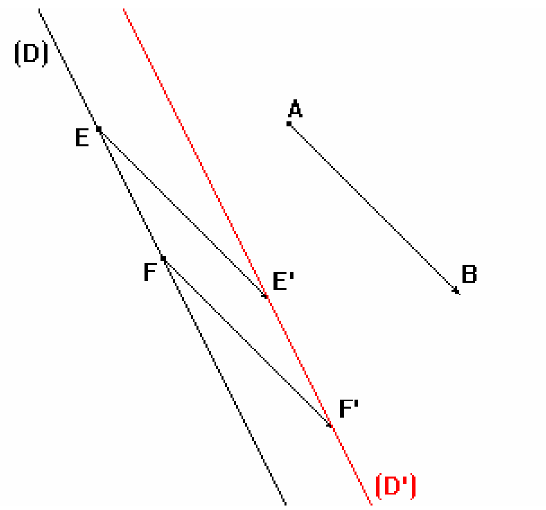
صورة مستقيم بإزاحة هو مستقيم يوازيه

*** / ملاحظة هامة :**

لإنشاء صورة مستقيم بإزاحة نحدد نقطتين مختلفتين على هذا المستقيم

ثم ننشئ صورتيهما بنفس الإزاحة .

*** / مثال :**



$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و (D) مستقيم

لننشئ (D’) صورة (D) بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

R

ب) -- صورة قطعة :

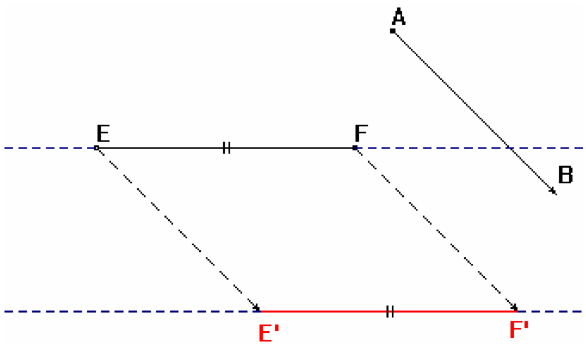
صورة قطعة [EF] بإزاحة هي القطعة [E’F’] بحيث :
E’ و F’ هما صورتي E و F على التوالي بنفس الإزاحة
و سيكون لدينا : (EF) // (E’F’) و EF = E’F’

* / مثال :

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و [EF] قطعة .

لننشئ القطعة [E’F’] صورة [EF]

بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.



ج) -- صورة نصف مستقيم :

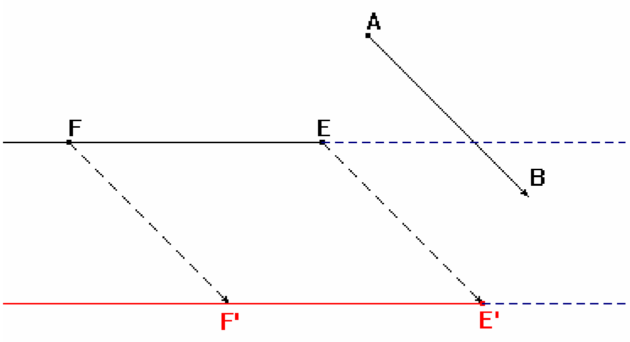
صورة نصف مستقيم [EF) بإزاحة هي نصف المستقيم [E’F’) بحيث :
E’ و F’ هما صورتي E و F على التوالي بنفس الإزاحة
و سيكون لدينا : (EF) // (E’F’)

* / مثال :

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و [EF) نصف مستقيم .

لننشئ نصف المستقيم [E’F’) صورة [EF)

بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.



د) -- صورة زاوية :

صورة زاوية $A\hat{O}B$ بإزاحة هي الزاوية $A'\hat{O}'B'$ بحيث :
A’ و O’ و B’ هي صور A و O و B على التوالي بنفس الإزاحة .
و سيكون لدينا : $A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'$

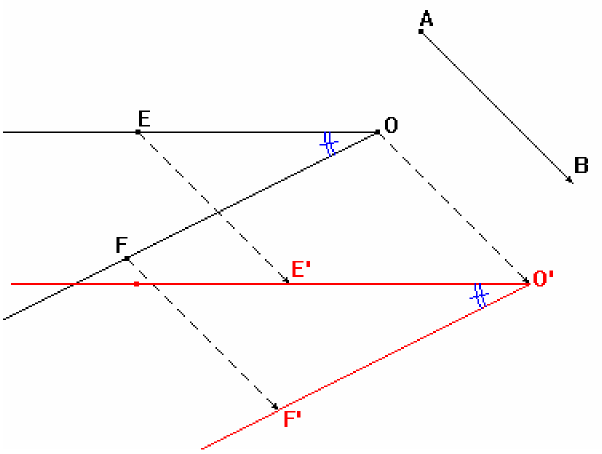
* / مثال :

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و $A\hat{O}B$ زاوية .

لننشئ الزاوية $A'\hat{O}'B'$ صورة $A\hat{O}B$

بالإزاحة التي تحول A إلى B .

R



ه) -- صورة دائـرة :

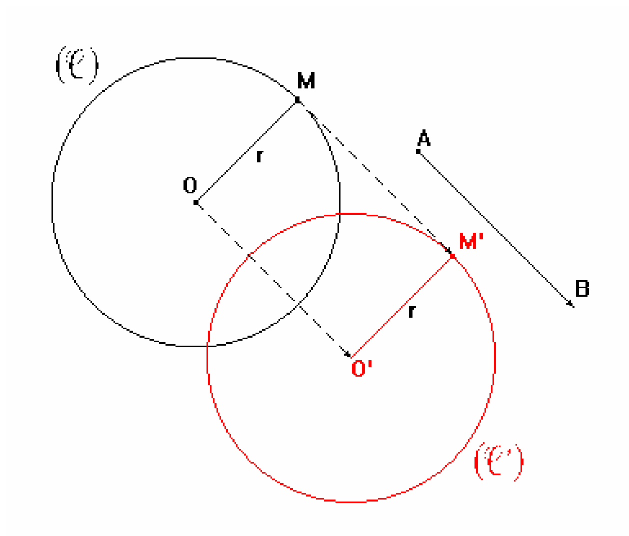
صورة دائرة $(\mathscr{C})$ مركزها O و شعاعها r هي الدائرة $(\mathscr{C}')$ مركزها O’ صورة O بنفس الإزاحة و لها نفس الشعاع r .

