التصحيح المفصل للموضوع الاول البكالوريا الإفتراضية(01) 2020

شعبة التقني الرياضي

من إعداد السيد حجاج براهيم

التمرين الأول: (04 نقاط)

I) f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{7x+6}{x+6}$.

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

لدينا $f'(x)=\dfrac{7\times(x+6)-(7x+6)}{(x+6)^2}$ ومنه $f'(x)=\dfrac{36}{(x+6)^2}$

من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$ يكون: $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n<u_{n+1}<3$.

من أجل $n=0$ فإن $u_0=0$ و $u_1=f(u_0)=1$ ومنه $0\le u_0<u_1<3$ الخاصية صحيحة من اجل $n=0$

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$ أي $0\le u_{n+1}<u_{n+2}<3$

لدينا $0\le u_n<u_{n+1}<3$ اذن $f(0)\le f(u_n)<f(u)_{n+1}<f(3)$

اذن $1\le u_{n+1}<u_{n+2}<3$

اذن $0\le u_{n+1}<u_{n+2}<3$ لان $0\le 1$

اذن الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ اذن حسب مبدا البرهان بالتراجع الخاصية صحيحة أي من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0\le u_n<u_{n+1}<3$

2- بيّن ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ثم إستنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة.

لدينا من السؤال السابق $u_n<u_{n+1}$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

بما أن المتتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الاعلى بالعدد3 فهي متقاربة

3-أ)تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $3-u_{n+1}<\dfrac{2}{3}(3-u_n)$.

لدينا $3-u_{n+1}=3-\dfrac{7u_n+6}{u_n+6}$ ومنه $3-u_{n+1}=\dfrac{3u_n+18-7u_n-6}{u_n+6}$

ومنه $3-u_{n+1}=\dfrac{12-4u_n}{u_n+6}$

ومنه $3-u_{n+1}=\dfrac{4(3-u_n)}{u_n+6}$

لدينا $u_n>0$ ومنه $u_n+6>6$

ومنه $\dfrac{1}{u_n+6}<\dfrac{1}{6}$

ومنه $\frac{4(3-u_n)}{u_n+6}<\frac{4}{6}(3-u_n)$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $3-u_{n+1}<\frac{2}{3}(3-u_n)$.

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<3-u_n\le 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$. ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

دينا $\begin{cases} 0<3-u_1-\le\frac{2}{3}(3-u_0) \\ 0<3-u_2\le\frac{2}{3}(3-u_1) \\ . \\ . \\ . \\ 0<3-u_{n+1}<\frac{2}{3}(3-u_n) \end{cases}$ ومنه $0<(3-u_1)\times(3-u_2)\times....\times(3-u_n)\le\frac{2}{3}(3-u_0)\times\frac{2}{3}(3-u_1)\times....\times\frac{2}{3}(3-u_{n-1})$

ومنه $0<(3-u_n)\le\left(\frac{2}{3}\right)^n(3-u_0)$

ومنه $0<(3-u_n)\le\left(\frac{2}{3}\right)^n(3-0)$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<3-u_n\le 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

بما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} 3-u_n=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=3$

4) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $3n+3-4\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)<u_0+u_1+\cdots+u_n\le 3n+3$.:

لدينا $0<3-u_0+3-u_1+\cdots+3-u_n<3\left(\frac{2}{3}\right)^0+3\left(\frac{2}{3}\right)+3\left(\frac{2}{3}\right)^2+.....+3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ومنه $0<3(n+1)-u_0-u_1-\cdots-u_n<3\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$

ومنه $0<3(n+1)-u_0-u_1-\cdots-u_n<9\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

ومنه $-3(n+1)<-u_0-u_1-\cdots-u_n\le 9\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)-3(n+1)$

ومنه $3n+3-9\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)<u_0+u_1+\cdots+u_n\le 3n+3$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1)ا)حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة (I) ذات المجهول z التالية : $z^2-(4\sin\alpha)z+4=0$ حيث α وسيط حقيقي .

نحسب المميز (Δ)

لدينا $\Delta=(4\sin\alpha)^2-4\times4$ ومنه $\Delta=16\sin^2\alpha-16$ ومنه $\Delta=16(1-\cos^2\alpha)-16$ ومنه $\Delta=-16\cos^2\alpha$

ومنه $\Delta=(i4\cos\alpha)^2$

وبتالي $\Delta<0$ المعادلة تقبل حلان مركبان $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

ومنه $z_1=\dfrac{4\sin\alpha+i4\cos\alpha}{2}$ و $z_1=2(\sin\alpha+i\cos\alpha)$ وبتالي $z_2=\dfrac{4\sin\alpha-i4\cos\alpha}{2}$ و $z_2=2(\sin\alpha-i\cos\alpha)$

مجموعة حلول المعادلة $S=\{2(\sin\alpha-i\cos\alpha);2(\sin\alpha+i\cos\alpha)\}$

ب) أكتب حلول المعادلة على الشكل الأسي.

لدينا $z_1=2(\sin\alpha+i\cos\alpha)$ ومنه $z_1=2i(-i\sin\alpha+\cos\alpha)$

ومنه $z_1=2e^{i\frac{\pi}{2}}(\cos\alpha-i\sin\alpha)$

ومنه $z_1=2e^{i\frac{\pi}{2}}(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))$

ومنه $z_1=2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\alpha}$

ومنه $z_1=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$

لدينا $z_2=\overline{z_1}$ ومنه $\overline{z_2}=2e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$

2)نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط. A ، B و C التي لاحقاتها $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ ، $z_C=-2-2i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) أكتب العدد المركب z_C-z_A على الشكل الآسي .

لدينا $z_C-z_A=-3-3i\sqrt{3}$ ومنه $z_C-z_A=6e^{i\frac{4\pi}{3}}$

ب) جد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\dfrac{-6i}{z_C-z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.

لدينا $\dfrac{-6i}{z_C-z_A}=\dfrac{-6i}{6e^{i\frac{4\pi}{3}}}$ ومنه $\dfrac{-6i}{z_C-z_A}=\dfrac{6e^{i\frac{3\pi}{2}}}{6e^{i\frac{4\pi}{3}}}$ ومنه $\dfrac{-6i}{z_C-z_A}=e^{i\frac{3\pi}{2}-i\frac{4\pi}{3}}$ ومنه $\dfrac{-6i}{z_C-z_A}=e^{i\frac{\pi}{6}}$

يكون من أجلها العدد المركب $\left(\dfrac{-6i}{z_C-z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا معناه $Arg\left(\dfrac{-6i}{z_C-z_A}\right)^n=k\pi;k\in\mathbb{N}$

معناه $nArg\left(\dfrac{-6i}{z_C-z_A}\right)=k\pi;k\in\mathbb{N}$

معناه $n\dfrac{\pi}{6}=k\pi;k\in\mathbb{N}$ معناه $n=6k;k\in\mathbb{N}$

3) أ) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$. ثم أنشئ G .

