مجلة 5min Maths

بكالوريات أجنبية

● مترجمة و مرفقة بالحل

❑علوم تجريبية ❑رياضيات ❑تقني رياضي

● اعداد و ترجمة الأستاذ:

شعبان أسامة

تلمسان-جوان2020

Google/ Facebook/ Instagram / Telegram: 5min maths

بسم الله الرحمن الرحيم

تجدون في هذه المجلة حلول لتمارين مأخوذة من بكالوريات أجنبية تم تداولها في الفترة الممتدة من 1 جوان الى 15 جوان 2020

على صفحة الأستاذ شعبان أسامة الرسمية(5min Maths)

و هذا على شكل تحدي كل يوم تمرينين بالحل

شكر خاص للطالبة جدوي أمينة

...نظرة أخرى

بكالوريا، بكالوريا ، بكالوريا.......نعم اعلم انها تكررت حتى صنعت الخوف، القلق،و الارتباك والشعور بقلة الاستحقاق ، لكن هذه المرة ستسمعها باختلاف.

هذه المرة ستصنع الراحة، الهدوء، التفاؤل و الشعور بالاستحقاق ، قبل أن تستمر بقراءة الرسالة ستنسى كل شيء يخص هذا الامتحان لا اقصد ما درسته اكيد هه لكني اقصد كل مشاعرك تجاهه ستضع كل شيء جانبا .... هل فعلت ؟ إذا فلنبدأ. أولا سنأخذ زاوية جديدة لأننا نريد نظرة جديدة

حسنا نحن في الزاوية الجديدة الآن يبدو البكالوريا كأمتحان مصيري) مصيري (☹توقف .. اعلم انك لم تستطع تجاهل تلك المشاعر لوحدك و من دون أسباب لهذا سنتجاهلها معا باستعمال التبرير ، فعقلنا و قلبنا لن يتجاهل و ينسى اي مشاعر من دون أسباب إذا سنبدأ معا من جديد كما قلت البكالوريا امتحان صحيح لكنه ليس مصيري لا يوجد في الحياة شيء اسمه مصيري ما دام الإنسان يفكر و يسعى و يجرب، فلا يوجد شيء يستطيع تحديد مصيره فهو امتحان النجاح فيه لا يعني أن أبواب الحياة و السعادة و الثراء قد فتحت امامك و الرسوب فيه لا يعني أن أبواب الموت البطيء و الحزن و الفقر قد فتحت امامك من قال أن الفشل هو النهاية، الفشل في الوصول إلى هدف معين ، هو بداية قصة نجاح عظيمة انت مطالب بالعمل الجاد ، اما النتيجة فليست من شأنك ما يعني انك لا انت ولا اي كائن يستطيع الحكم عليك و على مصيرك بعد معرفة نتيجة هذا الامتحان.

اما النظرة الثانية فيبدو فيها البكالوريا امتحان صعب المنال هل البكالوريا صعب المنال؟؟ من قال هذا ؟ !ستصل لمبتغاك و تحصل على البكالوريا فقط بخطوتين :

(1قرر : و لا اقصد التمني و أحلام اليقظة، بل قرار لن تتخلى عنه مهما كان الثمن و مهما كانت الظروف

(2حاول أن تحقق ذلك الهدف :قد تفشل و لكن حاول ثم حاول ثم حاول ، ثم ستبلغه مهما كان بسيطا أو عظيما فالقاعدة واحدة وهي : الرغبة + العمل الجاد = النجاح

صديقي هل طموحك أن تصبح طالبا جامعي ؟؟ !دعني ابشرك بإمكانك فعل ما عليك الا القرار و الشروع في العمل اليوم قبل الغد لا اقصد العمل المهلك انما العمل البسيط المتميز بالاستمرارية هذا كل شيء

الآن سأخبرك بمعلومة على السريع الخوف من ضيق الوقت أو الاسترخاء المفرط لوجود الوقت هو مجرد فخ يوقعك فيه عقلك الاول لحمايتك من إلقاء اللوم على نفسك و الثاني لأن عقلنا دائما ما يحب السير في الطريق السهل و المريح دون مراعات النتائج

و إن كنت لا تزال تشعر بقلة الاستحقاق فهذه معلوماتي الأخيرة ركز جيدا سر نجاحك قائم على معادلة جميلة و هي :

80%نفسيتك 20% + تقنياتك و معلوماتك=النجاح في امتحان البكالوريا

لهذا السبب نجد العديد من الطلاب يحفظون المقرر حرفيا لكنهم يرسبون .

اما انت فلا تزال لديك الفرصة لتحقق هذه المعادلة لذا ابق مركزا على جانبك النفسي باستمرار☺.

هذه رسالتي لكَ و لكِ مني انا فاطمة الزهراء طالبة البكالوريا اتمنى التوفيق لكل من عمل و لا تنسوا أنكم كلكم تستطيعون إذا فعلها قبلك أحد فأنت أيضا يمكنك فعلها تحياتي لكل طلاب البكالوريا كل الحب لك

بقلم الطالبة ماحي فاطمة الزهراء

Bac Pondichéry 2004

الجزء الأول: لتكن الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x)=(x^2+x+1)e^{-x}-1$.

1.أ-عين نهايتي الدالة φ عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب-أدرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكل جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

2.بين أن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $\alpha\in[1;+\infty[$ يطلب تعين حصر له سعته 10^{-2}.

3.استنتج حسب قيم x اشارة $\varphi(x)$.

الجزء الثاني: التمثيلين البيانين المقابلين (C_f) و (C_g) هما للدالتين f و g على الترتيب المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=(2x+1)e^{-x} \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

1..بين أن المنحنين (C_f) و (C_g) يمران بالنقطة $A(0;1)$

و لهما نفس معادلة المماس عند النقطة A

2.أ-بين ان من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$

ب-حسب قيم x عين اشارة $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$.

ج-استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g).

3.أ-بين أن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$h(x)=(-2x-3)e^{-x}-\ln(x^2+x+1)$ دالة

أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة $x\mapsto f(x)-g(x)$

ب-احسب مساحة الحيز A المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=0$ و $x=\dfrac{1}{2}$.

الحل:

I. الدالة φ معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x)=(x^2+x+1)e^{-x}-1$.

1.أ- نهايتي الدالة φ عند $-\infty$ و $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2+x+1)e^{-x}-1=+\infty$$

لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty\end{cases}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)e^{-x}-1=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}+xe^{-x}+e^{-x}-1=-1$

ب-دراسة اتجاه تغير الدالة φ:

الدالة φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$،

$$\varphi'(x)=(2x+1)e^{-x}-\left(x^2+x+1\right)e^{-x}$$
$$=e^{-x}\left(2x+1-x^2-x-1\right)=\left(-x^2+x\right)e^{-x}$$

و بالتالي: $\varphi'(x)=\left(-x^2+x\right)e^{-x}$ لدينا من x من $\mathbb{R}$ $e^{-x}>0$.

و عليه اشارة $\varphi'(x)$ من اشارة $\left(-x^2+x\right)$.أي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\left(-x^2+x\right)$		-	**0**	+	**0**	-	

جدول تغيرات:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0	+	0	-	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{e}-1$	$\searrow$	-1

2.لدينا: $\varphi(0)=0$ و الدالة φ مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

لكن من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم من $]-\infty;1]$ لدينا $\varphi(x)>\varphi(0)$ أي $\varphi(x)>0$.

اذن من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم من $]-\infty;1]$، $\varphi(x)\neq 0$. اذن $\beta=0$.

الدالة φ مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ مع $\varphi(1)=\frac{3}{e}-1>0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=-1<0$.

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حل α حيث $\alpha\in[1;+\infty[$

تعين حصر α: لدينا: $\varphi(1)=\frac{3}{e}-1>0$ و الدالة φ مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد $\varphi(1,79)=0,0007>0$ و $\varphi(1,8)=-0,001<0$ و عليه $1,79<\alpha<1,8$.

3.اشارة $\varphi(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		+	0	+	0	-	

II. 1.لدينا: $f(0)=1$ و $g(0)=1$ فبالتالي: المنحنين $\left(C_f\right)$ و $\left(C_g\right)$ يمران بالنقطة $A(0;1)$.

*معادلة المماس عند النقطة A:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=(-2x+1)e^{-x}$.

معادلة المماس عند النقطة A للمنحنى $\left(C_f\right)$ هي: $y=x-1$

لدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $g'(x)=\dfrac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)}$.

معادلة المماس عند النقطة A للمنحنى $\left(C_g\right)$ هي: $y=x-1$.

2.أ- ليكن x من $\mathbb{R}$،

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= (2x+1)e^{-x}-\frac{2x+1}{x^2+x+1} \\ &= (2x+1)\left(e^{-x}-\frac{1}{x^2+x+1}\right) \\ &= \frac{(2x+1)\left[(x^2+x+1)e^{-x}-1\right]}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

اذن من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$، $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$

ب- اشارة $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا: من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$، $x^2+x+1>0$ $(\Delta<0;a>0)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
$2x+1$		-	0			+			
$\varphi(x)$				+	0	+	0	-	
$f(x)-g(x)$		-	0	+	0	+	0	-	

ج-الوضع النسبي للمنحنيين $\left(C_f\right)$ و $\left(C_g\right)$:

على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ و $\left]\alpha;+\infty\right[$ المنحنى $\left(C_f\right)$ يقع تحت المنحنى $\left(C_g\right)$

و على المجال $\left]-\frac{1}{2};\alpha\right[$ المنحنى $\left(C_f\right)$ يقع فوق المنحنى $\left(C_g\right)$.

المنحنيين (C_f) و (C_g) يتقاطعان في النقط: $(0;1)$, $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ و $(\alpha; f(\alpha))$

3.أ- الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، $h'(x)=-2e^{-x}-(-2x-3)e^{-x}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}$
$$= f(x)-g(x)$$

و عليه الدالة h أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة $x\mapsto f(x)g(x)$.

ب- مساحة الحيز A:

على المجال $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ المنحنى (C_f) يقع فوق المنحنى (C_g). أي: $f(x)-g(x)\geq 0$.

$$A=\int_{\frac{-1}{2}}^{0} f(x)-g(x)dx=\left[h(x)\right]_{\frac{-1}{2}}^{0}=h(0)-h\left(\frac{-1}{2}\right)=-3-\ln\left(\frac{4}{3}\right)+2e^{\frac{1}{2}}$$

التمرين الثاني: أعداد و حساب

Bac France 2004

1.بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k ومن أجل كل عدد طبيعي x:

$$(x-1)\left(1+x+x^2+...+x^{k-1}\right)=x^k-1.$$

2.نعتبر العدد الطبيعي a حيث، $a\geq 2$.

أ-ليكن n عدد طبيعي غير معدوم و d قاسم موجب للعدد n أي: $n=dk$، بين أن: a^d-1 قاسم للعدد a^n-1.

ب-استنتج من السؤال السابق ان $2^{2004}-1$ قابل للقسمة على 7 و على 63 و 9.

3.ليكن m و n عددان طبيعيان غير معدومان و $d=p\gcd(n;m)$.

أ-نعرف العددان m' و n' بالعلاقتين: $m=dm'$ و $n=dn'$ باستعمال "مبرهنة بيزو" لكل من m' و n' بين انه يوجد عددان صحيحان u و v حيث: $mu-nv=d$.

ب-نفرض أن u و v موجبان تماما، بين أن: $\left(a^{mu}-1\right)-\left(a^{nv}-1\right)a^d=a^d-1$

وبين أن: a^d-1 القاسم المشترك لكل من $\left(a^{mu}-1\right)$ و $\left(a^{nv}-1\right)$.