*** / مثال :**

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها O و شعاعها r .

لننشئ الدائرة $(\mathscr{C}')$ صورة $(\mathscr{C})$

بالإزاحة التي تحول A إلى B .



لنبين أن للدائرتين نفس الشعاع r .

لدينا :

O’ صورة O بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

و

M’ صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

إذن : OM = O’M’

و بما أن OM = r فإن O’M’ = r

و منه نستنتج أن للدائرتين نفس الشعاع r .

*** / ملاحظة هامة :**

لإنشاء صورة دائرة بإزاحة ننشئ صورة المركز بنفس الإزاحة

ثم نحتفظ بنفس الشعاع .

R

المتجهات و الإزاحات

تمرين رقم 1

ABC مثلثا فيه : $BC=4$ و $AC=5$ و $AB=7$.

1) أنشئ المثلث ABC مع احترام القياسات .

2) أنشئ النقطة M صورة النقطة C بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

3) أنشئ النقطة N بحيث : $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

تمرين رقم 2

1) ABC مثلث متساوي الساقين و $A'B'C'$ صورته بإزاحة ؛ ماهي طبيعة $A'B'C'$.

2) ABC مثلث قائم الزاوية و $A'B'C'$ صورته بإزاحة ؛ ماهي طبيعة $A'B'C'$.

تمرين رقم 3

ليكن ABC مثلث .

1) أنشئ النقطة I حيث : $\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AB}$.

2) أنشئ النقطة J حيث : $\overrightarrow{AJ}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.

3 أنشئ النقطة K حيث : $\overrightarrow{AK}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

تمرين رقم 4

أنشئ متوازي الأضلاع $ABCD$ مركزه O. E و F منتصفي $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي . (DE) و (BF) يقطعان (AC) في G و H على التوالي .

أ ـ برهن أن: O منتصف $[BF]$ وأن $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FD}$ و $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{ED}$.

ب ـ برهن أن : $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{HC}$.

ج ـ برهن أن : O منتصف $[GH]$.

د ـ برهن أن : $\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{EH}$ و $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{HD}$.

تمرين رقم 5

ليكن ABC مثلث قائم الزاوية في B .

1) أنشئ النقطتين D و E بحيث : $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

2) بين أن : $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

3) إستنتج أن النقط A و D و E مستقيمية .

R

إحداثيتا نقطة + إحداثيتا متجهة

I _ إحداثيتا نقطة :

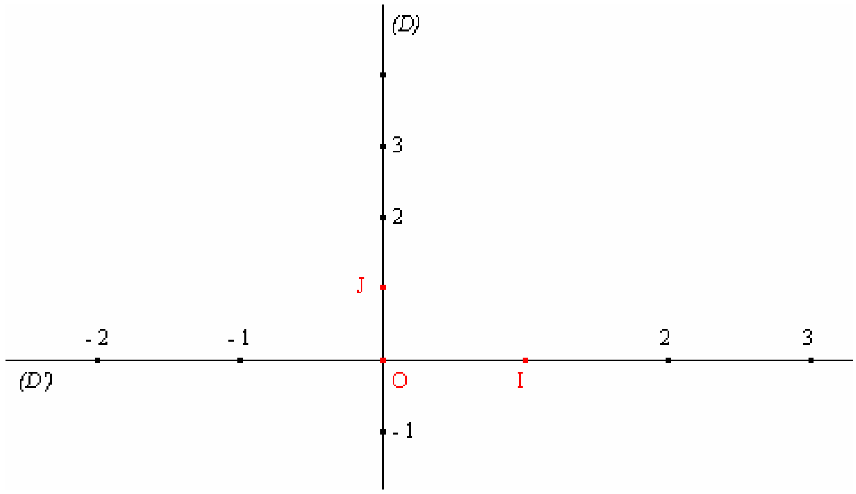
1) – المعلم في المستوى:

* / مثال :

O و I و J ثلاث نقط من المستوى بحيث : $(OI)\perp(OJ)$

نعتبر (D) و (D') مستقيمان متعامدان في O و مدرجان بحيث :

(D) وحدة تدريجه هي OI و (D') وحدة تدريجه هي OJ .



نقول أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(O;I;J)$.

++ النقطة O تسمى : أصل المعلم $(O;I;J)$.

++ المستقيم (OI) يسمى : محور الأفاصيل .

++ المستقيم (OJ) يسمى : محور الأراتيب .

إذا كان OI = OJ = 1 نسمي $(O;I;J)$: معلم متعامد ممنظم .

2) – إحداثيتا نقطة :

* / تعريف :

$(O;I;J)$ معلم متعامد للمستوى

كل نقطة M في المستوى مرتبطة بزوج $(x_M;y_M)$ يسمى زوج إحداثيتي النقطة M .

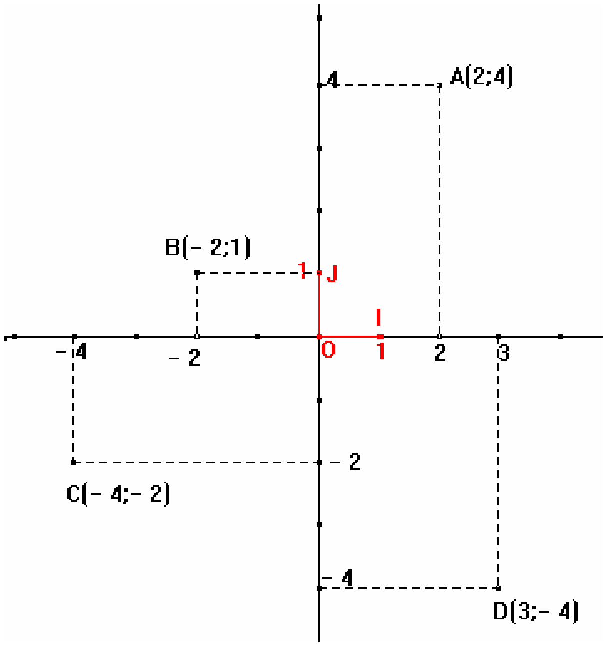
x_M يسمى : أفصول M و y_M يسمى أرتوب M / و نكتب : $M(x_M;y_M)$

R

*** / مثال :**

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

لنمثل النقط الآتية : $A(2;3)$ و $B(-2;1)$ و $C(-4;-2)$ و $D(3;-4)$



*** / ملاحظات هامة :**

-- إذا كان $(O;I;J)$ معلما للمستوى فإن : $O(0;0)$ و $I(1;0)$ و $J(0;1)$.