لدينا $z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{1-1++2}$ ومنه $z_G = \frac{1+i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}-4-4i\sqrt{3}}{2}$

ومنه $z_G = \frac{-4-2i\sqrt{3}}{2}$

ومنه $z_G = -2-i\sqrt{3}$

ت) أحسب z_D لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع .

يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD}$

لدينا $z_B - z_A = z_D - z_G$ ومنه $z_B - z_A + z_G = z_D$

ومنه $1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}-2-i\sqrt{3} = z_D$

ومنه $z_D = -2-i3\sqrt{3}$

5) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C.

عين (E) مجموعة النقط M التي من أجلها يكون $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا سالبا تماما .

يكون $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا سالبا تماما معناه $\frac{z_A - z}{z_C - z} = k ; k < 0$

معناه $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC}k ; k < 0$

ومنه (E) القطعة المستقيمة $[AC]$ بإستثناء النقطتين A و C.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1)نعتبر المعادلة $15x-7y=8$.........(1) حيث x و y عددان طبيعيين .

أ)عين الثنائية $(x_0;y_0)$ حلا خاصا للمعادلة (1) حيث $x_0+y_0=2$

نحل الجملة $\begin{cases}15x_0-7y_0=8\\x_0+y_0=2\end{cases}$

لدينا $\begin{cases}15x_0-7y_0=8\\x_0+y_0=2\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}15x_0-7y_0=8\\7x_0+7y_0=14\end{cases}$ ومنه بالجمع نجد $22x_0=22$

و بتالي $x_0=1$ ومنه $y_0=1$ حيث

ب) حل في مجموعة الاعداد الطبيعية المعادلة (1)

نحل الجملة $\begin{cases}15x-7y=8\\15(2)-7(2)=8\end{cases}$

لدينا $\begin{cases}15x-7y=8\\15(2)-7(2)=8\end{cases}$ ومنه بالطرح $15(x-1)-7(y-1)=0$

ومنه $15(x-1)=7(y-1)$

لدينا 7 يقسم $15(x-2)$ و15 و 7 أوليان فيما بينهما ومنه حسب غوص 7يقسم $(x-1)$

وبتالي يوجد عدد صحيح kبحيث $(x-1)=7k$ و بتالي $x=7k+1$ بالتعقيض نجد $y=15k+1$

ومنه مجموعة الحلول $S=\{(7k+1;15k+1)_{k\in\mathbb{N}}\}$

2)أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الأقليدية للعدد 9^n على 13 .

لدينا $9^0\equiv1[13]$ و $9^1\equiv9[13]$ و$9^2\equiv3[13]$ و$9^3\equiv1[13]$ وبتالي بواقي قسمة الأقليدية للعدد 9^n على 13 تشكل متتالية دورية دورها 3

ومنه من اجل $n=3k$ فإن $9^{3k}\equiv1[13]$ ومنه من اجل $n=3k+1$ فإن $9^{3k+1}\equiv9[13]$

ومنه من اجل $n=3k+2$ فإن $9^{3k+2}\equiv3[13]$

ب)بين أنه إذاكانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (1) فإن $9^{2020y+1441}-9^{15x}-2\equiv0[13]$

لدينا $9^{2020y+1441}\equiv9^{2020(15k+1)+1441}[13]$ ومنه $9^{2020y+1441}\equiv9^{3(2020\times5+1153)+2}[13]$ ومنه $9^{2020y+1441}\equiv3[13]$

لدينا $9^{15x}\equiv9^{3(5x)}[13]$ ومنه $9^{15x}\equiv1[13]$

لدينا $9^{2020y+1441}-9^{15x}-2\equiv3-1-2[13]$ ومنه $9^{2020y+1441}-9^{15x}-2\equiv0[13]$

أ)عين قيم الممكنة لـ $p\gcd(x;y)$ حيث $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) .

نضع $p\gcd(x;y)=d$

d/x وd/y فإن d/(15x−7y) ومنه d/8

و بتالى $d\in D_8$ ومنه $d\in\{1;2;4;8\}$ حيث $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) .

ب) بين أن مجموعة الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1) التى يكون من أجلها $p\gcd(x;y)=4$ هي $S=\{(56\alpha+36;120\alpha+76)_{\alpha\in\mathbb{N}}\}$ و α عدد طبيعى.

يكون $p\gcd(x;y)=4$ معناه $x\equiv 0[4]$ و $y\equiv 0[4]$.

لدينا $x\equiv 0[4]$ ومنه $7k+1\equiv 0[4]$ ومنه $3k\equiv -1[4]$ ومنه $9k\equiv -3[4]$ ومنه $k\equiv 1[4]$

ومنه $k=4k'+1$ و k' عدد فردي أي $k'=2\alpha+1$

وبتالى $k=8\alpha+5$ و α عدد طبيعي

لدينا $\begin{cases} x=7k+1 \\ y=15k+1 \end{cases}$ و $k=8\alpha+1$ ومنه $\begin{cases} x=7(8\alpha+5)+1 \\ y=15(8\alpha+5)+1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=56\alpha+36 \\ y=120\alpha+76 \end{cases};\alpha\in\mathbb{N}$ و α عدد طبيعي

مجموعة الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1) التى يكون من أجلها $p\gcd(x;y)=4$ هي $S=\{(56\alpha+36;120\alpha+76)_{\alpha\in\mathbb{N}}\}$ و α عدد طبيعى.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+2+\ln(x+2)-\ln(x+3)$. وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

6) أ- أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

بما ان $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} x+2=0 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} \ln(x+2)=-\infty \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} -\ln(x+3)=0 \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x)=-\infty$

بما ان $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x+2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+2)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\ln(x+3)=-\infty \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ حالة عدم التعين

لدينا $f(x)=x+2+\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)$

بما ان $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x+2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)=\ln 1=0 \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+2)\right)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

لدينا $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ ومنه $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=0$

ومنه والمستقيم (Δ) حيث: $(\Delta): y=x+1$. مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

جـ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) حيث: $(\Delta): y=x+1$.

