موضوع نموذجي
امتحان البكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي
الشعبة: الرياضيات,

إعداد السيد حجاج براهيم
إعداد الأستاذ يوسف يوسف
دورة: 2020

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 04 سا و30د

على المترشح أن يختار احد الموضوعين الأتيين :

الموضوع الأول

(في كل التمارين تثمن كل محاولة جادة مهما كانت بسيطة)

التمرين الأول: (04 نقاط)

b عدد طبيعي غير معدوم .

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $n \in \mathbb{N}^*$: بـ: $u_n = p\gcd(n;a)$.

1. من أجل $a = 15$ أحسب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n).
2. من أجل $a = 4$ نعتبر العددين الطبيعيين n و m حيث $u_n = u_m = 2$.
   - بين أن. $u_{n+m} = 4$
3) b عدد طبيعي .
   بين أنه من أجل كل عدد صحيح نسبي q: $p\gcd(a;b) = p\gcd(a;b-aq)$
   ب) أحسب u_0 و u_a
   ج) أثبت أن $u_{n+a} = u_n$ ماذا يمكن القول عن المتتالية (u_n)؟
4. من أجل $a = 15$ أحسب u_n من أجل $n = 2002^{2020} + 1441$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لدينا 3 أكياس متماثلة ، الكيس الأول U_1 يحتوي كريتين حمراوين وكريتين سوداويتين ، الكيس الثاني U_2 يحوي 4كريات حمراء أما الكيس الثالث U_3 يحوي 4كريات سوداء (كل الكريات متمثلة ولانميز بينها في اللمس) .

نسحب كرة من الكيس U_1 نضعها في الكيس U_2 ثم نسحب كرة من الكيس U_2 ونضعها في الكيس U_3 ثم نسحب كرة من الكيس U_3 ونضعها في الكيس U_1 ونتوقف .

1) أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لمعطيات النص مبرزا عليها احتمالات الحوادث.

2)أحسب إحتمال ان تكون الكرية المسحوبة من الكيس U_2 حمراء .

2) إذا كانت الكرية المسحوبةمن الكيس U_3 حمراء ، ما احتمال ان تكون الكرية المسحوبة من الكيس U_2 حمراء؟

3)نقترح اللعبة التالية:للمشاركة يدفع اللاعب α (α عدد طبيعي غير معدوم معطى) .فإذا بقى الكيس U_1 على وضعه الاول بعد السحب الثالث يربح اللاعب $10DA$ و إلا يخسر مادفع .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α.

عرّف قانون المتغير العشوائي X ، ثم عين قيم α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1.حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة: $(z+3-4i)(z^2-2\alpha z+2\alpha^2)=0$. (α العدد الحقيقي غير معدوم)

2. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. نعتبر النقط A, B و C التي لاحقاها: $z_A=1+i$ ، $z_B=-3+4i$ و $z_C=\alpha-\alpha i$. حيث α العدد الحقيقي غير معدوم

أ) أعط تفسيراهندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

ب) بين أن $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{\overline{(z_C-z_A)}(z_B-z_A)}{|z_C-z_A|^2}$ ثم إستنتج تفسيراهندسي لطويلة وعمدة العدد المركب $\dfrac{\overline{(z_C-z_A)}(z_B-z_A)}{|z_C-z_A|^2}$

3.بين أن $\overline{(z_C-z_A)}(z_B-z_A)=1-7\alpha-i(\alpha+7)$

أ) عين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون النقط A, B و C في إستقامية .

ب) عين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المثلث ABC يكون قائم في A.

4.نضع $\alpha=\dfrac{1}{7}$ أ)عين نسبة وزاوية S التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول C إلى B ثم أعط الكتابة المركبة لتشابه S.

5) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $\overline{(z-z_A)}(z-z_A)=m^2\overline{(z-z_C)}(z-z_C)$.

ناقش حسب قيم العدد الحقيقي m طبيعة المجموعة (γ) وحدد عناصرها في كل حالة .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) f الدالة العددية ذات المتغير x المعرفة على IR بالعبارة $f(x)=xe^{x^2-1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(وحدة الطول $4cm$)

1‑بين أن $f(x)+f(-x)=0$ ثم فسر هندسيا النتيجة .

2‑بيّن أن، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ثمّ إستنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

3‑أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=(2x^2+1)e^{x^2-1}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

– استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها. ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$f''(x)=2x(2x^2+3)e^{x^2-1}$ بيّن أنّ (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب إحداثياها .

4) بين أن مجموعة حلول المتراجحة $1-e^{x^2-1}\geq 0$ هي $x\in[-1;1]$ ثم إستنتج إشارة $x(1-e^{x^2-1})$ على المجال $[-1;1]$.

– بملاحظة $x-f(x)=x(1-e^{x^2-1})$ إستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.

5) بيّن أنّ $f'(-1)=f'(1)$ إستنتج أن لمنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') متوازيان يطلب تعيين معادلة لهما.

ج) ارسم المماس (T) و (T') و المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1;1]$.

5‑أ) عيّن حسابيا قيم الوسيط m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=mx$ ثلاث حلول متمايزين.

ب) بين أنه من أجل $m\in]0;+\infty[$ فإن مجموعة حلول المعادلة $f(x)=mx$ هي $S=\{-\sqrt{\ln(em)};0;\sqrt{\ln(em)}\}$.