-- إذا كانت M تنتمي إلى (OI) فإن : $M(x_M;0)$.

-- إذا كانت M تنتمي إلى (OJ) فإن : $M(0;y_M)$.

3) – إحداثيتا منتصف قطعة :

*** / تعريف :**

> $(O;I;J)$ معلم متعامد للمستوى
>
> إذاكانت M منتصف قطعة [AB] فإن : $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ و $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

*** / مثال :**

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

لنحدد إحداثيتي النقطة E منتصف القطعة [AB] بحيث : $A(2;3)$ و $B(-2;1)$.

لدينا :

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0 \quad \text{و} \quad y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

إذن : $E(0;2)$.

R

II _ إحداثيتا متجهة :

1) – تعريف :

$(O;I;J)$ معلم متعامد للمستوى
إذا كانت $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتين فإن :
إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هما : x_B-x_A و y_B-y_A
و نكتب : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$

*** / مثال :**

$A(-2;3)$ و $B(1;-5)$ نقطتان من المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O;I;J)$.

لنحسب إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l} x_B-x_A=1-(-2)=1+2=3 \\ y_B-y_A=-5-3=-8 \end{array}\right\}$ و إذن : $\overrightarrow{AB}(3;-8)$.

2) – تساوي متجهتين :

*** / قاعدة :**

$(O;I;J)$ معلم متعامد للمستوى
$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتان غير منعدمتين
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ يعني أن : $\left.\begin{array}{l} x_B-x_A=x_D-x_C \\ y_B-y_A=y_D-y_C \end{array}\right\}$ و

*** / مثال :**

$A(3;3)$ و $B(1;-4)$ و $C(-2;-2)$ نقط من المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O;I;J)$.

لنحدد إحداثيتي النقطة D لكي يكون ABCD متوازي الأضلاع .

ABCD متوازي الأضلاع يعني أن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

أي : $\left.\begin{array}{l} x_B-x_A=x_C-x_D \\ y_B-y_A=y_C-y_D \end{array}\right\}$ و

R

و منه فإن : و $\left.\begin{array}{l} 1-3=-2-x_D \\ -4-3=-2-y_D \end{array}\right\}$ أي : و $\left.\begin{array}{l} x_D=-2-1+3 \\ y_D=-2+4+3 \end{array}\right\}$

و $\left.\begin{array}{l} x_D=0 \\ y_D=5 \end{array}\right\}$

و بالتالي فإن : $D(0;5)$.

III _ إحداثيتا مجموع متجهتين :

* / قاعدة :

$(O;I;J)$ معلم متعامد للمستوى
$\overrightarrow{AB}(a;b)$ و $\overrightarrow{CD}(c;d)$ متجهتان غير منعدمتين
إحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ هما : $a+c$ و $b+d$
ونكتب : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(a+c\,;b+d)$

* / مثال :

$(O;I;J)$ معلم متعامد للمستوى.

نعتبر المتجهتين : $\vec{u}(-2;3)$ و $\vec{v}(2;-4)$.

لنحدد زوج إحداثيتي المتجهة $\vec{u}+\vec{v}$.

لدينا : $\vec{u}+\vec{v}(-2+2\,;3-4)$

أي : $\vec{u}+\vec{v}(0\,;-1)$

IV _ إحداثيتا متجهة في عدد حقيقي :

* / قاعدة :

$(O;I;J)$ معلم متعامد للمستوى
$\overrightarrow{AB}(a;b)$ و k عدد حقيقي غير منعدم
إحداثيتا المتجهة $k.\overrightarrow{AB}$ هما : $k.a$ و $k\,b$
ونكتب : $k.\overrightarrow{AB}(k.a\,;k\,b)$

* / مثال :

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O;I;J)$ نعتبر المتجهة $\vec{u}(5;-3)$.

سيكون لدينا : $\frac{1}{2}\vec{u}\left(\frac{5}{2};\frac{-3}{2}\right)$

R

V_ المسافة بين نقطتين :

* / قاعدة :

في معلم متعامد ممنظم

إذا كانت $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ فإن :

$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

* / مثال :

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O;I;J)$ نعتبر النقطتين $A(-1;3)$ و $B(3,2)$.

سيكون لدينا :

$$\begin{aligned}AB&=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}\\&=\sqrt{(3+1)^2+(2-3)^2}\\&=\sqrt{4^2+(-1)^2}\\&=\sqrt{16+1}\\&=\sqrt{17}\end{aligned}$$

R

ذ.عبد الله بن ياسين

المعلم في المستوى

تمرين رقم 1

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم(O ؛I؛J) .

1) مثل النقط : A (-3؛ 4) ؛ B (1 ؛ -2) ؛ C (6 ؛ 1) ؛ D(2؛ 7) .

2) بين أن الرباعي ABCD متوازي الأضلاع

تمرين رقم 2

نعتبر النقط التالية : A(3 ؛ -2) ؛ B (7 ؛ 6) ؛ A'(α ؛ β) ؛ I (x ؛ y)

1)حدد العددين x و y بحيث تكون I منتصف القطعة [AB] .

2)حدد α و β بحيث تكون A' صورة النقطة A بالإزاحة التي متجهتها(-1 ؛2) $\vec{U}$

3) حدد إحداثيتا النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة التي متجهتها $\vec{U}$.

تمرين رقم 3

نعتبر النقط : A(-2؛2) و B (2؛3) و C (0؛ -2) .

(1 حدد إحداثيتي النقطة E بحيث : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

(2 حدد إحداثيتي النقطة F بحيث : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}$.

(3 بين أن النقطة E هي منتصف [CF] .

تمرين رقم 4

A(-1؛1) و E (2؛ -3) من المستوى المنسوب للمعلم المتعامد الممنظم(O؛I؛J)

(1 مثل النقطتين A و E وحدد إحداثية B مماثلة A بالنسبة للنقطة E .

(2 بين أن النقطة C (5؛1) من الدائرة (ξ) التي قطرها [AB] .

(3 حدد إحداثية النقطة D بحيث : $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB}$.