ندرس إشارة الفرق $\left(f(x)-(x+2)\right)$

لدينا $f(x)-(x+2)=\ln(x+2)-\ln(x+3)$

لدينا $x+2<x+3$ ومنه $\ln(x+2)<\ln(x+3)$

ومنه $\ln(x+2)-\ln(x+3)<0$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي $x>-2$ يكون: $\left(f(x)-(x+2)\right)<0$ للمنحنى (C) يقع اسفل المستقيم (Δ)

بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>-2$ يكون: $f'(x)=\frac{x^2+5x+5}{(x+3)(x+2)}$ ،

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]-2;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي f' :

لدينا $f'(x)=1+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$ ومنه $f'(x)=1+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$

ومنه $f'(x)=\frac{(x+2)(x+3)+1}{(x+2)(x+3)}$

ومنه $f'(x)=\frac{x^2+5x+7}{(x+2)(x+3)}$

ب–ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2+5x+7

بما ان $\Delta<0$ المعادلة $x^2+5x+7=0$ لا تقبل حل ومنه $x^2+5x+7>0$ من أجل من أجل كل عدد حقيقي $x>-2$

وبتالي f متزايدة تماما على المجال $]-2;+\infty[$

جدول التغيرات

x	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

7) أ)أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$(T): y=\frac{7}{6}(x-0)+2+\ln\frac{2}{3}$$

$$(T): y=\frac{7}{6}x+2+\ln\frac{2}{3}$$

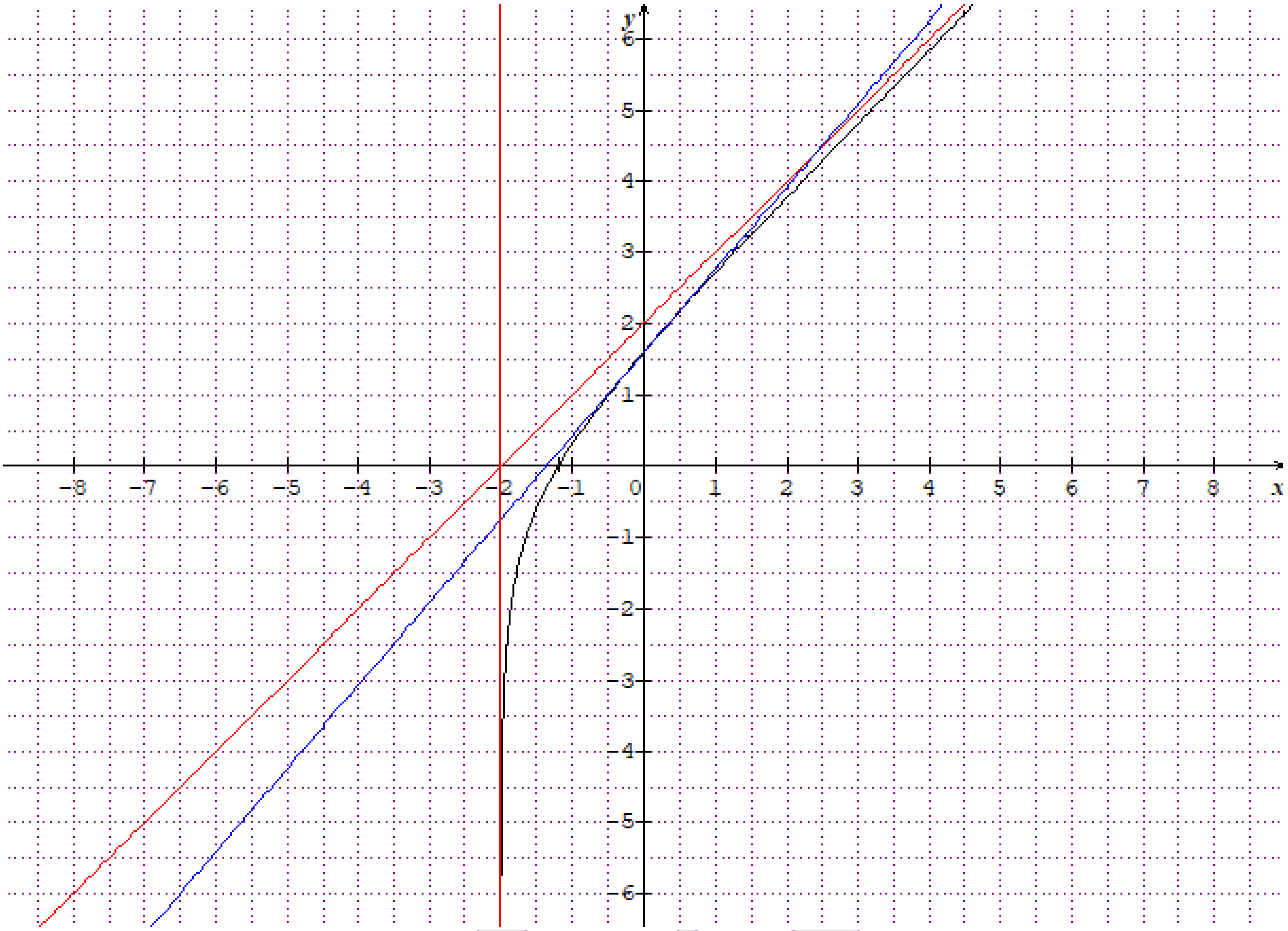
ب)بين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,20<\alpha<-0,19$.

الدالة $f(-0.19)=0.02$; $f(-0.20)=-0.07$ الدالة $f(-0.20)\times f(-0.19)<0$

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $]-1,+\infty[$ و بالأ خص على المجال $[-0.2;-0.19]$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,20<\alpha<-0,19$.

ج)أرسم (Δ)، (T) والمنحنى (C).



8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $f\left(x\right)=2-\ln m$.

إذا كان $2-\ln m<2+\ln\frac{2}{3}$ ومنه $\ln m>-\ln\frac{2}{3}$ ومنه $\ln m>\ln\frac{3}{2}$ و بتالي $m>\frac{3}{2}$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب .

إذا كان إذا كان $m=\frac{3}{2}$ ومنه المعادلة تقبل حل وحيد معدوم .

إذا كان $m<\frac{3}{2}$ و بتالي المعادلة تقبل حل وحيد موجب .

9) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2:-1\}$ بـ: $g\left(x\right)=x+2+\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|$. وليكن $\left(C_g\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

ا)تحقق أن من أجل من $x\in D_g$, $-5-x\in D_g$ و $g\left(x\right)+g\left(-x-5\right)=-1$ ثم إستنتج أن $\left(C_g\right)$ يقبل مركز تناظر.

لدينا $g\left(-x-5\right)=-x-5+2+\ln\left|\frac{-x-5+2}{-x-5+3}\right|$ ومنه $g\left(-x-5\right)=-x-3+\ln\left|\frac{-x-3}{-x-2}\right|$

ومنه $g\left(-x-5\right)=-x-3+\ln\left|\frac{x+3}{x+2}\right|$

ومنه $g\left(-x-5\right)=-x-3-\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|$

لدينا $g(-x-5)+g(x)=-x-3-\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+x+2+\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|$ ومنه $g(x)+g(-x-5)=-1$

ومنه إستنتج أن (C_g) يقبل النقطة $\omega\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر .

ب) بين انه من اجل $x\in]-2;+\infty[$:. فإن $g(x)=f(x)$ ثم إستنتج طريقة لرسم المنحنى (C_g) على $]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[$.

نستعين بجدول الإشارة

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x+2}{x+3}$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

لدينا من اجل $x\in]-2;+\infty[$:. فإن $g(x)=x+2+\ln(x+2)-\ln(x+3)$

لدينا من اجل $x\in]-2;+\infty[$:. فإن $\left|\frac{x+2}{x+3}\right|=\frac{x+2}{x+3}$ ومنه من اجل $x\in]-2;+\infty[$:. فإن $g(x)=x+2+\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)$

و بتالى من اجل $x\in]-2;+\infty[$:. فإن $g(x)=x+2+\ln(x+2)-\ln(x+3)$

ومنه من اجل $x\in]-2;+\infty[$:. فإن $g(x)=f(x)$ ومنه المنحنى (C_g) منطبق على (C_g) في المجال $]-2;+\infty[$ $x\in$ و نظيره بالنسبة لـ النقطة $\omega\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$ في المجال $]-\infty;-3[$ لان النقطة $\omega\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر .

ج) بين ومن اجل $x\in]-3;-2[$:. فإن $g(x)=x+2+\ln\left(-\frac{x+2}{x+3}\right)$ ثم شكل جدول تغيرات على مجال $]-3;-2[$ ارسم (C_g)

لدينا من اجل $x\in]-3;-2[$:. فإن $\left|\frac{x+2}{x+3}\right|=-\frac{x+2}{x+3}$ ومنه من اجل $x\in]-3;-2[$:. فإن $g(x)=x+2+\ln\left(-\frac{x+2}{x+3}\right)$

شكل جدول تغيرات g على مجال $]-3;-2[$ ارسم (C_g) .

بما ان $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} x+2=0\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}\ln\left(-\frac{x+2}{x+3}\right)=-\infty\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} g(x)=-\infty$ بما ان $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-3} x+2=-1\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-3}\ln\left(-\frac{x+2}{x+3}\right)=+\infty\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-3} g(x)=-\infty$

الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]-3;-2[$ ودالتها المشتقة هي f' :

لدينا $g'(x)=1+\frac{-\frac{1}{(x+3)^2}}{-\frac{x+2}{x+3}}$ ومنه $g'(x)=1+\frac{1}{(x+3)(x+2)}$

ومنه $g'(x)=\frac{(x+3)(x+2)+1}{(x+3)(x+2)}$

ومنه $g(x)=\dfrac{x^2+5x+7}{(x+3)(x+2)}$

ب–ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

إشارة $f'(x)$ من إشارة $\dfrac{x^2+5x+7}{(x+2)(x+3)}$

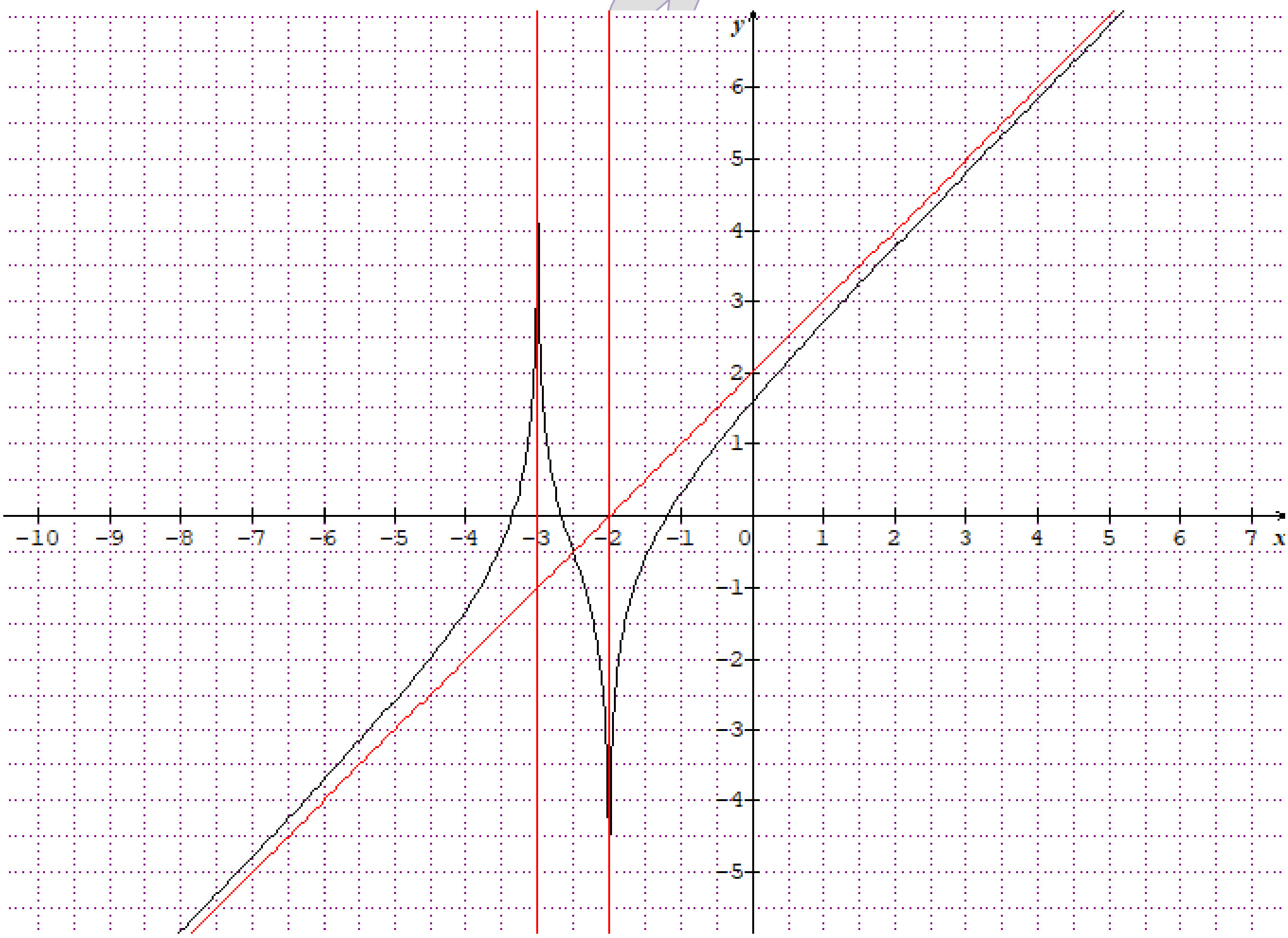
بما ان $\Delta<0$ المعادلة $x^2+5x+7=0$ لا تقبل حل ومنه $x^2+5x+7>0$ من أجل كل عدد حقيقي $x\in]-3;-2[$