ج-احسب، باستعمال النتيجة السابقة $p\gcd\left(2^{63}-1;2^{60}-1\right)$.

الحل:

1. لدينا:

$$(x-1)\left(1+x+x^2+...+x^{k-1}\right)=\left(x+x^2+x^3+...+x^{k-1}+x^k\right)-\left(1+x+x^2+...+x^{k-1}\right)$$
$$=x^k-1$$

(قمت بالنشر فقط)

اذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k: $(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=x^k-1$.

2.أ-لدينا:

$$a^n-1=a^{dk}-1=\left(a^d\right)^k-1$$
$$=\left(a^d-1\right)\left(\left(a^d\right)^{k-1}+...+\left(a^d\right)^2+\left(a^d\right)+1\right)$$

و بما أن $\left(\left(a^d\right)^{k-1}+...+\left(a^d\right)^2+\left(a^d\right)+1\right)$ عدد طبيعي فان a^d-1 يقسم a^n-1.

ب- لدينا $2004=3\times668$ و بالتالي 2004 يقبل القسمة على 3. و من خلال نتيجة السؤال السابق $2^{2004}-1$ يقبل القسمة على 2^3-1 و عليه $2004=6\times334$. و منه $2^{2004}-1$ قابل للقسمة على العدد $2^6-1=63$.

نستخلص منه أن : $2^{2004}-1$ يقبل القسمة على $63=9\times7$.

3.أ- العددان m' و n' أوليان فيما بينهما و عليه من "مبرهنة بيزو" يوجد عددان صحيحان u و v حيث: $m'u-n'v=1$.

و عليه $dm'u-dn'v=d$.

أي: $mu-nv=d$.

ب-لدينا: $\left(a^{mu}-1\right)-\left(a^{nv}-1\right)a^d=a^{mu}-1-a^{nv+d}+a^d=a^{mu}-1-a^{mu}+a^d$

a^d-1

نضع D حيث $D=p\gcd\left(a^{mu}-1;a^{nv}-1\right)$.

لدينا d يقسم m و n وبالتالي d يقسم mu و nv و حسب السؤال 2. يمكن استنتاج أن: a^d-1 يقسم $\left(a^{mu}-1\right)$ و $\left(a^{nv}-1\right)$.و

نختص حالة $a^d-1\leq D$

من جهة أخرى D يقسم $\left(a^{mu}-1\right)$ و $\left(a^{nv}-1\right)$ و بالتالي D يقسم $\left(a^{mu}-1\right)-\left(a^{nv}-1\right)a^d$ حسب السؤال أ- يمكن أن نستنتج أن D يقسم a^d-1. و نختص حالة $D\leq a^d-1$.

اذن في الأخير نجد: $D=a^d-1$. و عليه $p\gcd\left(a^{mu}-1;a^{nv}-1\right)=a^d-1$.

ج- نأخذ $m=63$ و $n=60$ ولدينا $63=3^2\times7$ و $60=2^2\times3\times5$ و عليه $p\gcd(63;60)=3$.

و بما أن $63\times1-60\times1=3$ و $\begin{cases}u=1\\v=1\end{cases}$ من السؤال السابق نجد $p\gcd\left(2^{63}-1;2^{60}-1\right)=2^3-1$

أي $p\gcd\left(2^{63}-1;2^{60}-1\right)=7$.

❑

Bac Liban juin 2004

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. أ-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $\left(z-2i\right)\left(z^2-2z+2\right)=0 ....(*)$

ب-أكتب حلول المعادلة $(*)$ على الشكل الأسي.

2. ليكن A و B نقطتان لاحقتها $z_A=1+i$ و $z_B=2i$ ، من أجل كل عدد مركب يختلف عن z_A نضع: $z'=\dfrac{z-2i}{z-1-i}$.

أ-لتكن $\left(E\right)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث z' تخيلي صرف.

بين أن $B\in\left(E\right)$ ، عين ثم أنشئ المجموعة $\left(E\right)$.

ب- لتكن $\left(F\right)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z'|=1$.

عين ثم انشئ المجموعة $\left(F\right)$.

3. ليكن R الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

أ-عين لاحقة النقطة B' صورة النقطة B و لاحقة النقطة I' صورة النقطة $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ بالدوران R

ب- عين صور $\left(E\right)$ و $\left(F\right)$ بالدوران R.

الحل:

1. أ-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $\left(z-2i\right)\left(z^2-2z+2\right)=0 ....(*)$

$$\left(z-2i\right)\left(z^2-2z+2\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left(z-2i\right)=0 \Rightarrow z=2i \\ \left(z^2-2z+2\right)=0\end{cases}$$

$$\Delta=\left(2i\right)^2 \Rightarrow z_1=\frac{2+2i}{2}=1+i$$

$$z_2=\overline{z_1}=\overline{1+i}=1-i$$

$$S=\left\{2i;1+i;1-i\right\}$$

ب-أكتب حلول المعادلة $(*)$ على الشكل الأسي:

$$2i=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$1+i=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$1-i=\overline{1+i}=\overline{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i-\frac{\pi}{4}}$$

2. أ-بين أن $B\in(E)$:

اذا كان $z=z_B=2i$ يعني $z'=0$ و بالتالي: $B\in(E)$.

تعيين (E): $M\in(E)\Leftrightarrow\dfrac{z-2i}{z-(1+i)}$ تخيلي صرف

معناه $\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$ تخيلي صرف

أي: $\arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ يعني: $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

و عليه M تنتمي الى الدائرة التي قطرها $[AB]$ ما عدا النقطة A.

ب- تعين (F):

$$M\in(F)\Leftrightarrow\left|\frac{z-2i}{z-1-i}\right|=1$$
$$\left|\frac{z-z_B}{z-z_A}\right|=1$$
$$\frac{MB}{MA}=1\Leftrightarrow MA=MB$$

و عليه المجموعة (F) هي المستقيم المحوري للقطعة $[AB]$.

3. ليكن R الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

أ-تعين لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران R

علينا تعين العبارة المركبة للدوران R:

$$\begin{aligned}z'&=z_\Omega+e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_\Omega)\\&=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i+i\left(z-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i\right)\\&=iz+4+i\end{aligned}$$

و عليه

$$\begin{aligned}z_{B'}&=iz_B+4+i\\&=i(2i)+4+i\\&=2+i\end{aligned}$$

لاحقة النقطة I' صورة النقطة $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

❑

$$\begin{aligned} z_{I'} &= iz_I + 4 + i \\ &= i\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)+4+i \\ &= \frac{5}{2}+\frac{3}{2}i \end{aligned}$$

اذن $B'(2;1)$ و $I'\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

ب- تعين صور (E) و (F) بالدوران R.

نلاحظ أن I منتصف القطعة $[AB]$ و بالتالي (E) دائرة مركزها I تمر بالنقطة B ماعدا النقطة A

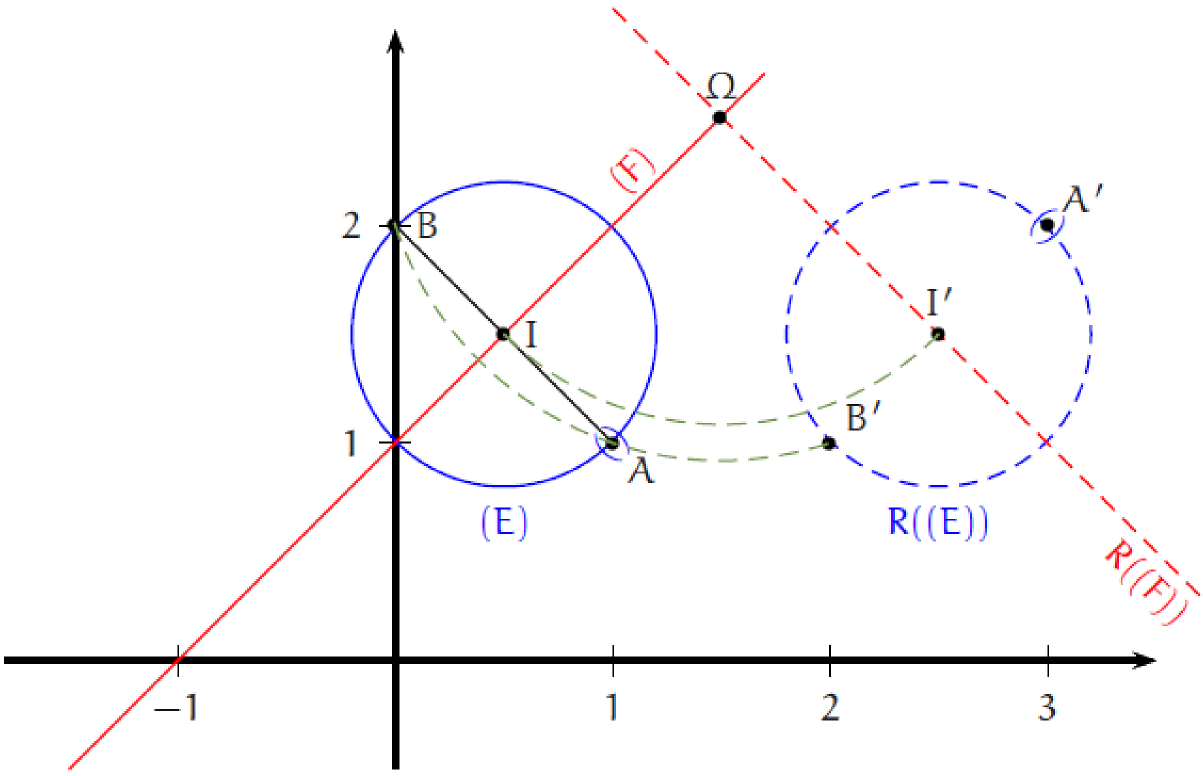
نستنج أن $R((E))$ دائرة مركزها $R(I)=I'$ تمر بالنقطة $R(B)=B'$ ماعدا النقطة $R(A)=A'$

اذن $R((E))$ دائرة مركزها I' تمر بالنقطة B' ماعدا النقطة A'.

لدينا: $A\Omega = B\Omega = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}$ و عليه النقطة Ω تنتمي الى المستقيم المحوري للقطعة $[AB]$.

و بما أن النقطة I كذلك تنتمي الى المستقيم المحوري للقطعة $[AB]$.

المجموعة (F) هي المستقيم (ΩI) و عليه $R((F))$ هي المستقيم $(R(\Omega)R(I))$ أي المستقيم $(\Omega I')$.



(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0=2$ ومن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=5-\dfrac{4}{u_n}$

Bac Maroc

1) احسب : u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2\le u_n\le 4$

2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1}\le\dfrac{4-u_n}{2}$

4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 4-u_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

الحل:

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0=2$ ومن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=5-\dfrac{4}{u_n}$

1) حساب : $u_1=5-\dfrac{4}{2}=3$ و $u_2=5-\dfrac{4}{3}=\dfrac{11}{3}$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2\le u_n\le 4$

لدينا $2\le u_1\le 4$ محققة

نفرض أن $2\le u_n\le 4$ و لنبرهن أن $2\le u_{n+1}\le 4$

$2\le u_n\le 4$ بالقلب نجد $\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{u_n}\le\dfrac{1}{2}$ بالضرب في -4 نجد $-2\le-\dfrac{4}{u_n}\le-1$ بإضافة 5 نجد $3\le 5-\dfrac{4}{u_n}\le 4$

أي ان $2\le 3\le u_{n+1}\le 4$ و منه $2\le u_{n+1}\le 4$ إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن $2\le u_n\le 4$.