تمرين رقم 5

A (6 ؛ 5) و B (2 ؛ -3) و C (-4 ؛ 0) نقط من المستوى المنسوببللمعلم المتعامد الممنظم (O؛I؛J) .

(1 أحسب : AB ؛ AC و BC واستنتج طبيعة المثلث ABC .

(2 أحسب مساحة ومحبط المثلث ABC .

(3 أحسب : $\sin(\widehat{ACB})$.

(4 إستنتج قيمة مقربة لقياس الزاوية $\widehat{ACB}$ إلى 0,01 بإفراط .

تمرين رقم 6

A (2؛4) ؛ B (-1؛1) و C (3؛1) نقط من المستوى المنسوب للمعلم المتعامد الممنظم (O؛I؛J) .

بين أن النقطة I (1؛2) هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

R

معادلـــة مستقيـــم

I _ المعادلة المختصرة لمستقيم غير مواز لمحور الأراتيب :

1) – تعريف :

مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق المتساوية : $y = mx + p$ هي مستقيم .
المتساوية $y = mx + p$ تسمى المعادلة المختصرة لمستقيـــم .
العدد m يسمى الميل أو المعامل الموجه .
العدد p يسمى الأرتوب عند الأصــل .

2) – مثال 1 : معادلة مستقيم غير مواز لمحور الأراتيب :

نعتبر (D) مستقيم معادلته المختصرة هي : $(D): y = \frac{-1}{2}x + 5$.

ميل المستقيم (D) هو العدد $\frac{-1}{2}$.

الأرتوب عند الأصــل هو العدد 5 .

3) – مثال 2 : إنشاء مستقيم معرف بمعادلته :

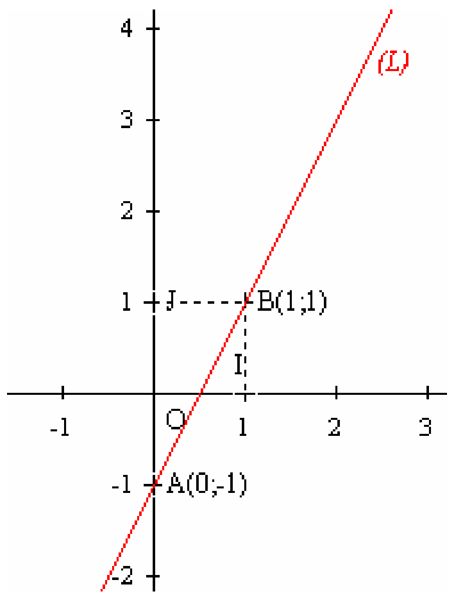
نعتبر المستوى منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

لننشئ المستقيم (L) الذي معادلته المختصرة هي : $(L): y = 2x - 1$.

لدينا :

x	0	1
y	-1	1
$M(x;y)$	$A(0;-1)$	$B(1;1)$

إذن :



R

4) – ميل مستقيم معرف بنقطتين مختلفتين:

إذا كانت $A\left(x_A;y_A\right)$ و $B\left(x_B;y_B\right)$ نقطتين مختلفتين بحيث $x_A \neq x_B$

فإن ميل المستقيم (AB) هو العدد : $\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$.

* / ملاحظة هامة : كل نقطة M إحداثياتها تحققان معادلة مستقيم (D) تنتمي إلى هذا المستقيم .

* / تطبيـقات :

1) – تحديد المعادلة المختصرة لمستقيم معرف بنقطتين :

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) بحيث : $A(1;-2)$ و $B(-2;3)$.

لدينا المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) على شكـل : $(AB): y = mx + p$.

لنحدد m :

لدينا :
$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2-3}{1+2} = \frac{-5}{3}$$

إذن : $(AB): y = \dfrac{-5}{3}x + p$.

لنحدد p :

بما أن النقطة $A(1;-2)$ تنتمي إلى المستقيم (AB) فإن :

$$-2 = \frac{-5}{3}\times 1 + p$$
$$-2 = \frac{-5}{3} + p$$
$$p = -2 + \frac{5}{3}$$
$$p = \frac{-6+5}{3}$$
$$p = \frac{-1}{3}$$

و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) هي : $(AB): y = \dfrac{-5}{3}x - \dfrac{1}{3}$

R

2) – تحديد المعادلة المختصرة لمستقيم معرف بميله و بنقطة يمر منها :

لنحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) ميله 3 و يمر من النقطة $E(2;-1)$.

لدينا معادلة المستقيم (Δ) على شكل : $(\Delta) : y = 3x + p$.

لنحدد p :

بما أن النقطة $E(2;-1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) فإن :

$$\begin{aligned} -1 &= 3\times 2 + p \\ -1 &= 6 + p \\ p &= -1 - 6 \\ p &= -7 \end{aligned}$$

و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta) : y = 3x - 7$

3) – شرط استقامية نقط :

A و B و C نقط مستقيمية يعني أنها تنتمي إلى نفس المستقيك الذي معادلته المختصرة هي :

$$y = mx + p$$

و منه فإن :

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \quad \text{و} \quad m = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}$$

و بالتالي فإن :

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}$$

* / مثال :

لنبين أن النقط $A(1;-2)$ و $B(-2;3)$ و $C\left(0;\frac{-1}{3}\right)$ مستقيمية :

لدينا :

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2-3}{1+2} = \frac{-5}{3}$$

$$\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{3+\frac{1}{3}}{-2-0} = \frac{\frac{10}{3}}{-2} = \frac{10}{3}\frac{-1}{2} = \frac{-5}{3}$$

إذن :

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}$$

وبالتالي نقول أن النقط $A(1;-2)$ و $B(-2;3)$ و $C\left(0;\frac{-1}{3}\right)$ مستقيمية .

R

5) – حالات خـاصة :

معادلة مستقيم (D) مار بنقطة معلومة A و يوازي محور الأفاصيل هي : $y = y_A$.
-- جميع النقط التي تنتمي إلى المستقيم (D) لها نفس الأرتوب y_A .
معادلة مستقيم (Δ) مار بنقطة معلومة A و يوازي محور الأراتيب هي : $x = x_A$.
-- جميع النقط التي تنتمي إلى المستقيم (Δ) لها نفس الأفصول x_A

II _ التوازي والتعامـد :

1) – تـوازي مستقيمين :

-- إذا كان مستقيمان متوازيين فإن لهما نفس الميل .
-- إذا كان لمستقيمين نفس الميل فإنهما يكونان متوازيين .

