



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على المجال $[1; 4]$ بـ : $f(x) = \frac{4x+4}{9-x}$.

1 أ . ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1; 4]$.

ب . أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; 4]$ فإن : $f(x) \in [1; 4]$.

2 المتتالية العددية (u_n) معرفة بعدها الأول u_0 حيث : $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ . برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 4$.

ب . ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة.

3 المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 4}$.

أ . برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

ب . عبّر عن الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4 المجموع S_n معرف بـ : $S_n = v_0 + 8v_1 + 8^2v_2 + \dots + 8^n v_n$. احسب S_n بدلالة n .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

صندوق به 5 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس).

نسحب من الصندوق كرية واحدة حيث: إذا ظهرت كرية حمراء نُعيدّها إلى الصندوق ونُضيف له كرية بيضاء

وإذا ظهرت كرية بيضاء نُعيدّها إلى الصندوق ونُضيف له كرية حمراء، ثم نُكرّر العملية مرّة ثانية.

1 انقل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تُتمذج هذه التجربة ثم أكملها.

2 بيّن أنّ احتمال أن يوجد في الصندوق 7 كريات بيضاء هو $\frac{1}{8}$.

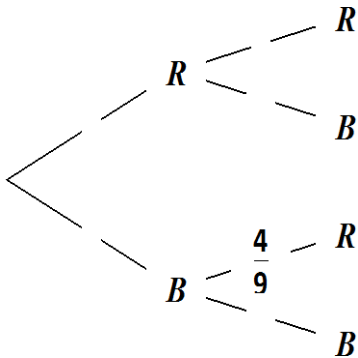
3 احسب احتمال أن يوجد في الصندوق 4 كريات حمراء على الأقل.

4 ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد الكريات البيضاء الموجودة

في الصندوق بعد العملية الثانية.

أ . برّر أنّ قيم المتغير العشوائي X هي: 5، 6 و 7.

ب . عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب $E(X)$ أمّله الرياضياتي.





التمرين الثالث: (05 نقاط)

ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1.

نعتبر الأعداد الطبيعية a ، b ، و c حيث: $a = 4n + 1$ ، $b = 6n + 1$ ، و $c = 3n + 2$.

(1) أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما.

(2) نسمي α القاسم المشترك الأكبر للعددين a و c .

أثبت أن α يقسم 5، ثم عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $\alpha = 5$.

(3) نسمي β القاسم المشترك الأكبر للعددين a و bc .

أ. أثبت أن α يقسم β .

ب. أثبت أن العددين β و b أوليان فيما بينهما ثم استنتج أن: $\alpha = \beta$.

(4) نعتبر العددين الطبيعيين A و B حيث: $A = 4n^2 - 3n - 1$ و $B = 18n^3 - 3n^2 - 13n - 2$.

أ. بين أن كلا من العددين A و B مضاعف للعدد الطبيعي $(n-1)$.

ب. نضع: $d = PGCD(A, B)$. عبّر حسب قيم α عن d بدلالة n . (لاحظ أن: $bc = 18n^2 + 15n + 2$)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالتان العدديتان g و h معرفتان على المجال $]-\infty; 0]$ كما يلي: $g(x) = -2e^x$ و $h(x) = x(e^x + 1)$.
حدّد إشارة كل من $h(x)$ و $g(x)$ على المجال $]-\infty; 0]$.

(II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]-\infty; 0]$ بـ: $f(x) = (x-3)e^x + \frac{1}{2}x^2$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ. بين أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty; 0]$: $f'(x) = h(x) + g(x)$.

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-\infty; 0]$.

(2) احسب $f(0)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; 0]$ ثم تحقّق أن: $-1.5 < \alpha < -1.4$.

(4) (P) هو التمثيل البياني للدالة: $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ على المجال $]-\infty; 0]$.

أ. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x^2 \right]$ ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ب. ادرس الوضع النسبي للمنحنين (P) و (C_f) .

ج. أنشئ (P) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 0]$.

(5) ليكن m وسيطا حقيقيا، ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $|f(x)| = e^m$ في $]-\infty; 0]$.



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- 1) حل المعادلة: $3x - 5y = 2$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عددان صحيحان.
- 2) أ. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 9^n على 7.
ب. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 4^n على 11.
- 3) عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $14 \times 4^n + 11 \times 9^n - 4 \equiv 0 [77]$.
- 4) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع: $u_n = 3 \times 4^n + 4 \times 9^n$ و $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{15n}$
أ. عبّر عن S_n بدلالة n .
ب. أثبت أنّ S_n مضاعف للعدد 77.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- يحتوي صندوق على كريات متماثلة منها: n كرية بيضاء تحمل العدد π (n عدد طبيعي و $n \geq 2$) و 4 كريات حمراء تحمل الأعداد $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{3}$ و π و كريتين خضراوين تحملان العددين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$.
- نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من هذا الصندوق.
- 1) أ. احسب احتمال كل من A و B حيث:
 A : "سحب كريتين من نفس اللون" و B : "سحب كريتين تحملان نفس العدد علما أنهما من نفس اللون"
 ب. عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون: $P(A) = \frac{17}{55}$.
 - 2) نفرض في ما يلي: $n = 5$ و نسمي α و β العددين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين.
 نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد: $\cos(\alpha)\cos(\beta)$
 أ. بزر أنّ قيم المتغير العشوائي X هي: $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، $\frac{1}{4}$ ، 1 .
 ب. بيّن أنّ: $P(X = 0) = \frac{27}{55}$.
 ج. عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) معرفتان على \mathbb{N} بـ:
- $$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3\alpha v_n + (1-3\alpha)u_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3\alpha u_n + (1-3\alpha)v_n \end{cases}$$
- (α عدد حقيقي)
- المتتالية العددية (w_n) معرفة على \mathbb{N} بـ: $w_n = v_n - u_n$



- (1) أ. احسب w_0 ثم احسب w_1 بدلالة α .
ب. بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $(6\alpha-1)$.
ج. اكتب عبارة w_n بدلالة n و α ، ثمّ عيّن قيم α حتّى تكون: $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

نفرض في كلّ ما يلي: $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$

- (2) أ. أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما و أنّ (v_n) متناقصة تماما.
ب. استنتج أنّ (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ .
(3) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n + v_n = 2$ ، واستنتج قيمة ℓ .
(4) احسب بدلالة α المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2020}$
التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = \ln(\sqrt{9x^2 + 1} + 3x)$

ليكن (C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثمّ بيّن أنّ: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}}$
ج. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

- (2) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = f(x) - x$.
أ. بيّن أنّ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{-9x^2 + 8}{(\sqrt{9x^2 + 1})(3 + \sqrt{9x^2 + 1})}$

ج. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $[0; +\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها. (نأخذ $g\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \approx 0,8$)

- (3) أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty\right[$ ثمّ تحقّق أنّ: $2.83 < \alpha < 2.84$.
ب. استنتج إشارة $g(x)$ على $[0; +\infty[$.

- ج. حدّد الوضع النسبي للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ و المنحنى (C_f) على المجال $[0; +\infty[$.
(4) نعتبر الدالة k المعرفة على $[0; +\infty[$ ب: $k(x) = \ln(6x)$ و ليكن (γ) منحنيا البياني في المعلم السابق.
أ. بيّن أنّ (γ) هو صورة منحنى الدالة: $x \mapsto \ln x$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه.
ب. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k(x)]$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

(5) أ. بيّن الدالة f فردية.

- ب. انشئ كلا من (Δ) ، (γ) و (C_f) على المجال $[0; +\infty[$ ثمّ استنتج انشاء المنحنى (C_f) على \mathbb{R} .