2) تبيين أن (u_n) متزايدة : نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n=5-\dfrac{4}{u_n}-u_n=\dfrac{5u_n-4-u_n^2}{u_n}=\dfrac{(4-u_n)(-1+u_n)}{u_n}$

الفرق موجب لان $2\le u_n\le 4$ فإن $4-u_n\ge 0$ و $-1+u_n\ge 0$ و هو المطلوب .

استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة .

❑

1) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1}\leq\dfrac{4-u_n}{2}$

لدينا $4-u_{n+1}=4-5+\dfrac{4}{u_n}=-1+\dfrac{4}{u_n}=\dfrac{-u_n+4}{u_n}=\dfrac{1}{u_n}(4-u_n)$ و بما ان $2\leq u_n\leq 4$ بالقلب نجد

$\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{u_n}\leq\dfrac{1}{2}$ ، و منه $4-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}(4-u_n)$.

2) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq 4-u_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ مما سبق نجد أن $0\leq 4-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}(4-u_n)$ و

منه $0\leq 4-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}(4-u_n)\leq\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}(4-u_{n-1})\right]$ أي $0\leq 4-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2^2}(4-u_{n-1})$ و ها كذا

$0\leq 4-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}(4-u_{n-1})\leq\dfrac{1}{2^2}\left[\dfrac{1}{2}(4-u_{n-2})\right]$ أي ان $0\leq 4-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2^3}(4-u_{n-2})$ .... إلى أن

نصل إلى التعميم $0\leq 4-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ و منه $0\leq 4-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ اي ان

$0\leq 4-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2^{n+1}}(2)$ اي ان $0\leq 4-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2^n}$ بتعويض نجد $0\leq 4-u_{n'}\leq\dfrac{1}{2^{n'-1}}$ و هو المطلوب .

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ بما أن $n'=n+1$ $0\leq 4-u_n\leq\dfrac{1}{2^{n-1}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}=0$ فحسب الحصر

نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

❑

Bac Liban juin 2010

I.لتكن u الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $u(x)=x^2-2+\ln x$

1.أ-احسب نهايتي الدالة عند 0 و $+\infty$.

ب-أدرس اتجاه تغير الدالة u.

2.بين أن المعادلة $u(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;+\infty[$ يطلب تعيين حصر له سعته 10^{-2}.

3.عين حسب قيم x اشارة $u(x)$.

4.بين أن: $\ln\alpha=2-\alpha^2$

II.نعتبر الدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$

1.احسب من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f'(x)$ بدلالة $u(x)$.

2.استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$.

III. ليكن في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

Γ المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية و M نقطة من Γ.

1.نعتبر النقطة $A(0;2)$، بين ان المسافة AM تعطى بالعبارة: $AM=\sqrt{f(x)}$.

2.لتكن g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ-بين أن الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$.

ب-بين أن المسافة AM أصغرية عند النقطة P التي يطلب تعيين احداثياها.

ج-بين أن: $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. هل المستقيم (AP) و مماس المنحنى Γ عند النقطة P متعامدان؟

الحل:

I. u الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$، $u(x)=x^2-2+\ln x$

1.أ- النهايات

$$\lim_{x\to 0} u(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2-2+\ln x\right)=-\infty$$

و كذلك

$$\lim_{x\to+\infty} u(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2+\ln x\right)=+\infty$$

ب-اتجاه تغير الدالة u على $]0;+\infty[$:

❑

الدالة u قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، $u'(x)=2x+\frac{1}{x}$ و عليه على المجال $]0;+\infty[$ ، $u'(x)>0$

اذن الدالة u متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

2. الدالة u مستمرة و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

و لدينا $\lim\limits_{x\to 0} u(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x)=+\infty$

لدينا $u(1)=-1$ اذن نأخذ قيم حقيقية أكبر تماما من 1. بالآلة الحاسبة نتحصل :

و $u(1,31)=-0,01<0$ و $u(1,32)\approx 0,02>0$ و منه $u(1,31)<u(\alpha)<u(1,32)$ أي $1,31<\alpha<1,32$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $u(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0;+\infty[$ حيث $1,31<\alpha<1,32$

3.اشارة $u(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$		-	0	+	

4. لدينا:

$$u(\alpha)=0$$
$$\alpha^2-2+\ln\alpha=0 \Leftrightarrow \ln\alpha=2-\alpha^2$$

اذن: $\ln\alpha=2-\alpha^2$

II.نعتبر الدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$

1.احسب من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)$ بدلالة $u(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$:

$$f(x)=2x+2\left(-\frac{1}{x}\right)(2-\ln x)$$
$$=\frac{2\left(x^2-2\ln x\right)}{x}$$
$$=\frac{2u(x)}{x}$$

2.استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$.

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ اشارة $f'(x)$ من اشارة $u(x)$ أي:

x	0	α	$+\infty$

$f'(x)$	- 0 +

اذن الدالة f متناقصة على المجال $]0;\alpha[$ و متزايدة على المجال $]\alpha;+\infty[$.

III. 1.نعتبر النقطة $A(0;2)$ ، بين ان المسافة AM تعطى بالعبارة: $AM=\sqrt{f(x)}$.

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $AM=\sqrt{(x-0)^2+(\ln x-2)^2}=\sqrt{x^2+(\ln x-2)^2}=\sqrt{f(x)}$

2.لتكن g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ- الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

و عليه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}>0$ اذن اشارة $g'(x)$ من اشارة $f'(x)$

و هكذا الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$.

ب-بين أن المسافة AM أصغرية عند النقطة P .

من السؤال(II. 2) الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0;+\infty[$ تبلغها عند α و بما ان الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$. المسافة AM أصغرية من أجل $x=\alpha$ و عليه $P(\alpha;\ln\alpha)$.

ج-لدينا

أي:

$$\begin{aligned}AP&=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{\alpha^2+(2-\ln\alpha)^2}=\sqrt{\alpha^2+\left(2-2-\alpha^2\right)^2}\\&=\sqrt{\alpha^2+\left(\alpha^2\right)^2}=\sqrt{\alpha^2\left(1+\left(\alpha^2\right)\right)}\\&=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}\end{aligned}$$

و عليه : $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. معامل توجيه المستقيم (AP) هو: $a=\dfrac{y_p-y_A}{x_P-x_A}=\dfrac{\ln\alpha-2}{\alpha}$

و معامل توجيه مماس المنحنى Γ عند النقطة P هو: $a'=\dfrac{1}{\alpha}$

لدينا:

$$a\times a'=\frac{\ln\alpha-2}{\alpha}\times\frac{1}{\alpha}=\frac{\ln\alpha-2}{\alpha^2}=-1$$
$$\ln\alpha=2-\alpha^2$$

اذن المستقيم (AP) و مماس المنحنى Γ عند النقطة P متعامدان.

❑

❑التمرين السادس: متتاليات عددية

Bac Antilles Guyane 2004

نعرف المتتاليتين (a_n) و (b_n) حيث $a_0=1$ و $b_0=7$ و بالعلاقة التالية:

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+b_n) \\ b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n) \end{cases}$$

1. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=b_n-a_n$ من اجل كل عدد طبيعي n.

أ-بين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب-عبر عن u_n بدلالة n.

2.أدرس اتجاه تغير المتتاليتين (a_n) و (b_n).

3.بين أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتان.

4.لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n=a_n+b_n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

بين أن متتالية (v_n) ثابتة.

الحل:

نعرف المتتاليتين (a_n) و (b_n) حيث $a_0=1$ و $b_0=7$ و بالعلاقة التالية: $\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+b_n) \\ b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n) \end{cases}$

1. المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=b_n-a_n$ من اجل كل عدد طبيعي n.

أ- لدينا: $u_{n+1}=b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n)-\frac{1}{3}(2a_n+b_n)=\frac{b_n-a_n}{3}=\frac{1}{3}u_n$

و منه (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول: $u_0=b_0-a_0=7-1=6$

ب-التعبر عن u_n بدلالة n: $u_n=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2.اتجاه تغير المتتاليتين (a_n) و (b_n):

لدينا $u_n=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ أي $u_n>0$ و عليه $b_n>a_n$

اذن $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3}(2a_n+b_n)-a_n=\frac{b_n-a_n}{3}$ و بالتالي (a_n) متتالية متزايدة.
$a_{n+1}-a_n\geq 0$

بالمثل نجد $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}(a_n+2b_n)-b_n=\frac{a_n-b_n}{3}$ و بالتالي (b_n) متتالية متناقصة.
$b_{n+1}-b_n\leq 0$

3.لدينا

$$b_n-a_n=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

و منه
$$\lim_{n\to+\infty} b_n-a_n=\lim_{n\to+\infty} 6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$$
$$\lim_{n\to+\infty} b_n-a_n=0$$

بما أن (a_n) متتالية متزايدة و (b_n) متتالية متناقصة و $\lim_{n\to+\infty} b_n-a_n=0$ فان المتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتان.

4. المتتالية (v_n) المعرفة بالعبارة: $v_n=a_n+b_n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

لدينا
$$v_{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+b_n)+\frac{1}{3}(a_n+2b_n)=\frac{3(a_n+b_n)}{3}=a_n+b_n$$
$$=v_n$$

و عليه المتتالية (v_n) متتالية ثابتة.

Bac Rochambeau juin 2010

الجزء الأول :

لتكن الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^{x}-x-1$.

1.أدرس اتجاه تغيرالدالة g .

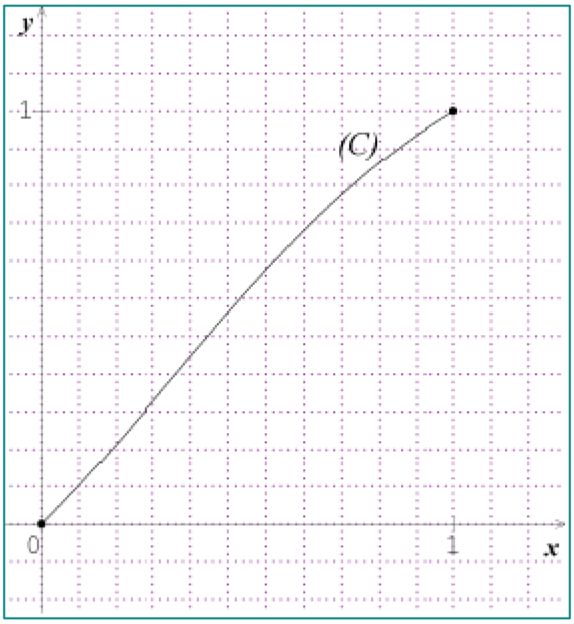
2.عين حسب قيم x اشارة $g(x)$.

3.استنتج أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $e^{x}-x>0$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ كما هو موضح في الشكل المقابل :



1.بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$ ، $f(x)\in[0;1]$.

2.ليكن (D) المستقيم ذا المعادلة $y=x$.

أ-بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$، $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^{x}-x}$.

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D).

3.أ-عين دالة أصلية للدالة f على $[0;1]$.

ب-احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (D)

و المستقيمات التي معادلاتها: $x=0$ و $x=1$.

الجزء الثالث: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بالعلاقة: $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

من أجل كل عدد طبيعي n.

1. باستعمال الشكل السابق مثل الحدود الأربعة الأولى دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل.

2.بين أنه من أجل عدد طبيعي n ، $\dfrac{1}{2}<u_n<u_{n+1}<1$.

3.استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم عين نهايتها

الحل:

I.الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^x-x-1$.

1. اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ ، $g'(x)=e^x-1$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
e^x-1	$+$

و عليه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2.عين حسب قيم x اشارة $g(x)$:

بما أن $g(0)=0$ و الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$. اذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $g(x)\geq g(0)=0$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$

3. لدينا: $g(x)\geq 0$ أي: $e^x-x\geq 1 \Leftrightarrow e^x-x-1\geq 0$

$$\Leftrightarrow e^x-x\geq 0$$

اذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $e^x-x>0$.

II.الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

1. لدينا $x\in[0;1]$ و بما أن f دالة متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ فان ، $f(0)\leq f(x)\leq f(1)$.

أي $0\leq f(x)\leq 1$ تكافئ $f(x)\in[0;1]$.

اذن من أجل كل x من $[0;1]$ ، $f(x)\in[0;1]$.

2.أ-

$$f(x)-x=\frac{e^x-1}{e^x-x}-x=\frac{e^x-1-x\left(e^x-x\right)}{e^x-x}=\frac{(1-x)\left(e^x-(1+x)\right)}{e^x-x}$$

اذن : $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.

ب- الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D):

من أجل كل x من $[0;1]$، $g(x)\geq 0$ و $1-x>0$ و $e^x-x>0$

اذن $f(x)-x>0$ أي أن للمنحنى (C) يقع فوق المستقيم (D) و يتقاطعان في النقطة $(0;0)$ و $(1;1)$.

3.أ- دالة أصلية للدالة f على $[0;1]$.

نلاحظ أن: $\left(e^x-x\right)'=e^x-1$ و عليه $F(x)=\ln\left(e^x-x\right)+c,\left(c\in\mathbb{R}\right)$

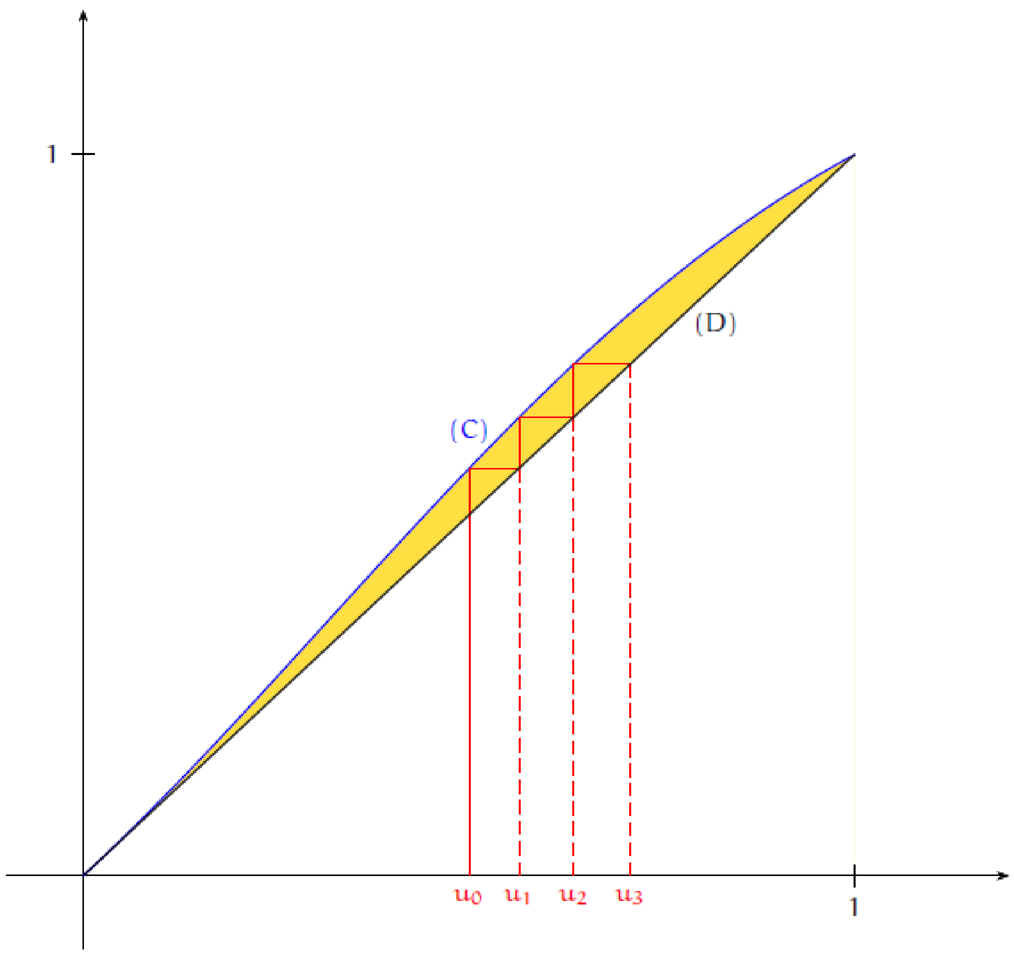
ب- مساحة الحيز:

على المجال $[0;1]$ $f(x)>x$ و بالتالي:

$$\int_0^1 f(x)-xdx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 xdx=\left[F(x)\right]_0^1-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$
$$=\ln\left(e-1\right)-\frac{1}{2}u.a$$

الجزء الثالث:

1. خطوط التمثيل.



2.لدينا: $u_0=\frac{1}{2}$ و منه $\frac{1}{2}\leq u_0\leq 1$.

ليكن $n \geq 0$ نفرض أن $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ و بما أن f دالة متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

و منه نستنتج أن $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(1)$ أي: $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$.

و عليه حسب خاصية الاستدلال بالتراجع لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

حسب ما سبق لدينا على المجال $[0;1]$، $f(x) > x$ و بما أن $u_n \in [0;1]$

فان $f(u_n) \geq u_n$.

اذن من أجل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{2} < u_n < u_{n+1} < 1$.

3. بما أن المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة نحو العدد l حيث $l \in [0;1]$.

لأن $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

$l = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(l)$.

من أجل $x = 1$ لدينا $f(x) = x$ و بالتالي، $l = 1$ و عليه: $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

التمرين الثامن: احتمالات

Bac Asie juin 2012

ليكن k عدد طبيعي أكبرمن أو يساوي 2. صندوق يحتوي على k كرية حمراء و3 كرات بيضاء ، نسحب عشوائيا و دون التمييز بين الكرات من هذا الصندوق كرتان على التوالي مع ارجاع الكرة المسحوبة .

نريد ان نلعب لعبة وفق الشروط التالية :

اللاعب يخسر 9 دج اذا كانت الكرتان المسحوبتان بيضاويتان.

اللاعب يخسر 1 دج اذا كانت الكرتان المسحوبتان سوداويتان.

يربح الاعب 5 دج اذا كانت الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين و نقول في هذه الحالة أن اللاعب ربح اللعبة.

ليكن Y_k المتغير العشوائي الذي يرفق بالربح الجبري للاعب.

1.أ-بين أن : $p(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$

ب-عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي Y_k .

2.نعتبر الأمل الرياضياتي $E(Y_k)$ للمتغير العشوائي Y_k

عين قيم k حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

الحل:

1. $p(Y_k=5)$ هو احتمال أن يربح الاعب 5 دج بحيث الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين.

$$p(Y_k=5)=\frac{k}{(k+3)}\times\frac{3}{(k+3)}+\frac{3}{(k+3)}\times\frac{k}{(k+3)}=\frac{6k}{(k+3)^2}.$$

ب-قيم المتغير العشوائي هي : $Y_k=\{-9;-1;5\}$.

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي Y_k .

$$p(Y_k=-9)=\frac{3}{(k+3)}\times\frac{3}{(k+3)}=\frac{9}{(k+3)^2}$$

$$p(Y_k=-1)=\frac{k}{(k+3)}\times\frac{k}{(k+3)}=\frac{k^2}{(k+3)^2}$$

y_i	-9	-1	5
$p(Y_k=y_i)$	$\frac{9}{(k+3)^2}$	$\frac{k^2}{(k+3)^2}$	$\frac{6k}{(k+3)^2}$

2. الأمل الرياضياتي $E(Y_k)$:

$$E(Y_k)=-9\left(\frac{9}{(k+3)^2}\right)-\frac{k^2}{(k+3)^2}+5\left(\frac{6k}{(k+3)^2}\right)$$
$$=\frac{-k^2+30k-81}{(k+3)^2}$$

اللعبة في صالح اللاعب معناه $E(Y_k)>0$ أي: $\frac{-k^2+30k-81}{(k+3)^2}>0$

أي: $-k^2+30k-81>0$ لأن $(k+3)^2>0$ من أجل أي قيمة للعدد الطبيعي k .

و عليه نجد أن:
$$-k^2+30k-81>0$$
$$\Leftrightarrow 3<k<27$$

اذن قيم العدد الطبيعي k هي: $26,\dots,6,5,4$.

Bac Liban juin 2004

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+\ln 4+\frac{2}{e^{x}+1}$.

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2.احسب، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)+f(-x)$ ماذا يمكن ان نقول عن النقطة $(0;1+\ln 4)$.

3.أدرس اتجاه تغير الدالة f .

4.أ-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m المعادلة $f(x)=m$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$.

ب-عين حصر سعته 10^{-1} للعدد α حل المعادلة $f(x)=3$.

ج- من أجل أي قيمة ل m العدد $(-\alpha)$ حل للمعادلة $f(x)=m$.

5.أ-بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=x+2+\ln 4-\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}$ ،

ب-بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+\ln 4$ و المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+2+\ln 4$ مستقيمان مقاربان للمنحنى (C)

6.أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ).

7.نعتبر α العدد الحقيقي الموجب .

ماذا يمثل التكامل التالي: $I(\alpha)=\int_{0}^{\alpha}[f(x)-x-\ln 4]dx$ ؟

ب- بين أن $I(\alpha)=2\ln\left(\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)$.

ج-احسب α من أجل $I(\alpha)=1$.

الحل:

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+\ln 4+\frac{2}{e^{x}+1}$.

1.نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\ln 4+\frac{2}{e^{x}+1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}=-\infty$$

2.لدينا:

$$f(x)+f(-x)=x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}-x+\ln 4+\frac{2}{e^{-x}+1}$$

أي:

$$=2\ln 4+\frac{2}{e^x+1}+\frac{2}{\frac{1}{e^x}+1}$$

$$=2\ln 4+\frac{2\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=2\ln 4+2$$

اذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)+f(-x)=2+2\ln 4$.

و عليه النقطة $\left(0;1+\ln 4\right)$ هي مركز تناظر المنحنى $\left(C\right)$.

3.اتجاه تغير الدالة f .

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=1-2\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}$

اذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)>0$ لأن $e^{2x}+1>0$ و $\left(e^x+1\right)^2>0$

و عليه فان الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

4.أ- لدينا الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=m$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$.

ب-ليكن α حل المعادلة $f(x)=3$ باستعمال الآلة الحاسبة نتحصل على $f(1{,}1)=2{,}98<3$ و $f(1{,}2)=3{,}04>3$

اذن $1{,}1<\alpha<1{,}2$.

ج- من أجل أي قيمة ل m العدد $\left(-\alpha\right)$ حل للمعادلة $f(x)=m$.

من السؤال 2.

$$f\left(-\alpha\right)=2+2\ln 4-f(\alpha)=2+2\ln 4-3=2\ln 4-1$$

و عليه $\left(-\alpha\right)$ حل للمعادلة من أجل $m=2\ln 4-1$.