* / مثال :

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستقيم (D) معادلته المختصرة هي :

$$(D) : y = 2x - 1$$

لنحدد معادلة المستقيم (Δ) المار من النقطة $A(-1;2)$ و الموازي للمستقيم (D).

لدينا المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta) : y = mx + p$.

بما أن $(D) // (\Delta)$ فإن : $m = 2$.

إذن : $(\Delta) : y = 2x + p$.

و بما أن $A \in (\Delta)$ فإن :

$$2 = 2\times(-1) + p$$
$$2 = -2 + p$$
$$p = 2 + 2$$
$$p = 4$$

و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta) : y = 2x + 4$

2) – تعامـد مستقيمين :

-- إذا كان مستقيمان متعامدين فإن جداء ميليهما يساوي -1 .
-- إذا كان جداء ميلي مستقيمين يساوي -1 فإنهما يكونان متعامدين .

R

* / مثال :

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستقيم (D) معادلته المختصرة هي :

$$(D): y = 2x - 1$$

لنحدد معادلة المستقيم (Δ) المار من النقطة $A(-1;2)$ و الموازي للمستقيم (D).

لدينا المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta) : y = mx + p$.

بما أن $(\Delta) \perp (D)$ فإن :

$$m \times 2 = -1$$

$$m = \frac{-1}{2}$$

إذن : $(\Delta) : y = \frac{-1}{2}x + p$.

و بما أن $A \in (\Delta)$ فإن :

$$2 = \frac{-1}{2} \times (-1) + p$$

$$2 = \frac{1}{2} + p$$

$$p = 2 - \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{3}{2}$$

و بالتالي فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) هي : $(\Delta) : y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2}$

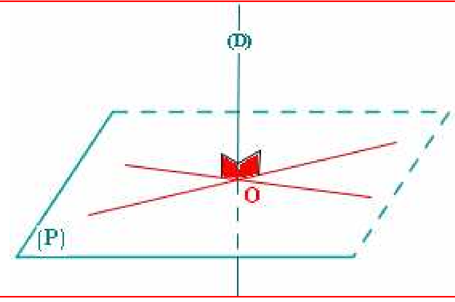
R

الـهندسة في الفضاء
الـمساحـات و الـحجوم
تـكبير و تـصـغير

1 ـ تـعامـد مـستقيم ومستوى

تـعـريف

يـكون مـستقيم (D) عـموديا على مستوى (P))أو المستوى (P) عـموديا على المستقيم (D) (في نقطة O؛إذا كـان (D) عموديا في النقطة O على مستقيمين من (P) مـتقاطعين في النقطة O.



خاصية 1

إذا كـان مـستقيم (D) عـموديا على مستوى (P)

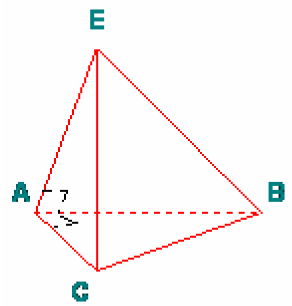
فإن (D) يكون عمودياً على جميع المستقيمات الموجودة ضمن (P).

مـلاحـظـة: في كل مستوى في الفضاء؛ جميع خصائص الهندسة المستوية تبقى صالحة.

تـطـبيق

ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A و E نقطة من الفضاءلاتنتمي إلى المستوى (ABC) بحيث المثلث ABE قائم الزاوية في A.(أنظر الشكل)

بين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوى (ACE).



نبين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوى(ACE)

* لدينا: ABC و ABE مثلثين قائمي الزاوية في A.

إذن: (AB) عمودي على (AE) و (AC).

* بما أن: (AE) و (AC) من المستوى (ACE).

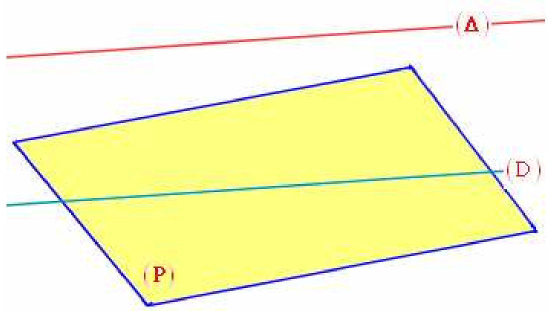
إذن: (AB) عمودي على المستوى(ACE).

2 ـ تـوازي مـستقيم ومـستوى

خـاصـية 2

* كـل مستقيم (Δ) لا يشترك مع مستوى (P) في أي نقطة يكون موازيا قطعا لهذا المستوى.

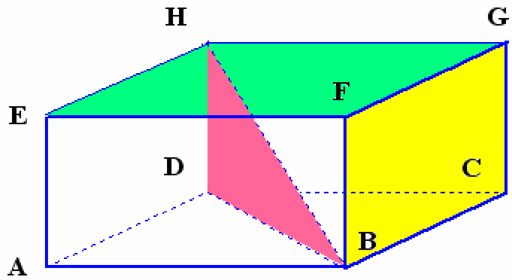
* إذا كان مستقيم (D) ضمن (P)؛ فإن (D) يوازي (P).



R

3 ـ مبرهنة فيثاغورس في الفضاء

مبرهنة فيثاغورس المباشرة ؛ (مثال)



ABCDEFGH متوازي المستطيلات قائم.

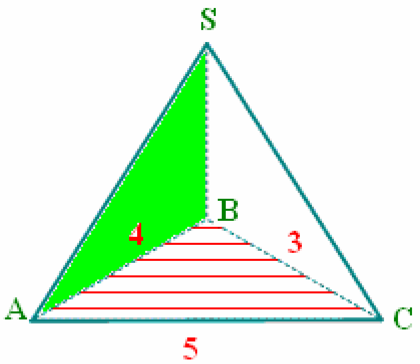
* لدينا (DH) عمودي على المستوى (ACD) (لأن جميع وجوه ABCDEFGH مستطيلات) والمستقيم (DB) ضمن المستوى (ACD)

إذن: (DH) عمودي على (DB) (ح ؛ خاصية 1)

أي: DBH قائم الزاوية في D

وبالتالي فإن: $BH^2=DB^2+DH^2$. (ح؛ م ؛ ف ؛ م)

مبرهنة فيثاغورس العكسية ؛ (مثال)



SABC رباعي الأوجه ؛ (أنظر الشكل).