و $(x+3)(x+2)<0$ من أجل كل عدد حقيقي $x\in]-3;-2[$

وبتالي g متناقصة تماما على المجال $]-3;-2[$

جدول التغيرات

x	-3	-2
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$



التصحيح المفصل للموضوع الثاني البكالوريا الإفتراضية(01) 2020

شعبة التقني الرياضي

من إعداد السيد حجاج براهيم

التمرين الأول (04 نقاط)

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 5^n و 8^n على 13

من اجل $n=0$ فإن $5^0 \equiv 1[13]$ من اجل $n=1$ فإن $5^1 \equiv 5[13]$ من اجل $n=2$ فإن $5^2 \equiv 12[13]$

من اجل $n=3$ فإن $5^3 \equiv 8[13]$ من اجل $n=4$ فإن $5^4 \equiv 1[13]$

بواقي قسمة 5^n على 13 تشكل متتالية دورية دورها 4 ومنه

من اجل $n=4k$ فإن $5^{4k} \equiv 1[13]$ من اجل $n=4k+1$ فإن $5^{4k+1} \equiv 5[13]$

من اجل $n=4k+2$ فإن $5^{4k+2} \equiv 12[13]$ من اجل $n=4k+3$ فإن $5^{4k+3} \equiv 8[13]$

من اجل $n=0$ فإن $8^0 \equiv 1[13]$ من اجل $n=1$ فإن $8^1 \equiv 8[13]$ من اجل $n=2$ فإن $8^2 \equiv 12[13]$

من اجل $n=3$ فإن $8^3 \equiv 5[13]$ من اجل $n=4$ فإن $8^4 \equiv 1[13]$

بواقي قسمة 8^n على 13 تشكل متتالية دورية دورها 4 ومنه

من اجل $n=4k$ فإن $8^{4k} \equiv 1[13]$ من اجل $n=4k+1$ فإن $8^{4k+1} \equiv 8[13]$

من اجل $n=4k+2$ فإن $8^{4k+2} \equiv 12[13]$ من اجل $n=4k+3$ فإن $8^{4k+3} \equiv 5[13]$

2 أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فردي فإن $8^n+5^n \equiv 0[13]$

لدينا $8 \equiv 8[13]$ ومنه $8 \equiv -5[13]$ فإن $8^n \equiv -5^n[13]$ لان n عدد طبيعي فردي

وبتالي $8^n+5^n \equiv 0[13]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فردي فإن $8^n+5^n \equiv 0[13]$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n زوجي فإن $8^n-5^n \equiv 0[13]$

لدينا $8 \equiv 8[13]$ ومنه $8 \equiv -5[13]$ فإن $8^n \equiv 5^n[13]$ لان n عدد طبيعي زوجي

وبتالي $8^n-5^n \equiv 0[13]$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n زوجي فإن $8^n-5^n \equiv 0[13]$

ج- عين باقي قسمة العدد $\left(2020^{1441}+1958^{1441}\right)^{1954}+\left(2020^{2970}-1958^{2970}\right)^{1962}$ على 13

لدينا $2020 \equiv 5[13]$ ومنه $2020^{2970} \equiv 5^{2970}[13]$

لدينا $1958 \equiv 8[13]$ ومنه $1958^{2970} \equiv 8^{2970}[13]$

لدينا $\left(2020^{2970}-1958^{2970}\right) \equiv 5^{2970}-8^{2970}[13]$ ومنه $\left(2020^{2970}-1958^{2970}\right) \equiv 0[13]$

ومنه $\left(2020^{2970}-1958^{2970}\right)^{1962} \equiv 0[13]$

لدينا $2020 \equiv 5[13]$ ومنه $2020^{1441} \equiv 5^{1441}[13]$

لدينا $1958 \equiv 8[13]$ ومنه $1958^{1441} \equiv 8^{1441}[13]$

لدينا $\left(2020^{1441}+1958^{1441}\right)\equiv 5^{1441}+8^{1441}[13]$ ومنه $\left(2020^{1441}+1958^{1441}\right)\equiv 0[13]$

ومنه $\left(2020^{1441}+1958^{1441}\right)^{1962}\equiv 0[13]$

ومنه $\left(2020^{1441}+1958^{1441}\right)^{1954}+\left(2020^{2970}-1958^{2970}\right)^{1962}\equiv 0[13]$

يضم صندوق 10 قريصات مرقمة من 1 الى 10 . نسحب قريصتين على التوالي من دون الإرجاع .

نحصل $(1;3);(1;4)1;7$

1) أحسب احتمال الحصول على رقمين مجموعهما من بواقي قسمة العددين 5^n او 8^n على 13

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		3	4	5	6	7	8	9	10	11
2			5	6	7	8	9	10	11	12
3		5		7	8	9	10	11	12	0
4	5				9	10	11	12	0	1
5			8			11	12	0	1	2
6		8					0	1	2	3
7	8				12			2	3	4
8				12		1			4	5
9			12		1					6
10		12		1				5		

من الجدول يمكن ان نستخرج كل الثنائيات وهي ملونة بالاحمر .

1) احتمال الحصول على رقمين مجموعهما من بواقي قسمة العددين 5^n او 8^n على 13 هو $\frac{26}{90}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات التي تحمل رقم من بواقي قسمة العددين 5^n او 8^n على 13 المتبقية في الكيس.

أ) عين قيم المتغير العشوائي X ،ثم عرّف قانون احتماله.

$x\in\{1;2;3\}$

$$P(x=1)=\frac{A_3^2}{A_{10}^2}=\frac{6}{90}\quad P(x=2)=\frac{2\times A_3^1\times A_7^1}{A_{10}^2}=\frac{42}{90}\quad P(x=3)=\frac{A_7^2}{A_{10}^2}=\frac{42}{90}$$

x_i	1	2	3
$P(x_i)$	$\frac{6}{90}$	$\frac{42}{90}$	$\frac{42}{90}$

ب) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

الأمل الرياضياتي

$E(X)=\sum x_i p(x_i)$ ومنه $E(X)=1\times\frac{8}{90}+2\times\frac{42}{90}+3\times\frac{42}{90}$ و منه $E(X)=\frac{218}{90}$

التمرين الثاني(04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة علي المجال $[0,+\infty[$ ب $f(x)=\dfrac{7x+1}{x+1}$.

1. أ– أدرس تغيرات الدالة f علي المجال $[0,+\infty[$.