5.أ-من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$\begin{aligned} x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1} &= x+\ln 4+\frac{2+2e^x-2e^x}{e^x+1} \\ &= x+\ln 4+\frac{2\left(e^x+1\right)}{e^x+1}+\frac{-2e^x}{e^x+1} \\ &= x+\ln 4+2-\frac{2e^x}{e^x+1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ب- لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x)-y &= \lim_{x\to+\infty} x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}-(x+\ln 4) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x+1}=0 \end{aligned}$$

اذن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+\ln 4$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

و لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x)-y &= \lim_{x\to-\infty} x+\ln 4+2-\frac{2e^x}{e^x+1}-(x+\ln 4+2) \\ &= \lim_{x\to-\infty} -\frac{2e^x}{e^x+1}=0 \end{aligned}$$

و بالتالي المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+2+\ln 4$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$.

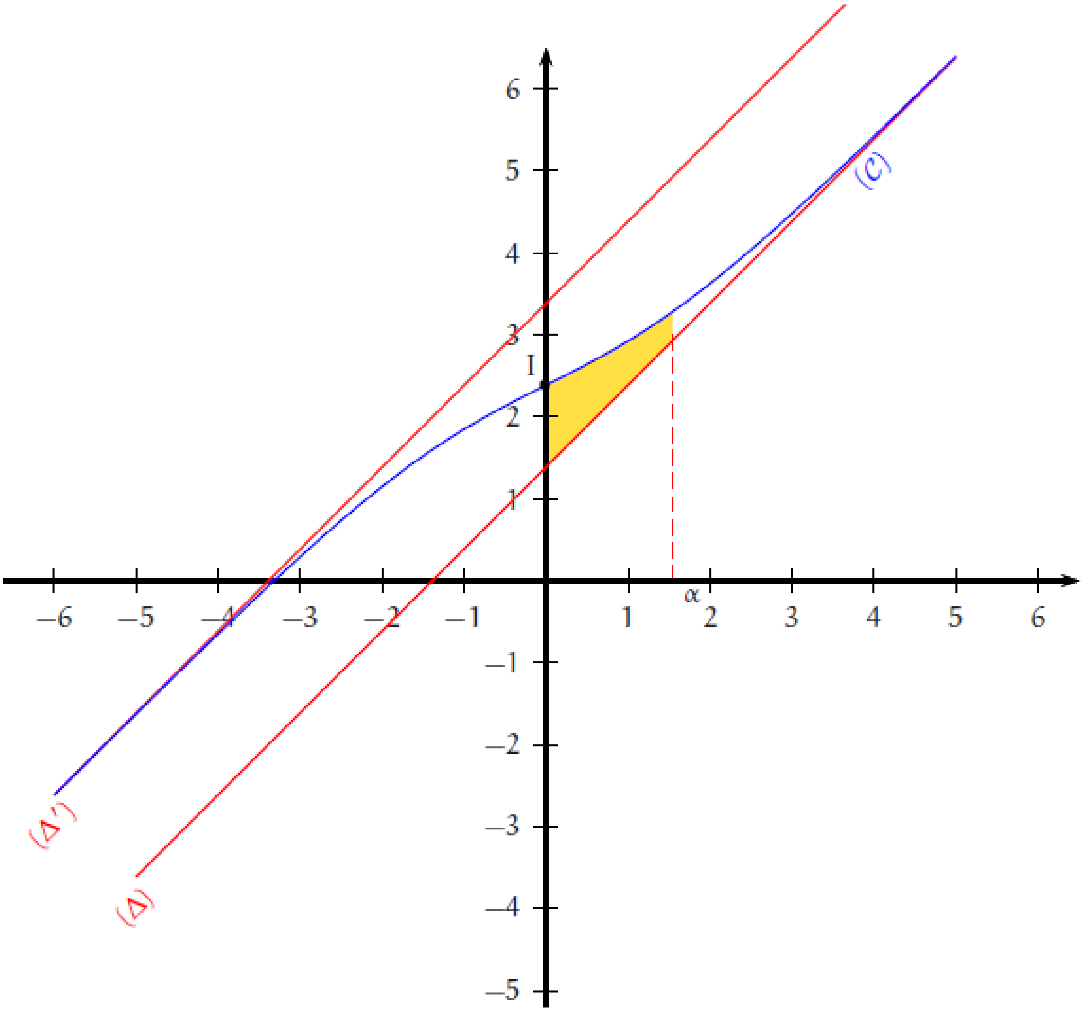
6.الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ):

بدراسة اشارة الفرق $f(x)-y$ نجد: $f(x)-y=\frac{2}{e^x+1}>0$.

اذن المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) على $\mathbb{R}$.

الرسم (غير مطلوب)

❑



7.نعتبر α العدد الحقيقي الموجب .

لدينا : $I(\alpha)=\int_0^{\alpha}[f(x)-x-\ln 4]dx$

$I(\alpha)$ يمثل مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمان الذين معادلاتهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

ب- لدينا:

اذن:

$$I(\alpha)=I(\alpha)=\int_0^{\alpha}[f(x)-x-\ln 4]dx=$$
$$=\int_0^{\alpha}2-2\frac{e^x}{e^x+1}dx$$
$$=\left[2x-2\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^{\alpha}.$$
$$=2\alpha-2\ln\left(e^{\alpha}+1\right)+2\ln 2$$
$$=2\left[\ln e^{\alpha}-\ln\left(e^{\alpha}+1\right)+\ln 2\right]$$
$$=2\ln\left(\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)$$

❑

ج-حساب α من أجل $I(\alpha)$:

$$I(\alpha)=1 \Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}=e^{\frac{1}{2}}$$

نجد من هذا:

$$\Leftrightarrow 2e^{\alpha}=e^{\frac{1}{2}}\left(e^{\alpha}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha}\left(2-e^{\frac{1}{2}}\right)=e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha}=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\left(2-e^{\frac{1}{2}}\right)}$$

التمرين الثاني: المتتاليات العددية

Bac France

لتكن المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$ و $v_n=u_n+\frac{1}{n(n!)}$ (نذكر أن: $n!=n(n-1)(n-2)\times...\times 2\times 1.$ و $0!=1$)

1.بين أن المتتالية (u_n) متزايدة و أن المتتالية (v_n) متناقصة.

2.بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n<v_n$.

استنتج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان.

3.احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-v_n$. ماذا يمكنك القول عن المتتاليتان (u_n) و (v_n)

الحل:

$u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$ و $v_n=u_n+\frac{1}{n(n!)}$ نذكر أن: $n!=n(n-1)(n-2)\times...\times 2\times 1.$

1.اثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة :

$$u_{n+1}-u_n=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right)-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right)$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-...-\frac{1}{n!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}>0$$

$$u_{n+1}-u_n>0$$

المتتالية (v_n) متناقصة:

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-u_n-\frac{1}{n(n!)}$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{1}{n(n!)}$$
$$v_{n+1}-v_n=\frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}=\frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)(n+1)!}$$
$$\frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}<0$$
$$v_{n+1}-v_n<0$$

اذن المتتالية (v_n) متناقصة .

1.بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n<v_n$.

$$v_n-u_n=u_n+\frac{1}{n(n!)}-u_n=\frac{1}{n(n!)}$$

لدينا: $v_n-u_n=\frac{1}{n(n!)}>0$ معناه: $u_n<v_n$.

$$v_n-u_n>0$$

استنتاج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان.

بما أن المتتالية (v_n) متناقصة لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_n\le v_0$ و بالتالي: $u_n\le v_0$

اذن نلاحظ أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد v_0 و بما أنها متزايدة اذن (u_n) متقاربة.

و نفس الكيفية لدينا:

المتتالية (u_n) متزايدة معناه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n\ge u_0$ و بالتالي: $u_0\le v_n$

اذن نلاحظ أن المتتالية (v_n) محدودة من الأسفل بالعدد u_0 و بما أنها متناقصة اذن (v_n) متقاربة.

3.حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n-v_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n-v_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n(n!)}=0 .$$

بما أن: المتتالية (u_n) متزايدة و المتتالية (v_n) متناقصة و كذلك $\lim_{n\to+\infty} u_n-v_n=0$.

و عليه نستنتج المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان اذن هما متقاربتان و لهما نفس النهاية.

❑

Bac Maroc septembre 1978

الجزء الأول:

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ كما يلي: $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$.

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.احسب $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^{>}} f(x)$ و $\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}^{<}} f(x)$. (يمكنك تغيير المتغير بوضع: $u=\sin x$)

2.أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$.

3.أ- بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

ب-عين معادلة المماسين للمنحنى (C) عند النقطتين ذات الفاصلتين 0 و $\frac{\pi}{2}$.

ج-بين أن النقطة $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C).

4.أرسم المنحنى (C).

5.احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و حامل محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها : $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ كما يلي: $g(x)=\ln(1+\sin x)$.

(Γ) هو التمثيل البياني للدالة في المستوى المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أدرس تغيرات الدالة g على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$.

2. أ-عين معادلة المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ب- بين أن المستقيم ذا المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ محور تناظر للمنحنى (Γ).

ج-أرسم المنحنى (Γ). (نأخذ: $\ln 2\approx 0,7$)

3.ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $1+\sin x-e^{m}=0$ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$.

الحل:

❑

I.لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ كمايلي: $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$.

1.احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\frac{-\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\frac{-\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}$

نقوم بتغيير المتغير بوضع: $u=\sin x$ $\quad u=\sin x \Leftrightarrow \cos^2 x=1-u^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}|\cos x|=\sqrt{1-u^2}\\ x\overset{>}{\mapsto}\frac{-\pi}{2}\end{cases} \qquad \Leftrightarrow \cos x=\sqrt{1-u^2}$$

لما $x\overset{>}{\mapsto}\frac{-\pi}{2} \Leftrightarrow u\overset{>}{\mapsto}-1$ و عليه $\lim\limits_{u\overset{>}{\mapsto}-1} f(x)=\lim\limits_{u\overset{>}{\mapsto}-1}\frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u}=\lim\limits_{u\overset{>}{\mapsto}-1}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}=+\infty$

و بنفس الكيفية نجد: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=\lim\limits_{u\overset{<}{\mapsto}-1} f(x)=\lim\limits_{u\overset{<}{\mapsto}-1}\frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u}=\lim\limits_{u\overset{>}{\mapsto}-1}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}=-\infty$.

2.اتجاه تغير الدالة f على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ حيث: $f'(x)=-\frac{1}{1+\sin x}$

من أجل كل x من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ لدينا: $f'(x)<0$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3.أ- الدالة f'' قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ حيث: $f''(x)=\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$.

نلاحظ أن f'' تنعدم عند $x=\frac{\pi}{2}$ و تغيد اشارتها على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$.

و بالتالي المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف $I\left(\frac{\pi}{2};0\right)$.

ب- معادلة المماس للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

و بالتالي:
$$(T): y=f'(0)+(x-0)+f(0)$$
$$(T): y=-x+1$$

معادلة المماس للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\pi}{2}$:

$$(T'): y=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

و بالتالي:

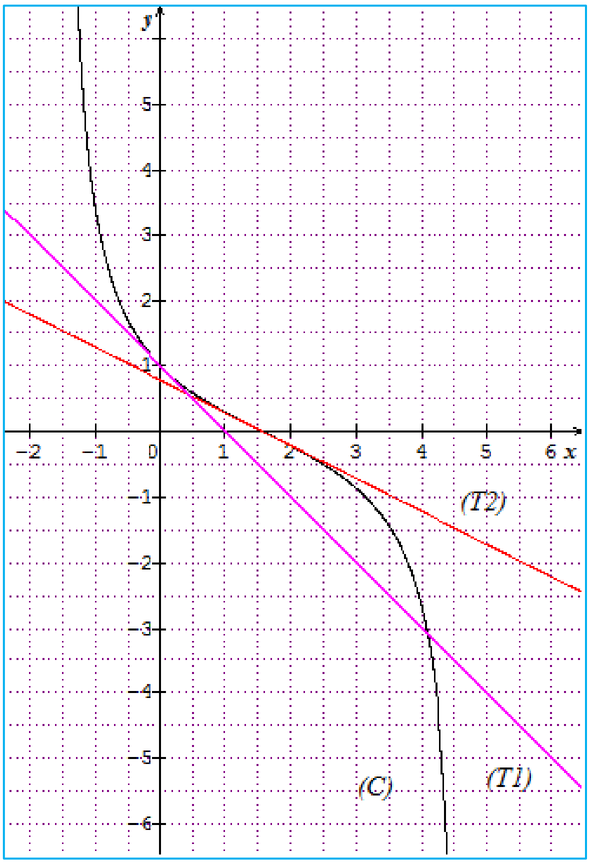
$$(T'): y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}$$

ج- من أجل كل x و $\pi-x$ من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ لدينا

ومنه $f(\pi-x)=\frac{\cos(\pi-x)}{1+\sin(\pi-x)}=\frac{-\cos x}{1+\sin x}=2(0)-f(x)$ اذن النقطة $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C).