في الـمستوى (ABC)

* لدينا: $AB^2+BC^2=4^2+3^2$ و $AC^2=5^2$

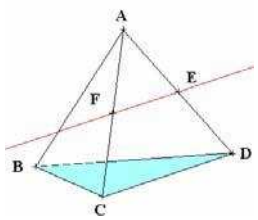
إذن: $AB^2+BC^2=25$ و $AC^2=25$

إذن: $AB^2+BC^2=AC^2$

وبالتالي: ABC قائم الزاوية في B (ح ؛ م ؛ ف ؛ ع) .

خـاصية طـاليس في الـفضاء

خـاصية طـاليس الـمباشر؛ (مـثال)

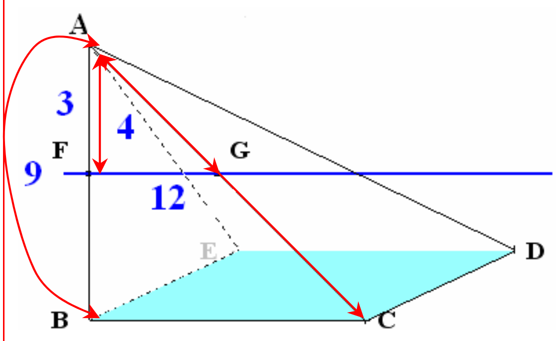


في المستوى (ACD) .

* لـديـنا: $E\in[AD]$ و $F\in[AC]$ و $(EF)//(CD)$.

* إذن: $\frac{AE}{AD}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{CD}$ (ح . خ . ط. م) .

خـاصية طـاليس الـعكسية؛(مـثال)



في المثلث ABC

* لـديـنا: $\frac{AG}{AC}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ و $\frac{AF}{AB}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

إذن: $\frac{AF}{AB}=\frac{AG}{AC}=\frac{1}{3}$

في الـمستوى (ABC)

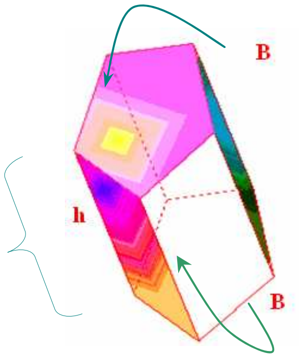
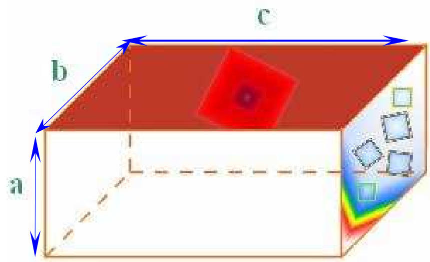
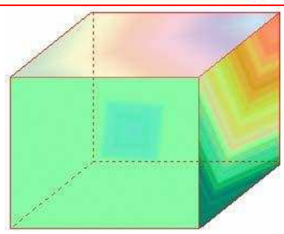
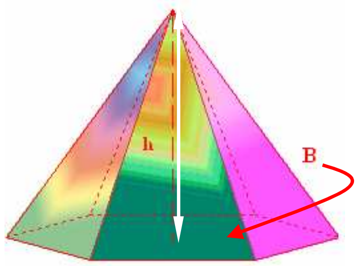
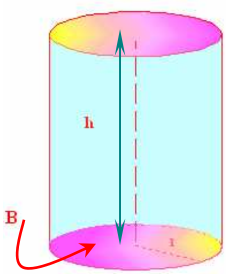
* لـديـنا: $F\in[AB]$ و $G\in[AC]$ و $\frac{AF}{AB}=\frac{AG}{AC}=\frac{1}{3}$

إذن: $(FG)//(BC)$. (ح . خ . ط . ع) .

R

5 ـ حساب الحجوم

خلاصة

المجسم	تـعريفـه	حجمه V ومساحته الكلية S	
الموشور القائم	مجسم أوجهه الجانبية مستطيلات وقاعدته مضلعان متقايسان		$S=2B+ph$ $V=B\times h$ حيث: p و B محيط و مساحة القاعدة على التوالي . h : ارتفاع الموشور القائم.
متوازي المستطيلات	موشور قائم قاعدتاه مستطيلات متقايسة		$S=2(ab+bc+ca)$ $V=a\times b\times c$
المكعب	موشور قائم كل وجه من أوجهه مربع		$S=6a^2$ $V=a^3$
الهرم	مجسم أوجهه الجانبية مثلثات لها رأس مشترك وقاعدته مضلع		$V=\dfrac{B\times h}{3}$
الأسطوانة القائمة	[مجسم دوراني (يُوَلِّدُهُ) دوران مستقيم حول مستقيما يوازيه]؛ السطح الجاني (بعد النشر) مستطيل والقاعدتان قرصان متقايسان.		$S=2(\pi r^2+\pi rh)$ $S=2\pi r(r+h)$ $V=B\times h=\pi r^2h$