لدينا $f'(x)=\dfrac{6}{(x+1)^2}$ ومنه أجل كل $x\in[0,+\infty[$: $f'(x)>0$ الدالة f متزايدة على المجال $[0,+\infty[$.

ب– حل في المجال $[0,+\infty[$ المعادلة $f(x)=x$ نرمز إلي الحل بالرلز α.

لدينا $f(x)=x$ ومنه $\dfrac{7x+1}{x+1}=x$ ومنه $\dfrac{7x+1}{x+1}-x=0$ ومنه $\dfrac{-x^2+6x+1}{x+1}=0$

ومنه $-x^2+6x+1=0$ ومنه $x_1=\dfrac{6+\sqrt{40}}{2}=3+\sqrt{10}$ او $x_2=\dfrac{6-\sqrt{40}}{2}$ مرفوض

حل في المجال $[0,+\infty[$ المعادلة $f(x)=x$ هو $\alpha=3+\sqrt{10}$ حيث $f(\alpha)=\alpha$

ج– برهن أنه من أجل كل $x\in[0,\alpha]$ فإن $f(x)\in[0,\alpha]$

لدينا f دالة مستمرة و متزايدة على المدجال $[0,\alpha]$ و تاخذ قيمها في المجال $[1,\alpha]$ و ومنه إذا كان $x\in[0,\alpha]$ فإن $f(x)\in[0,\alpha]$

و إذا كان $x\in[\alpha,+\infty[$ فإن $f(x)\in[\alpha,+\infty[$.

لدينا f دالة مستمرة و متزايدة على المدجال $[\alpha,+\infty[$ و تاخذ قيمها في المجال $[\alpha,7[$ و ومنه إذا كان $x\in[\alpha,+\infty[$ فإن $f(x)\in[\alpha,+\infty[$

2. (v_n) و(u_n) متتاليتين معرفتين على $\mathbb{N}$ ب $\begin{cases}u_0=0\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=7\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$

أ–برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha\le v_{n+1}\le v_n\le 7$

لدينا $u_1=1;v_1=\dfrac{25}{4}$

من أجل $n=0$ فإن n: $0\le u_0\le u_1\le\alpha\le v_1\le v_0\le 7$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل $n=0$

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$ أي n: $0\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le\alpha\le v_{n+2}\le v_{n+1}\le 7$

لدينا $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha\le v_{n+1}\le v_n\le 7$ اذن $f(0)\le f(u_n)\le f(u_{n+1})\le f(\alpha)\le f(v_{n+1})\le f(v_n)\le f(7)$

لدينا اذن $1\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le\alpha\le v_{n+2}\le v_{n+1}\le\dfrac{25}{4}$

اذن $0\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le\alpha\le v_{n+2}\le v_{n+1}\le 7$ لان $\dfrac{25}{4}\le 7$ و $0\le 1$

اذن الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ اذن حسب مبدا البرهان بالتراجع الخاصية صحيحة أي من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : n: $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha\le v_{n+1}\le v_n\le 7$

ب–استنتج إتجاه تغير المتتاليتين (v_n) و(u_n).

لدينا من السؤال السابق $v_{n+1} \leq v_n$ ومنه $v_{n+1} - v_n \leq 0$ و بتالي متناقصة على $\mathbb{N}$

لدينا من السؤال السابق $u_n \leq u_{n+1}$ ومنه $u_{n+1} - u_n \geq 0$ و بتالي متزايدة على $\mathbb{N}$

ج- بين أن المتتاليتين (v_n) و (u_n) متقاربتين و احسب نهاية كل منهما.

بما أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الاسغل بالعدد α فهي متقاربة

حساب النهاية

نضع $\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell$ ومنه نحل المعادلة $f(\ell) = \ell$ ومنه $\alpha = 3 + \sqrt{10}$ و بتالي $\lim_{n \to +\infty} v_n = \alpha$

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الاعلى لبالعدد α فهي متقاربة

حساب النهاية

نضع $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ومنه نحل المعادلة $f(\ell) = \ell$ ومنه $\alpha = 3 + \sqrt{10}$ و بتالي $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

د- بين أن المتتاليتين (v_n) و (u_n) متجاورتان.

لدينا (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و (v_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \alpha$

ومنه المتتاليتين (v_n) و (u_n) متجاورتان.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط C,B,A و D لواحقها على الترتيب z_C, z_B, z_A و z_D حيث: $z_A=\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، $z_B=\overline{z}_A$ ، $z_C=\frac{3}{2}z_A^2$ و $z_D=\overline{z}_C$.

1. بين أن : $\left(\frac{3z_A}{2}\right)^{1830}=\frac{2}{3}z_C$ ثم عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{3z_A}{2}\right)^n=\frac{2}{3}z_C$.

نكتب z_C, z_A على الشكل الاسي

لدينا $z_A=\frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $\frac{3}{2}\times z_A=\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ و بتالي $\frac{3}{2}\times z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$

لدينا $z_C=\frac{3}{2}z_A^2$ ومنه $z_C=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$ و بتالي $z_C=\frac{3}{2}\times\frac{4}{9}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و بتالي $z_C=\frac{2}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

لدينا $\frac{3}{2}\times z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{1832}=\left(\frac{3}{2}\times z_A\right)^{1832}$ و بتالي $\left(\frac{3}{2}\times z_A\right)^{1832}=e^{i\frac{1832\pi}{3}}$

و بتالي $\left(\frac{3}{2}\times z_A\right)^{1832}=e^{i\left(610\pi+\frac{2\pi}{3}\right)}$ و بتالي $\left(\frac{3}{2}\times z_A\right)^{1832}=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

و بتالي $\left(\frac{3}{2}\times z_A\right)^{1832}=\frac{2}{3}z_C$

عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{3z_A}{2}\right)^n=\frac{2}{3}z_C$

لدينا $\left(\frac{3z_A}{2}\right)^n=\frac{2}{3}z_C$ ومنه $\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و بتالي $e^{in\frac{\pi}{3}}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

و بتالي $Arge^{in\frac{\pi}{3}}=Arge^{i\frac{2\pi}{3}}$ و بتالي $\frac{n\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{N}$

و بتالي $n=2+6k\pi, k\in\mathbb{N}$

2. تحقق أن: $\frac{z_C-z_D}{z_B-z_D}=\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، ثمّ استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$ ، ثمّ احسب مساحته.