$=-f(x)$

4.رسم المنحنى (C):



5.مساحة الحيز:

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\left[\ln\left(1+\sin x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2$$

II.نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ كما يلي: $g(x)=\ln\left(1+\sin x\right)$.

1.دراسة تغيرات الدالة g على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$:

و لدينا
$$\lim_{\substack{x \to \frac{-\pi}{2} \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{-\pi}{2} \\ >}} \ln\left(1+\sin x\right) = +\infty$$
$$\lim_{\substack{x \to \frac{3\pi}{2} \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{3\pi}{2} \\ <}} \ln\left(1+\sin x\right) = -\infty$$

من أجل كل x من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ لدينا:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\cos x}{1+\sin x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$				$\frac{3\pi}{2}$
$g'(x)$	‖		0		‖
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖

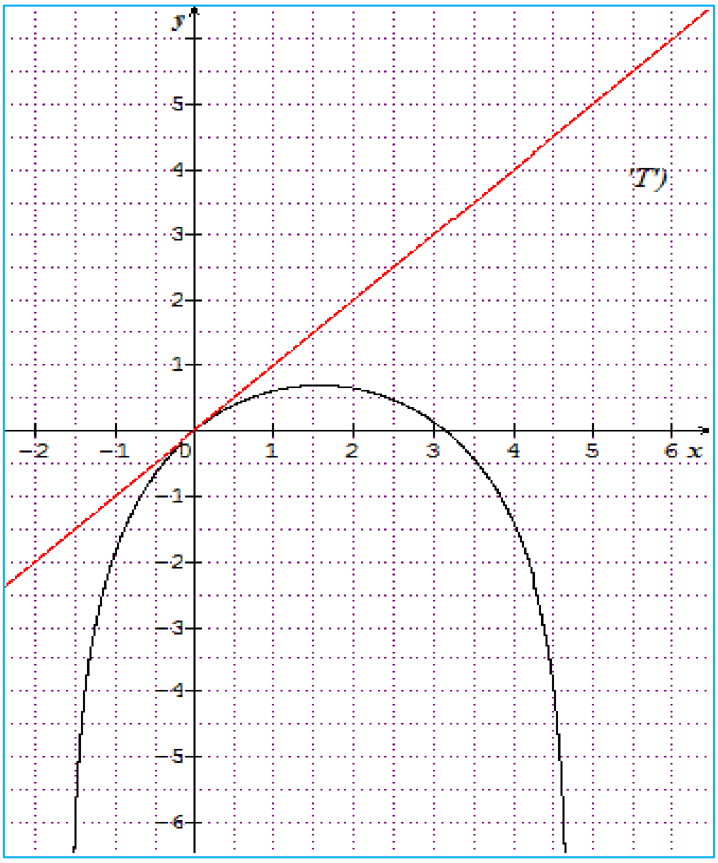
2. أ-معادلة المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$$(T'): y = g'(0)(x-0)+g(0)$$
$$(T'): y = x$$

ب- من أجل كل x ، $\pi - x$ من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ ،
$$\begin{aligned} g(\pi-x) &= \ln(1+\sin(\pi-x)) = \ln\left(1+\sin x\right) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

و عليه المستقيم ذا المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ محور تناظر للمنحنى (Γ).

ج-أرسم المنحنى (Γ). (نأخذ: $\ln 2 \approx 0,7$)



3 المناقشة:

لدينا:

$$\begin{aligned} 1+\sin x-e^{m}=0 &\Leftrightarrow 1+\sin x=e^{m} \\ &\Leftrightarrow \ln(1+\sin x)=\ln\left(e^{m}\right) \\ &\Leftrightarrow \ln(1+\sin x)=m \\ &\Leftrightarrow g(x)=m \end{aligned}$$

و عليه حلول هذه المعادلة بيانيا هي تحديد فواصل نقط تقاطع المنحنى (Γ) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y=m$.

من أجل $m>\ln 2$ المعادلة لا تقبل حلول.

من أجل $m=\ln 2$ المعادلة تقبل حل وحيد مضاعف.

من أجل $m<\ln 2$ العادلة تقبل حلين متمايزين.

❑

Bac Maroc Septembre 1977

I. 1. بين أن : $\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\cos(\theta)+\sin(\theta)$

2.ليكن z عدد مركب طويلته 1 و عمدته θ حيث $\theta\in\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$.

u عدد مركب معرف كما يلي : $u=z+i\bar{z}$.

احسب بدلالة θ طويلة وعمدة العدد المركب u .

II. زهرة نرد بستة أوجه مرقمة بالأرقام $6,5,4,3,2,1$.

الاحتمالات $p_i\left(i\in\{1,2,3,4,5,6\}\right)$ للحصول على $6,5,4,3,2,1$ تناسبية مع متتالية هندسية أساسها 2 و حدها الأول1.

1.بين أن: $p_1=\frac{1}{63}$ ثم استنتج الاحتمالات p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 .

2.نرمي المرة الأولى زهرة النرد فتتحصل على العدد الطبيعي a حيث $1\le a\le 6$.

نرمي للمرة الثانية فنتحصل على العدد الطبيعي b حيث $1\le b\le 6$.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بمجموع الثنائية $(a;b)$ المحصل عليها في الرميتين.

أ-عين قيم المتغير العشوائي X .

ب-احسب $p(X<6)$.

الحل:

I. 1. لدينا:

$$\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left[\cos(\theta)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin(\theta)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=\cos(\theta)+\sin(\theta)$$

2.ليكن z عدد مركب حيث: $z=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$

و $\bar{z}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$

$$i\bar{z}=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right](\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

حيث $\theta\in\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$.

u عدد مركب معرف كما يلي : $u=z+i\bar{z}$.

حساب بدلالة θ طويلة وعمدة العدد المركب u :

$$\begin{aligned} u &= z + i\bar{z} \\ &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) + \sin(\theta) + i\cos(\theta) \\ &= \left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right](1+i) \\ &= \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)(1+i) \end{aligned}$$

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) < 0; \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$$

و لدينا:

$$\begin{aligned} u &= -\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) \times \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= -2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] \end{aligned}$$

و بالتالي طويلة u هي: $-2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ و عمدته $\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

II. زهرة نرد بستة أوجه مرقمة بالأرقام $6,5,4,3,2,1$.

1.الاحتمالات $p_i\left(i \in \{1,2,3,4,5,6\}\right)$ للحصول على $6,5,4,3,2,1$ تناسبية مع متتالية هندسية أساسها 2 و حدها الأول 1.

معناه: $\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{2} = \frac{p_3}{4} = \frac{p_4}{8} = \frac{p_5}{16} = \frac{p_6}{32} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6}{1+2+4+8+16+32} = \frac{1}{63}$.

و عليه: $\frac{p_1}{1} = \frac{1}{63} \Rightarrow p_1 = \frac{1}{63}$.

و نستنتج منه : $p_2 = \frac{2}{63}; p_3 = \frac{4}{63}; p_4 = \frac{8}{63}; p_5 = \frac{16}{63}; p_6 = \frac{32}{63}$

2.ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بمجموع الثنائية $(a;b)$ المحصل عليها في الرميتين.

أ-تعين فيم المتغير العشوائي X .

a/b	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9

4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

من الجدول نستنتج أن $X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

ب-حساب

$$p(X<6) = p(X=2)+p(X=3)+p(X=4)+p(X=5)$$
$$= \frac{1}{81}$$

Bac Maroc 2018

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=e^{x}-x^{2}+3x-1$.

الجدول المقابل يمثل جدول تغيرات الدالة g.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

1. تحقق من أن $g(0)=0$.

2. حدد اشارة $g(x)$ على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[0;+\infty[$.

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\left(x^{2}-x\right)e^{-x}+x$.

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة $1cm$).

1. أ- تحقق من أن $f(x)=\dfrac{x^{2}}{e^{x}}-\dfrac{x}{e^{x}}+x$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ثم بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$.

ج- تحقق من أن: $f(x)=\dfrac{x^{2}-x+xe^{x}}{e^{x}}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. أ- تحقق من أن $f(x)-x$ و $x^{2}-x$ لهما نفس الاشارة من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

ب- استنتج أن (C) يوجد فوق (D) على المجالين $]-\infty;0]$ و $[1;+\infty[$ و تحت (D) على المجال $[0;1]$.

3. أ- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=g(x)e^{-x}$.

ب- استنتج أن الدالة f متناقصة على $]-\infty;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f.

4. أ- تحقق من أن $f''(x)=(x^{2}-5x+4)e^{-x}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

ب- استنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف فواصلهما 1 و 4 على الترتيب.

5. أنشئ (D) و (C) في نفس المعلم (نأخذ $f(4)\simeq 4,2$).

6. بين أن الدالة $H:x\mapsto\left(x^{2}+2x+2\right)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto -x^{2}e^{-x}$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن: $\int_{0}^{1}x^{2}e^{-x}dx=\dfrac{2e-5}{e}$.

III. لتكن المتتالية العددية $\left(u_{n}\right)$ المعرفة كما يلي: $u_{0}=\dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1}=f\left(u_{n}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

1. بين أن $0\le u_{n}\le 1$ من أجل كل عدد طبيعي n.

2. بين ان المتتالية $\left(u_{n}\right)$ متناقصة.

3. استنتج أن $\left(u_{n}\right)$ متقاربة.

الحل:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=e^x-x^2+3x-1$.

1. لدينا:
$$\begin{aligned} g(0)&=e^0-0^2+3(0)-1 \\ &=0 \end{aligned}$$

و عليه: $g(0)=0$.

2.تحديد اشارة $g(x)$:

من أجل $x\leq 0$ و انطلاقا من جدول تغيرات الدالة لدينا: g دالة متزايدة و عليه $g(x)\leq g(0)$

و بالتالي: $g(x)\leq 0$

و من أجل $x\geq 0$ و انطلاقا من جدول تغيرات الدالة لدينا: g دالة متزايدة و عليه $g(x)\geq g(0)$

و بالتالي: $g(x)\geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\left(x^2-x\right)e^{-x}+x$.

1.أ- لدينا:

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x \\ &=\left(x^2-x\right)\frac{1}{e^x}+x \\ &=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x \end{aligned}$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x=+\infty.$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0 \end{cases}$$

ب-حساب:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x-x$$

$$:\qquad =\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}$$

$$=0$$

و بالتالي المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$.

ج-لدينا:

$$\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}$$

$$=f(x)$$

و عليه $f(x)=\dfrac{x^2-x+xe^x}{e^x}$

حساب $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+xe^x}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}\left(x^2-x+xe^x\right)=+\infty$.