6) لتكن الدّالة h المعرّفة على IR بـ: $u(x)=x^2-1$. بيّن أنّ $f(x)=\dfrac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ ثم إستنتج F الدالة الاصلية للدالة f على IR .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر مجموعة الأعداد الطبيعية N الأصغر من أو تساوي 2010.

1) نعتبر المعادلة : $67x+2011y=1.........(E)$ حيث x و y عددان صحيحان.

أ)بين أن المعادلة تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب)جد حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

جـ)عين قيم x من المجموعة A التي تحقق $67x\equiv1[2011]$ (x يسمي عكوس او مقلوب 67 بترديد 2011)

a عدد صحيح نسبي

1) بين أن $a^2\equiv1[2011]$ تكافيء $a\equiv1[2011]$ أو $a\equiv-1[2011]$

2) إستنتج أن العددين 1 و 2010 هما الوحيدان المساويان لعكوسهما بترديد 2011 من المجموعة A.

3) بين أن $2010!\equiv2010[2011]$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. نعتبر النقط B,A و C لاحقاتها على الترتيب z_B,z_A و z_C حيث: $z_A=2$ ، $z_B=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ و $z_C=2+z_B$ و $z_D=\overline{z_C}$

1) أ) أكتب z_B الشكل الاسي ثم أنشيء النقط B,A و C يطلب توضيح طريقة الإنشاء

ب) بين ان الرباعي $OACB$ معين علل إجابتك

2) أ) بين أن $1+e^{i\frac{\pi}{4}}=\left(e^{-i\frac{\pi}{8}}+e^{i\frac{\pi}{8}}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$ ثم إستنتج أن الشكل الاسي لـ هو $z_C=4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$

ب) بين أن $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$

3) أ) تحقق ان $z_C=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}z_A$.

ب) إستنتج أن C صورة النقطة A بالتشابه S يطب تعين عناصره .

– بين ان الكتابة المركبة لتشابه S هي $z'=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$

تحقق أن $z_{D'}$ لاحقة D' صورة D التحويل S هي $z_{D'}=\frac{5+2\sqrt{2}}{2}$

تحقق أن $z_{D'}=\frac{1}{2}|z_C|^2$ ثم بين أن $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}{4}$

5) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|z-z_A|=|mz-z_B|$ ، مع m العدد الحقيقي.

– ناقش حسب قيم العدد الحقيقي m طبيعة المجموعة (Γ) وحدد عناصرها في كل حالة .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لدينا الكيس يحوي 03كريات سوداء و 04 كريات بيضاء (كل الكريات متمثلة ولانميز بينها في اللمس) .

نسحب كرة من الكيس إذا كنت سوداء نضعها جانبا ثم نسحب كرة اخري من الكيس وأما إذا كانت بيضاء نضعها جانبا و ننزع كرة سوداء من الكيس ثم نسحب كرة اخر (قبل كل سحب نتحقق إذا كانت كل الكريات بيضاء نتوقف عن اسحب)

نرمز بـ B_i و N_i سحب كرة بيضاء او كرة سوداء في السحب i .

1) أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لمعطيات النص مبرزا عليها احتمالات الحوادث

2)أحسب إحتمال ان تكون الكرة المسحوبة قي السحب الثاني بيضاء .

3) إذا كانت الكرية الثالثة المسحوبة بيضاء ما احتمال ان تكون الكرية الثانية المسحوبة بيضاء؟

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل تجربة عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس بعد نهاية التجربة.

عين قيم X ثم بين أن $P(X=1)=\frac{8}{35}$

عرّف قانون المتغير العشوائي X ، ثم عين قيم بـX حيث $P(\ln|X-2|\leq 0)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن الدالة f_n المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} f_n(x)=xe^{\left(\frac{-n}{x}\right)}; x\neq 0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

وليكن (C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1)أ- أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{f_n(x)}{x}$ فسر هندسيا النتيجة .

2) أ) أحسب النهايات عند أطراف مجال التعريف (يطلب التوضيح كيفية الحساب)

3)أ) أحسب $f_n'(x)$ ثم أدرس تغيرات الدالة f_n حسب قيم n و شكل جدول تغيراتها .

ب) $A(x_0;y_0)$ نقطة من المنحنى (C_n) حيث $x_n\neq 0$ و $f_n'(x)=0$.

–عين المحل الهندسي للنقطة A عندما يمسح n المجموعة $\mathbb{N}^*$.

ج) بين أن المنحنى (C_n) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ_n) معادلته $(C_n): y=x-n$.

د) أدرس الوضع النسبي للمنحنين (C_n) و (C_{n+1})

4) أ) شكل جدول تغيرات الدالة f_1

ب) بين ان المنحنى (C_1) يقع تحت (Δ) إذاكان $x\leq 0$ و (C_1) يقع فوق (Δ) إذاكان $x\geq 0$ ثم أنشيء المنحنى (C_1)

5) في هدا السؤال نهتم بحل المعادلة $f_n(x)=1$ من أجل $n\in\mathbb{N}^*$

أ) تحقق أنه يوجد عدد حقيقي وحيد u_n يحقق $f_n(u_n)=1$ ثم بين ان $f_n(u_{n+1})=e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

ب) تحقق أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*: u_n>1$ و أن u_n حل للمعادلة $x\ln x=n$

ج) إعتمادا على رتابة الدالة $x\mapsto x\ln x$ بين أن أن المتتالية (u_n) غير محدودة من الأعلى

6)بين أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $f_n(u_{n+1})<1$ و $f_{n+1}(u_n)>1$.

– بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.