لدينا $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{3}}{3}}$ ومنه $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-i\frac{2\sqrt{3}}{3}}{-\frac{2}{3}}$ و بتالي $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\sqrt{3}i$

لدينا $\frac{z_C-z_D}{z_B-z_D}=\frac{-\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3}}$ ومنه $\frac{z_C-z_D}{z_B-z_D}=\frac{i\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}}$ و بتالي $\frac{z_C-z_D}{z_B-z_D}=\sqrt{3}i$

ومنه $\frac{z_C-z_D}{z_B-z_D}=\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

لدينا $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\sqrt{3}i$ ومنه $\frac{AB}{AC}=\sqrt{3}$ و $(AC)\perp(AB)$ و بتالي المثلث ABC قائم في A وتره $[BC]$

لدينا $\frac{z_C-z_D}{z_B-z_D}=\sqrt{3}i$ ومنه $\frac{DC}{DB}=\sqrt{3}$ و $(DC)\perp(DB)$ و بتالي المثلث CDB قائم في D وتره $[BC]$

لدينا $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_D}$ ومنه $z_B - z_A = z_C - z_D$ و بتالي $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

وبتالي الرباعي $ABDC$ مستطيل

ثمّ احسب مساحته.

$$S_{ABDC} = AB \times AC = \frac{2}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{9} ua$$

3. عيّن مركز وتصف قطر الدائرة (C') المحيطة بالرباعي $ABDC$. ثم اكتب المعادلة الديكارتية لها .

الدائرة (C') المحيطة بالرباعي $ABDC$ قطرها $[BC]$ لأن المثلثين ABC و CDB قائمين ولهما نفس الوتر $[BC]$

و بتالي مركزها O لان $B;C$ متناظران بالنسبة للمبدأ و طول نصف قطها $\dfrac{BC}{2}$ أي $\dfrac{2}{3}$

ثم اكتب المعادلة الديكارتية لها.

لدينا $(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2$ ومنه $(x - O)^2 + (y - O)^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ و بتالي $x^2 + y^2 = \dfrac{4}{9}$

(Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (حيث $z \neq z_A$ و $z \neq z_B$) المعرفة بالعلاقة:

$\arg\left(z - \dfrac{1}{3} - i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arg\left(\bar{z} - \dfrac{1}{3} + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

– بيّن أنه يمكن كتابة العلاقةللمجموعة (Γ) على الشكل $\arg(z - z_A) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

لدينا $\arg\left(z - \dfrac{1}{3} - i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arg\left(\bar{z} - \dfrac{1}{3} + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi + 2k\pi$ ومنه $\arg\left(z - \dfrac{1}{3} - i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arg\left(\overline{z - \dfrac{1}{3} - i\dfrac{\sqrt{3}}{3}}\right) + \pi + 2k\pi$

و بتالي $\arg\left(z - \dfrac{1}{3} - i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\arg\left(z - \dfrac{1}{3} - i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi + 2k\pi$

و بتالي $\arg\left(z - \dfrac{1}{3} - i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) + \arg\left(z - \dfrac{1}{3} - i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi + 2k\pi$

و بتالي $2\arg(z - z_A) = \pi + 2k\pi$

و بتالي $\arg(z - z_A) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

– نحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (Γ) ثمّ استنتج طبيعة المجموعة (Γ).

النقطة B تنتمي إلى المجموعة (Γ) معناه ان $\arg(z_B - z_A) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

لدينا $\arg(z_B - z_A) = \arg\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}i\right)$ ومنه $\arg(z_B - z_A) = -\dfrac{\pi}{2}$ ومنه النقطة B تنتمي إلى المجموعة (Γ)

ثمّ استنتج طبيعة المجموعة (Γ).

لدينا $\arg(z_B - z_A) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه المجموعة (Γ) هي المستقيم (AB) بإستثناء النقطة A

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1+\frac{1}{x^2}-2\ln x$.

أ) أحسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

بما ان $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2}=1 \\ \lim_{x\to+\infty} -2\ln x=-\infty \end{cases}$ فإن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ بما ان $\begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{>} 0} 1+\frac{1}{x^2}=+\infty \\ \lim_{x \xrightarrow{>} 0} -2\ln x=+\infty \end{cases}$ فإن $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=+\infty$

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

لدينا $g'(x)=-\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x}$ ومنه $g'(x)=-\left(\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x}\right)$

ومنه $g'(x)=-\left(\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x}\right)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0;+\infty[$: $g(x)<0$. ومنه g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

جدول التغيرات

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

ج) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

الدالة $g(1.8)=0.13$; $g(1.9)=-0.01$ ومنه $g(1.8)\times g(1.9)<0$

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و بالأخص على المجال $[1.8;1.9]$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$

جدول التغيرات

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+\frac{3+2\ln x}{x}$. وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim_{x \xrightarrow{>} -\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

بما ان $\begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{>} 0} -x=0 \\ \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{3+2\ln x}{x}=-\infty \end{cases}$ فإن $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ بما ان $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} -x=-\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3+2\ln x}{x}=0 \end{cases}$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

ب- أحسب $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to+\infty}-x+\frac{3+2\ln x}{x}+x$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+2\ln x}{x}=0$ و منه المستقيم

(Δ) ذي المعادلة $y=-x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

جـ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) حيث: $(\Delta): y=-x$.

ندرس إشارة الفرق $\left(f(x)+x\right)$

لدينا $\left(f(x)+x\right)=\frac{3+2\ln x}{x}$ ومنه إشارة الفرق $\left(f(x)+x\right)$ من إشارة $3+2\ln x$ نستنتج مما سبق

لدينا $3+2\ln x=0$ ومنه $\ln x=-\frac{3}{2}$ ومنه $x=e^{-\frac{3}{2}}$

x	0 $\quad e^{-3/2}$ $\quad +\infty$
$f(x)+x$	$-$ $\quad 0$ $\quad +$

ومنه $\left(f(x)+x\right)>0$ من أجل $x\in\left]e^{-\frac{3}{2}};+\infty\right[$ و المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ)

ومنه $\left(f(x)+x\right)<0$ من أجل $x\in\left]0;e^{-\frac{3}{2}}\right[$ و المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ)

ومنه $\left(f(x)+x\right)=0$ من أجل $x=e^{-\frac{3}{2}}$ و المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة ذات الإحداثيات $\left(e^{-\frac{3}{2}},-e^{-\frac{3}{2}}\right)$

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in\left]0;+\infty\right[$ يكون: $f'(x)=-\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ ، ثمّ أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\left]0;+\infty\right[$ ودالتها المشتقة هي f' :

لدينا $f'(x)=-1+\frac{x\times\frac{2}{x}-(3+2\ln x)}{x^2}$ ومنه $f'(x)=-1+\frac{2-3-2\ln x}{x^2}$

ومنه $f'(x)=\frac{-x^2-1-2\ln x}{x^2}$

ومنه $f'(x)=-\frac{x^2+1+2\ln x}{x^2}$

ومنه $f'(x)=-\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ لأن $g\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+1+2\ln x$

ب-ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g\left(\frac{1}{x}\right)$

جدول الإشارة

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

وبتالي f متناقصة تماما على المجالين $[\alpha;+\infty[$ و متزايدة تماما على المجال $]0,\alpha]$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) الموازي للمستقيم حيث: $(\Delta): y=-x$.