2.أ-لدينا $f(x)-x=(x^2-x)e^{-x}$ و عليه $e^{-x}>0$ من اجل كل x من $\mathbb{R}$.

و بالتالي $f(x)-x$ و x^2-x لهما نفس الاشارة من أجل كل x من $\mathbb{R}$. أي:

x	$+\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		+	0	-	0	+	

ب- بما أن $f(x)-x$ و x^2-x لهما نفس الاشارة من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فان الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D).

و بالتالي المنحنى (C) يوجد فوق (D) على المجالين $]-\infty;0]$ و $[1;+\infty[$ و تحت (D) على المجال $[0;1]$.

3.أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f'(x)=(2x-1)e^{-x}-(x^2-x)e^{-x}+1$$
$$=e^{-x}\left(2x-1-x^2+x+e^x\right)$$
$$=e^{-x}\left(e^x-x^2+3x-1\right)$$
$$=e^{-x}g(x)$$

و بالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=g(x)e^{-x}$.

ب- لدينا $e^{-x}>0$ على $\mathbb{R}$ و بالتالي اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$.

أي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$

$f'(x)$	- 0 +

اذن الدالة f متناقصة على $]-\infty;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

ج-جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4.أ-تحقق من أن $f''(x)=(x^2-5x+4)e^{-x}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$،

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x}\left(e^x - x^2 + 3x - 1\right) + e^{-x}\left(e^x - 2x + 3\right) \\ &= -e^{-x}\left(-e^x + x^2 - 3x + 1 + e^x - 2x + 3\right) \\ &= e^{-x}\left(x^2 - 5x + 4\right) \end{aligned}$$

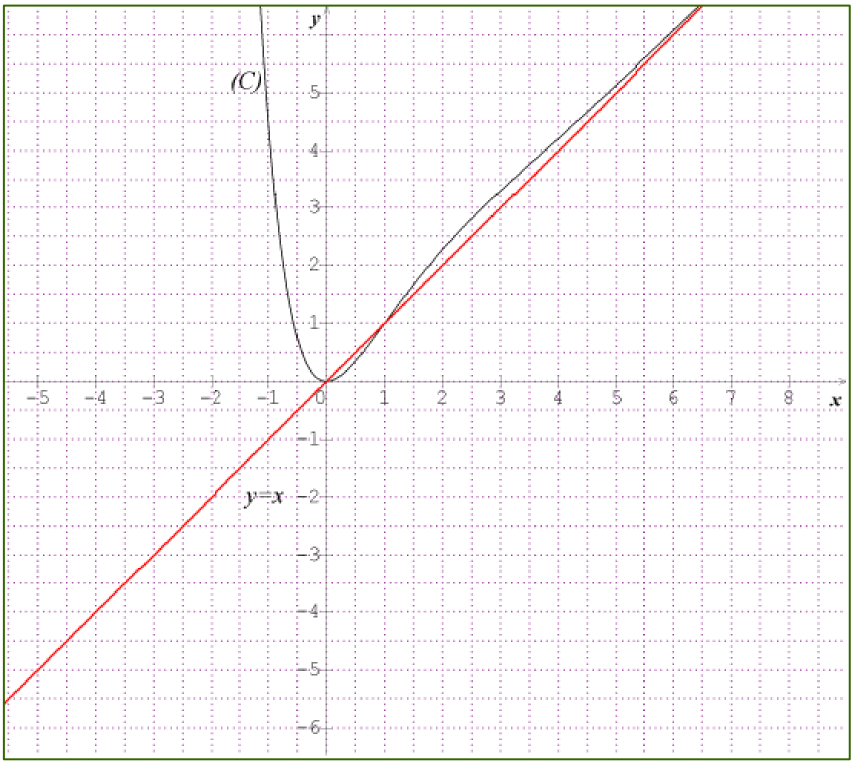
و عليه اشارة $f''(x)$ من اشارة x^2-5x+4 أي:

x	$+\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-x		+	0	-	0	+	

لدينا المشتقة الثانية تنعدم و تغير من اشارتها عند 1 و بالتالي النقطة $A(1;f(1))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

ولدينا المشتقة الثانية تنعدم و تغير من اشارتها عند 4 و بالتالي النقطة $B(4:f(4))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C).

5. انشاء (D) و (C):



6. لدينا الدالة H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و بالتالي:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left(x^2+2x+2\right)e^{-x} \\ &= (2x+2)e^{-x} - \left(x^2+2x+2\right)e^{-x} \\ &= e^{-x}\left(2x+2-x^2-2x-2\right) \\ &= -x^2e^{-x} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

$$H'(x) = h(x)$$

اذن الدالة $H : x \mapsto \left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

لدينا: $\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \int_0^1 -h(x)dx = \left[-H(x)\right]_0^1 = \left[-(x^2+2x+2)e^{-x}\right]_0^1 = \frac{2e-5}{e}$.

III. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

1. بين أن $0 \le u_n \le 1$:

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = \frac{1}{2}$ اذن $0 \le u_0 \le 1$

ليكن n عدد طبيعي نفرض أن $0 \le u_n \le 1$ و نتحقق من صحة $0 \le u_{n+1} \le 1$.

لدينا اذن الدالة f متزايدة على المجال $[0;1]$.

و عليه $f(0) \le f(u_n) \le f(1)$ أي $0 \le u_{n+1} \le 1$

❑

و عليه من أجل كل عدد طبيعي لدينا $0 \le u_n \le 1$.

2.ليكن n عدد طبيعي لدينا $f(x) - x \le 0$ على المجال $[0;1]$.

و بما أن $0 \le u_n \le 1$ فبالتالي: $f(u_n) - u_n \le 0$ أي: $u_{n+1} - u_n \le 0$

و عليه المتتالية (u_n) متناقصة .

3. بما أن (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد 0 فانها متقاربة .

❑التمرين الرابع عشر: الأعداد المركبة

Bac France 2018

المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نضع $z_0 = 8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $z_{n+1} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4} z_n$

نرمز لى A_n النقطة من المستوي ذات اللاحقة z_n.

1.أ- بين $\frac{3 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}$

ب- استنتج الشكل الأسي لكل من z_1, z_2, z_3 و تحقق أن z_3 تخيلي صرف.

ج- مثل بيانيا النقط A_0, A_1, A_2, A_3.

2.أ-برهن بالتراجع ، من أجل كل عدد طبيعي n: $z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}$.

ب-من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = |z_n|$. عين طبيعة و نهاية المتتالية (u_n).

3.أ-بين انه من أجل كل عدد طبيعي k ، $\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} i$. ثم استنتج من أجل كل عدد طبيعي k ، $A_k A_{K+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} OA_{k+1}$.

ب-من أجل كل عدد طبيعي n نرمز الى l_n بالخط المنكسر الذي يربط النقط $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.

نضع $l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$. احسب $\lim_{n \to +\infty} l_n$.

الحل:

نضع $z_0 = 8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $z_{n+1} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4} z_n$

1.أ- لدينا:

❑

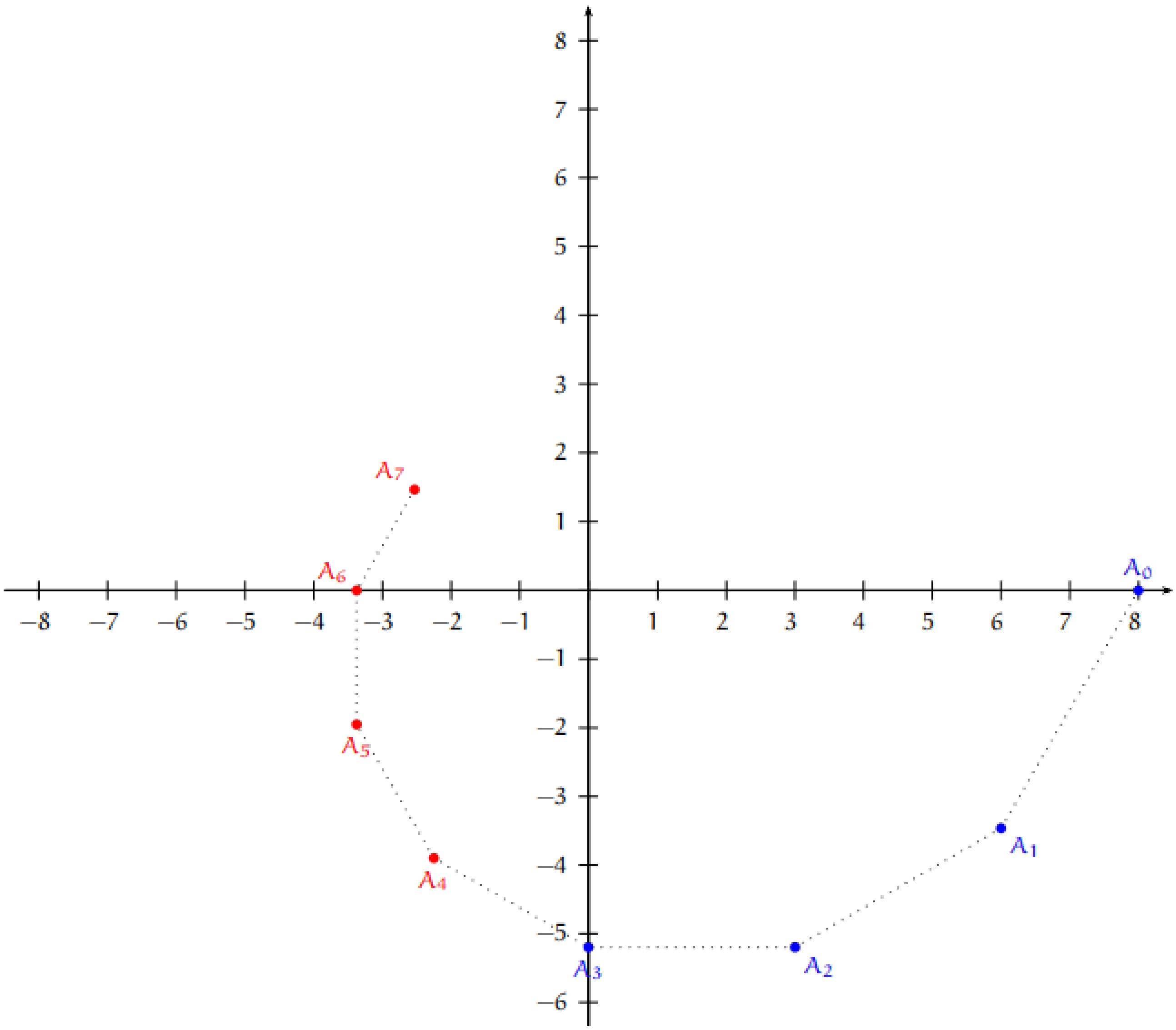
$$\frac{3-i\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{2\times 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

ب- الشكل الأسي لكل من z_1, z_2, z_3 :

$$z_1=\frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}(8)=4\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$
$$z_2=\frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_1=6e^{-i\frac{\pi}{3}}$$
$$z_3=\frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_2=3\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_3=3\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}=3\sqrt{3}\left[\cos\left(-i\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-3\sqrt{3}i$$
$$z_3=-3\sqrt{3}i$$

ج- التمثيل :



2.أ-البرهن بالتراجع :

لدينا من أجل $n=0$ $\quad 8=e^{-i\frac{0\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{0}z_0=8\times$.

ليكن n عدد طبيعي نفرض ان $z_n=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}e^{-i\frac{n\pi}{6}}$ محققة و نبرهن صحة $z_{n+1}=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}e^{-i\frac{(n+1)\pi}{6}}$.