4 ــ تـكبير تـصغير

تعريف

انطلاقا من شكل نستخرج شكلا آخر يشابهه

وذالك بضرب أبعاده في عدد حقيقي k موجب قطعا ويخالف 1

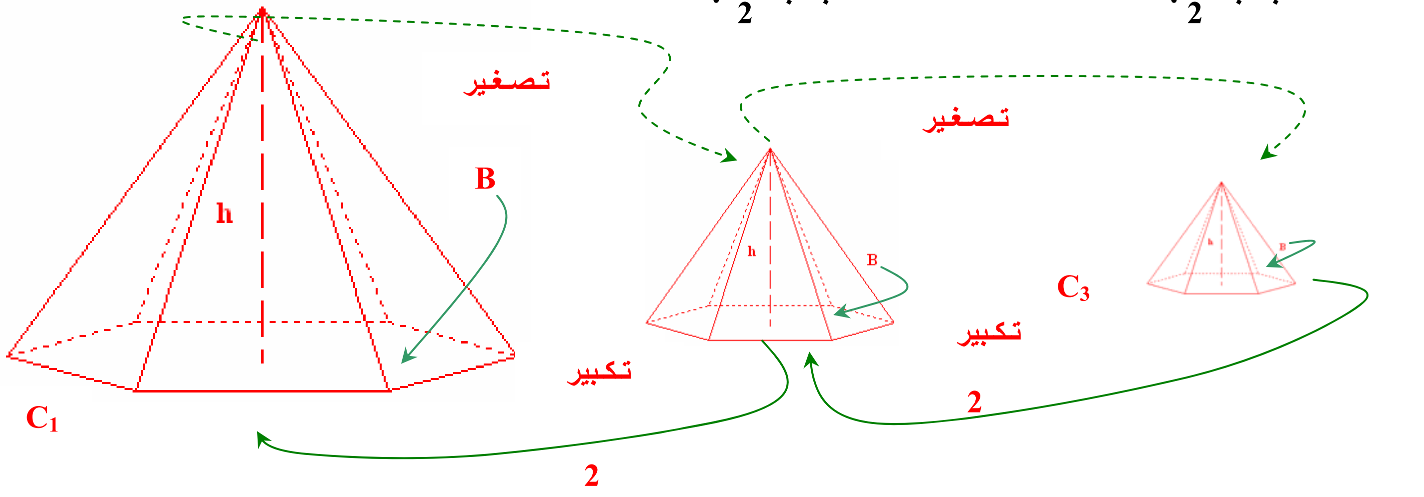
R

مثـــال

الهرم C_3 هو تصغير للهرم C_2 بنسبة $\frac{1}{2}$.

الهرم C_2 هو تصغير للهرم C_1 بنسبة $\frac{1}{2}$.

الهرم C_1 هو تكبير للهرم C_2 بنسبة 2 .



مثال: إذا كان حجم الهرم C_1 هو $4cm^3$ فإن حجم الهرم C_2 هو $4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

و حجم الهرم C_3 هو $4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

ملاحظة

- نحصل على شكل مكبر إذا كان $1 > k$. نقول إننا قمنا بتكبير نسبته k .
- نحصل على شكل مصغر إذا كان $0 < k < 1$. نقول إننا قمنا بتصغير نسبته k .

5 ـ أثر التكبير والتصغير على المساحات والحجوم.

بصفة عامة

عند تكبير أو تصغير مجسم في الفضاء:

إذا ضربنا الأطوال في عدد k موجب قطعا فإن :

- المساحات تضرب في k^2 .
- الحجم يضرب في k^3 .

R

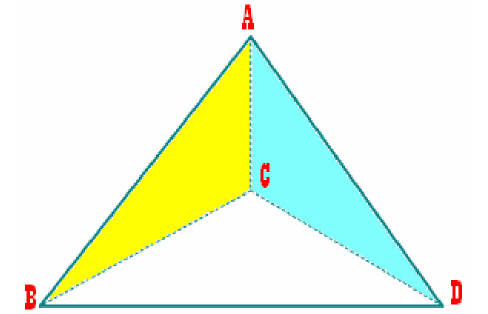
تمارين للبحث

تمرين 1

أنظر الشكل.

ABCD رباعي الأوجه ؛جميع وجوهه مثلثات متساوية الأضلاع.

هل المستقيمان (AC) و (BD) متعامدان؛ علل جوابك ؟



تمرين 2

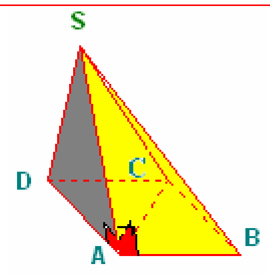
أنظر الشكل جانبه

SABCD هرما قاعدته متوازي الأضلاع ABCD

حيث: $(AC) \perp (AB)$ و (SA) عمودي على المستوى $(ABCD)$.

1) بين أن: (CD) عمودي على المستوى (SAC)

2) استنتج أن: $(SC) \perp (CD)$.



تمرين 3

أنظر الشكل جانبه

SABCD هرما قاعدته متوازي الأضلاع ABCD.

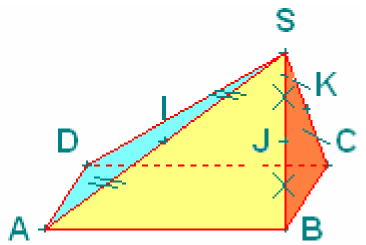
لتكن I و J و k منتصفات القطع [SA] و[SB] و[SC] على التوالي.(أنظر الشكل).

1) بين أن المستقيمين (IJ) و (DC) متوازيان.

2) أ ـ بين أن المستقيم (DC) ضمن المستوى (CIJ).

ب ـ حدد تقاطع المستويين (ABCD) و(CIJ).

ج ـ حدد تقاطع المستويين (CIJ) و (SAD).



تمرين 4

أنظر الشكل جانبه

SABCD هرما منتظما قاعدته مربع ABCD مركزه O بحيث :

$SO = 20cm$ و $BC = 12cm$.

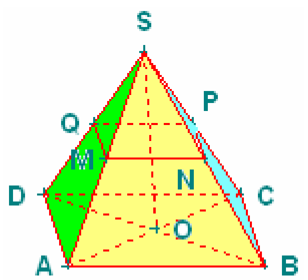
النقط M؛N؛P؛Q هي على التوالي منتصفات القطع [SA] ؛ [SB] ؛[SC]؛[SD].

1) أحسب MN .

2) إذا علمت أن الهرم SMNPQ هو تصغير للهرم SABCD فحدد:

أ ـ نسبة هذا التصغير.

ب - حجم الهرم SMNPQ.



R

تصحيح تـمرين 1

ABCD رباعي الأوجه؛جميع وجوهه مثلثات متساويّة الأضلاع

إذن: $AC = AD$ و $AB = AC$

أي : $AB = AD$

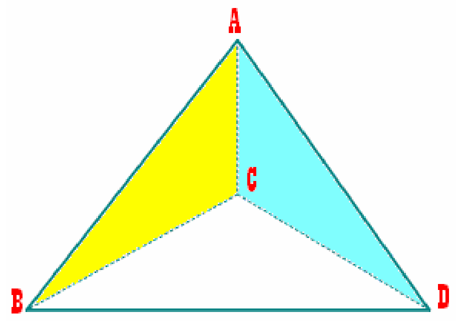
ومنه : A من واسط $[BD]$. ① (ح ؛ خ؛ مم لواسط قطعة)

أيضا: $BC = CD$

إذن : C من واسط $[BD]$. ② (ح ؛ خ؛ مم لواسط قطعة)

من ① و ② نستنتج : (AC) واسط $[BD]$ ($A \neq C$)

ومنه: $(AC) \perp (BD)$. (ح تعريف واسط قطعة)



تصحيح تـمرين 2

1) نبين أن: $(CD) \perp (SAC)$.