المماس (T) للمنحنى (C) الموازي للمستقيم حيث: $(\Delta): y=-x$ معناه $f'(x)=-1$

لدينا $f'(x)=-1$ ومنه $\dfrac{-x^2-1-2\ln x}{x^2}=-1$ ومنه $-x^2-1-2\ln x=-x^2$ ومنه $\ln x=-\dfrac{1}{2}$ ومنه $x=e^{-\frac{1}{2}}$

معادلة المماس (T) للمنحنى (C) الموازي للمستقيم حيث: $(\Delta): y=-x$.

$$(\Delta): y=f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x-e^{-\frac{1}{2}}\right)+f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$(\Delta): y=-1\times\left(x-e^{-\frac{1}{2}}\right)+e^{-\frac{1}{2}}+\frac{3+2\ln e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}}$$

$$(\Delta): y=-x+2e^{\frac{1}{2}}$$

4) تحقق أن $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=2\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)$

لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $1+\dfrac{1}{\alpha^2}-2\ln\alpha=0$ ومنه $1+\dfrac{1}{\alpha^2}=2\ln\alpha$

لدينا $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=-\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{3+2\ln\dfrac{1}{\alpha}}{\dfrac{1}{\alpha}}$ ومنه $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=-\dfrac{1}{\alpha}+(3-2\ln\alpha)\times\dfrac{\alpha}{1}$

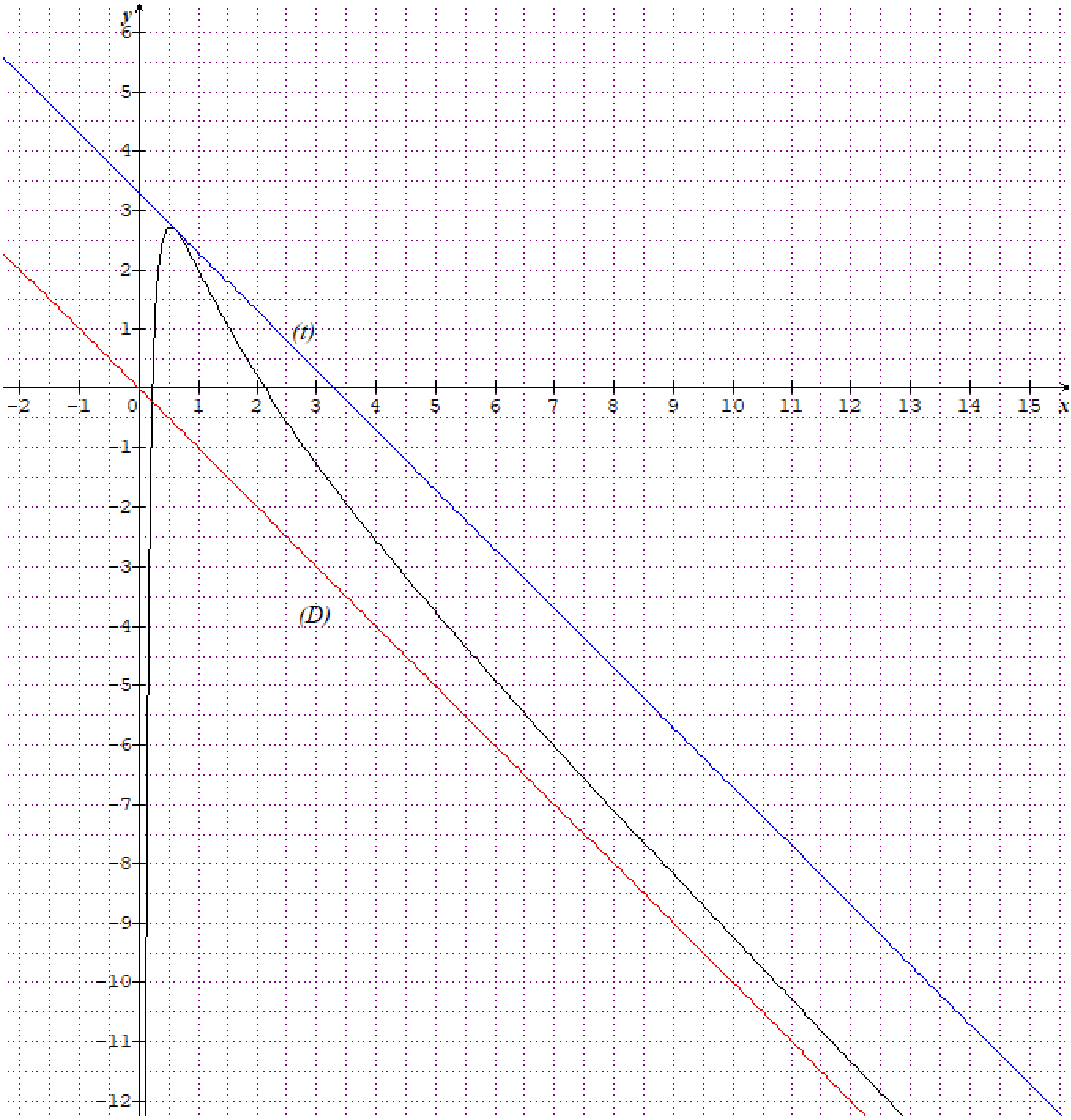
ومنه $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=-\dfrac{1}{\alpha}+\left(3-1-\dfrac{1}{\alpha^2}\right)\times\dfrac{\alpha}{1}$

ومنه $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=-\dfrac{1}{\alpha}+2\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$

ومنه $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=-\dfrac{2}{\alpha}+2\alpha$

ومنه $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=2\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)$

5) أرسم (Δ)، (T) والمنحنى (C).(نأخذ $f(\alpha)=2.3$).



6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $mx=3+2\ln x$.

لدينا $mx=3+2\ln x$ ومنه $m=\frac{3+2\ln x}{x}$ ومنه $-x+m=-x+\frac{3+2\ln x}{x}$ ومنه $-x+m=f(x)$

من البيان نلاحظ

من أجل $m\leq 0$ ومنه المعادلة تقبل حل واحد

من أجل $0<m<2e^{\frac{1}{2}}$ ومنه المعادلة تقبل حلان مختلفان

من أجل $m=2e^{\frac{1}{2}}$ ومنه المعادلة تقبل حل واحد $x=e^{-\frac{1}{2}}$

من أجل $m>2e^{\frac{1}{2}}$ ومنه المعادلة لا تقبل حلول