* لدينا: $(ABCD)$ متوازي الأضلاع و $(AC) \perp (AB)$. (ح ـ مع)

إذن: $(AB) \parallel (CD)$ و $(AB) \perp (AC)$

والتالي: $(AC) \perp (CD)$. ①

* لدينا $(ABCD) \perp (SA)$ و (CD) ضمن المستوى $(ABCD)$ (ح؛مع)

إذن: $(CD) \perp (SA)$ ②؛ (ح ـ خ : 1)

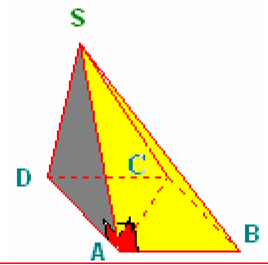
بما أن: (SA) و (AC) من المستوى (SAC)

من ① و ② نستنتج أن: $(CD) \perp (SAC)$

2) استنتج أن: $(SC) \perp (CD)$

* لدينا: $(CD) \perp (SAC)$ و (SC) ضمن (SAC)

إذن: $(SC) \perp (CD)$. (ح ـ خ : 1)



R

تصحيح تـمرين 3

1) نبين أن: المستقيمان (IJ) و (DC) متوازيان.

❁ (طريقة 1) باستعمال خاصية طاليس المباشرة

❖ في المثلث SAB .

¤ لدينا: $\frac{SJ}{SB}=\frac{SJ}{2SJ}=\frac{1}{2}$ و $\frac{SI}{SA}=\frac{SI}{2SI}=\frac{1}{2}$

(لأن I وJ منتصفي[SA]و[SB]على التوالي ح؛معطيات)

إذن: $\frac{SI}{SA}=\frac{SJ}{SB}=\frac{1}{2}$

ومنه: (IJ) و(AB) متوازيان.(ح ؛ خ ؛ طاليس؛م)

❁ (طريقة 2) باستعمال المستقيمات الموازية لأضلاع مثلث

❖ في المثلث SAB .

¤ لدينا:I و J منتصفي[SA] و[SB](على التوالي)

إذن: (IJ) و (AB) متوازيان (ح؛ خ المثلث)

¤ بماأن: (AB) و(DC) متوازيان.

(لأن ABCD متوازي أضلاع؛ ح؛ معطيات)

إذن:(IJ) و(DC) متوازيان قطعا.

2) أ ـ نبين أن المستقيم(DC) ضمن المستوى(CIJ).

¤ لدينا: (IJ) و(DC) متوازيان قطعا.(ح؛س 1)

إذن : النقط I و J وC و D مستوائية.

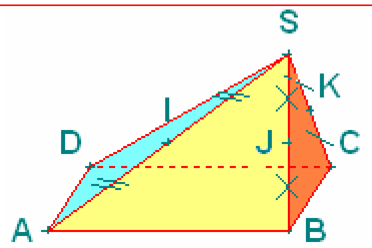
ومنه : (DC) ضمن المستوى (CIJ)

ب ـ تحديد تقاطع المستويين (ABCD) و(CIJ).

¤ لدينا: (CD) ضمن المستوى(CIJ).(ح؛س.2 أ.)

(CD) ضمن المستوى(ABCD).

إذن: (CD) ضمن المستويين (CIJ) و (ABCD).



¤ بما أن: A من المستوى(ABCD)ولا تنتمي لـ(CIJ)

إذن: المستويين (CIJ) و (ABCD) مختلفان.

ومنه: تقاطع المستويين (CIJ) و (ABCD) هو(CD)

ج ـ حدد تقاطع المستويين (CIJ) و (SAD).

¤ لدينا: I منتصف [SA] (ح ؛ م).

[SA] ضمن المستوى (SAD).

إذن: I من المستوى (SAD).

و منه : (DI) من المستوى(SAD). ①

¤ بما أن: (DC) ضمن المستوى (CIJ). (ح؛س2 أ)

إذن: (DI) ضمن المستوى (CIJ) ②

من ① و ② نستنتج أن :

(DI) ضمن المستويين (SAD) و (CIJ).

¤ بما أن: (SAD) و (CIJ) مختلفين.

(لأن A من (SAD) ولا تنتمي إلى المستوى(CIJ))

إذن: (DI) هو تقاطع المستويين (SAD) و (CIJ)

R

تصحيح تـمرين 4

1) نحسب MN .

* نبين أن: $(MN) // (AB)$.

في المثلث SAB:

¤ لدينا: M و N منتصفي [SA] و [SB] على التوالي

إذن: $\frac{SM}{SA} = \frac{SM}{2SM} = \frac{1}{2}$

$\frac{SN}{SB} = \frac{SN}{2SN} = \frac{1}{2}$

ومنه: $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{2}$.

¤ بما أن: M و N من [SA] و [SB] على التوالي.

إذن: $(MN) // (AB)$. (ح؛خ؛طاليس ؛ع)

بين هذا باستعمال: المستقيمات الموازية لأضلاع مثلث.

في المثلث SAB .

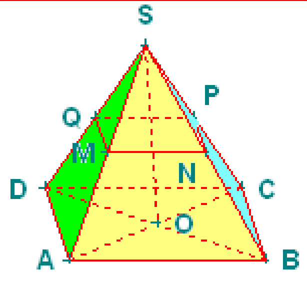
لدينا: $(MN) // (AB)$ و M و P من [SA] و [SB] على التوالي.

إذن: $\frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$.(ح؛خ؛طاليس ؛م)

أي: $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$

إذن: $MN = \frac{AB}{2} = \frac{12}{6} = 2$.

(AB=BC=12cm ؛ لأن ABCD مربع؛معطيات)



2 ـ الهرم SMNPQ هو تصغير للهرم SABCD.

أ ـ تحديد نسبة هذا التصغير.

¤ لدينا: $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$ (من خلال ماسبق)

إذن نسبة التصغير هي $\frac{1}{2}$.

ب ـ تحديد حجم الهرم SMNPQ.

ليكن V' و V حجم الهرم SMNPQ والهرم SABCD على التوالي

إذن: $V'=\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)V$

أي: $V'=\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{3}AB^2 \times SO$

(لأن $V=\frac{1}{3}AB^2 \times SO$)

¤ بماأن: $SO = 20cm$ و $BC = 12cm$.

إذن: $V'=120cm^3$