لدينا :

$$z_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\times 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$
$$=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}e^{-i\frac{(n+1)\pi}{6}}$$

و منه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $z_n=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}e^{-i\frac{n\pi}{6}}$.

ب-من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n=|z_n|$.

$$u_n=|z_n|=\left|8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}e^{-i\frac{n\pi}{6}}\right|$$
$$=\left|8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}\right|\times\left|e^{-i\frac{n\pi}{6}}\right|=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$$
$$u_n=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$$

و بالتالي (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=8$ و أساسها $q=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

و بما أن $-1<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ فان $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=0$.

3.أ-بين انه من أجل كل عدد طبيعي k ، $\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}i$.

❑

$$\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}}=\frac{\frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_k-z_k}{\frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_k}=\frac{\frac{3-i\sqrt{3}}{4}-1}{\frac{3-i\sqrt{3}}{4}}=\frac{3-i\sqrt{3}-4}{3-i\sqrt{3}}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$$

و بالتالي:

$$=\frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)\times\left(3+i\sqrt{3}\right)}{\left(3-i\sqrt{3}\right)\times\left(3+i\sqrt{3}\right)}=-\frac{4i\sqrt{3}}{12}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}i$$

و عليه:

$$\frac{A_kA_{K+1}}{OA_{k+1}}=\frac{\left|z_{k+1}-z_k\right|}{\left|z_k\right|}=\left|\frac{z_{k+1}-z_k}{z_k}\right|=\left|-i\frac{1}{\sqrt{3}}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

منه من أجل كل عدد طبيعي k ، $A_kA_{K+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}OA_{k+1}$.

ب-نضع

$$l_n=A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_{n-1}A_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(OA_1+OA_2+\ldots+OA_n\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(u_1+u_2+\ldots+u_n\right)$$

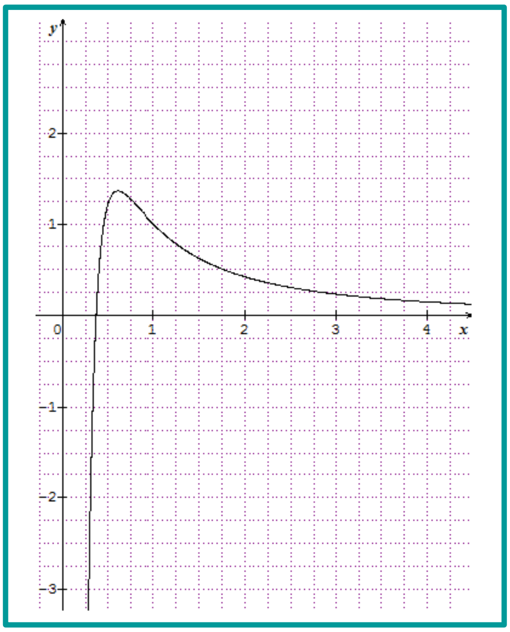
$$=\frac{8}{\sqrt{3}}\left(\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right).$$

$$l_n=\frac{8}{2-\sqrt{3}}\left[1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]$$

و بالتالي: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}l_n=\frac{8}{2-\sqrt{3}}\left[1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]=\frac{8}{2-\sqrt{3}}$

Bac Rochambeau juin 2013

I التكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$، و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (أنظر الشكل المقابل)



1.أ-أحسب نهاية الدالة f عند 0 على اليمين، فسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا..

2.أ-بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$.

ب-حل في $]0;+\infty[$ المتراجحة: $1-2\ln x>0$

ثم استنتج اشارة $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

ج-شكل جدول تغيرات الدالة f .

3.أ-بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة يطلب تعين احداثياها.

ب- استنتج اشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نرمز بالعدد I_n لمساحة الحيز المحصور بين (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلتهما: $x=\dfrac{1}{e}$ و $x=n$.

1.-بين أن: $0\le I_2\le e-\dfrac{1}{2}$

2.-بين أن $F:x\mapsto\dfrac{-2-\ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

3.-أحسب I_n بدلالة n .

4.-أحسب نهاية (I_n) عند $+\infty$.

الحل:

I.التكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$.

1.أ-حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1+\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{x^2}(1+\ln x)=-\infty$

التفسير: $x=0$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

التفسير: $y=0$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

2.أ-اثبات أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ،

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x^2 - 2x(1+\ln x)}{x^4} = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$ اذن: $f'(x) = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$.

$$-1-2\ln x > 0 \Leftrightarrow -2\ln x > 1$$

ب-حل في $]0;+\infty[$ المتراجحة: $1-2\ln x > 0$ أي: $\Leftrightarrow 2\ln x < -1 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2}$ و بالتالي: $S = \left]0; e^{\frac{-1}{2}}\right[$.

$$\Leftrightarrow x < e^{\frac{-1}{2}}$$

استنتج اشارة $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$. لدينا $x>0 \Rightarrow x^3>0$ و منه اشارة $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ من اشارة البسط أي: $1-2\ln x$ أي:

x	0		$e^{\frac{-1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	0	-	

ج-جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$e^{\frac{-1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	0

3.أ-اثبات أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة .

نقوم بحل المعادلة: $f(x)=0$ أي:

$$\frac{1+\ln x}{x^2} =$$

$1+\ln x = 0, \left[x^2 \neq 0, x \in]0;+\infty[\right]$ لأن:

$$\ln x = -1$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

❑

و بالتالي احداثيا النقطة هي: $\left(\frac{1}{e};0\right)$.

استنتاج اشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ ، نلخصها في الجدول التالي:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	

II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نرمز بالعدد I_n لمساحة الحيز المحصور بين (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلتهما: $x=\frac{1}{e}$ و $x=n$.

1-.اثبات أن: $0\le I_2\le e-\frac{1}{2}$.على المجال $\left[\frac{1}{e};2\right]$ لدينا: $0\le f(x)\le\frac{e}{2}$ و بالتالي

أي:

$$0\le\int_{\frac{1}{e}}^{2}f(x)dx\le\int_{\frac{1}{e}}^{2}\frac{e}{2}dx$$

$$0\le I_2\le\frac{e}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{2}1dx$$

$$0\le I_2\le\frac{e}{2}[x]_{\frac{1}{e}}^{2}$$ لأن: $I_2=\int_{\frac{1}{e}}^{2}f(x)dx$

$$0\le I_2\le\frac{e}{2}\left[2-\frac{1}{e}\right]$$

$$0\le I_2\le e-\frac{1}{2}$$

2-.تبيان أن $F:x\mapsto\frac{-2-\ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا الدالة $F:x\mapsto\frac{-2-\ln x}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$، حيث:

$$F'(x)=\frac{-\frac{1}{x}.x-(-2-\ln x)}{x^2}=\frac{-1+2+\ln x}{x^2}=\frac{1+\ln x}{x^2}=f(x).$$
$$\Rightarrow F'(x)=f(x).$$

3-.حساب I_n بدلالة n.

على المجال $\left[\frac{1}{e};n\right]$ لدينا:

$$I_n=\int_{\frac{1}{e}}^{n} f(x)dx=\left[\frac{-2-\ln x}{x}\right]_{\frac{1}{e}}^{n}=\left(\frac{-2-\ln(n)}{n}\right)-\left(\frac{-2-\ln\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}}\right)$$

$$=\left(\frac{-2-\ln(n)}{n}\right)-(-e)$$

$$I_n=e-\frac{2}{n}-\frac{\ln(n)}{n}$$

4.حساب نهاية (I_n) عند $+\infty$:

لدينا : $$\lim_{n\to+\infty} I_n=\lim_{n\to+\infty}\left[e-\frac{2}{n}-\frac{\ln(n)}{n}\right],\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0\end{cases}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n=e$$

التمرين السادس عشر: المتتاليات العددية

Bac Antilles Guyane juin-2012

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $\begin{cases}u_1=\frac{1}{2}\\ u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n\end{cases}$

1.احسب u_3, u_2 و u_4.

2.أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، u_n موجبة تماما.

ب-بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

ج- ماذا يمكن القول عن المتتالية (u_n).

3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n. نضع: $v_n=\frac{u_n}{n}$.

أ-بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول v_1.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n=\frac{n}{2^n}$.

4.نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\ln x-x\ln 2$.

أ-احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب-استنتج نهاية المتتالية (u_n).

الحل:

1.حساب الحدود:

$$u_2=\frac{1+1}{2(1)}u_1=\frac{1}{2}$$
$$u_3=\frac{3}{4}u_2=\frac{3}{8}$$
$$u_4=\frac{4}{6}u_3=\frac{1}{4}$$

2.أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، u_n موجبة تماما أي $u_n>0$.

من اجل $n=1$، $u_1=\frac{1}{2}>0$ و عليه $u_1>0$.

ليكن $n\geq 1$ نفرض أن $u_n>0$ و نتحقق من أن $u_{n+1}>0$. أي: $\frac{n+1}{2n}u_n>0$.

لدينا $u_n>0$ و $\frac{n+1}{2n}>0$ فبالتالي $\frac{n+1}{2n}u_n>0$ اذن $u_{n+1}>0$.

و عليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراج فان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n>0$.

ب- ليكن $n\geq 1$،
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{2n}\leq\frac{n+n}{2n}=1$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$$
حيث: $u_n\neq 0$

فبالتالي: $u_{n+1}<u_n$.اذن المتتالية (u_n) متناقصة.

ج- المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد 0 اذن هي متقاربة.

3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n. نضع: $v_n=\frac{u_n}{n}$.

لدينا : $v_1=\frac{u_1}{1}=\frac{1}{2}$

أ- ليكن $n\geq 1$
$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{2n}u_n=\frac{u_n}{2n}=\frac{1}{2}\frac{u_n}{n}=\frac{1}{2}v_n$$
$$\Leftrightarrow v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$$

و عليه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_1=\frac{1}{2}$.

و بالتالي: $v_n=v_1q^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^n}$

ب- لدينا $v_n = \frac{u_n}{n}$ أي $u_n = nv_n$. و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n = \frac{n}{2^n}$

4.نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \ln x - x\ln 2$.

أ-نهاية الدالة f عند $+\infty$.

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \ln x - x\ln 2$$
$$= \lim_{x\mapsto+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - \ln 2\right) = -\infty$$

ب- نهاية المتتالية (u_n).

اعلم أن المتتالية (u_n) متقاربة و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم،

لدينا :
$$u_n = \frac{n}{2^n} = \frac{e^{\ln(n)}}{e^{n\ln(2)}} = e^{\ln(n)-n\ln 2} = e^{f(n)}$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{f(n)} = e^{\lim_{n\to+\infty} f(n)} = 0$$
اذن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

❑التمرين السابع عشر: المتتاليات لاعددية:

Bac Amérique du Sud Novembre 2013

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=xe^{1-x}$.

1.بين أنه من اجل كل x عدد حقيقي، $f(x)=e\times\frac{x}{e^x}$.

2. عين نهاية الدالة عند $-\infty$ و $+\infty$ عند ثم فسر النتيجة هندسيا.

3. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

II.من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم و نعتبر الدالتان g_n و h_n المعرفتان على:

$$g_n(x)=1+x+x^2+...+x^n \quad \text{و} \quad h_n(x)=1+2x+...+nx^{n-1}$$

1.بين انه من أجل كل عدد حقيقي x: $(1-x)g_n(x)=1-x^{n+1}$.

2.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1، $h_n(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

3.نضع $S_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$:

أ-احسب بدلالة n المجموع S_n ب-احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

الحل:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=xe^{1-x}$.

1.ليكن x عدد حقيقي $f(x)=xe^{1-x}=x\times e\times e^{-x}=ex\frac{1}{e^x}$

اذن بين أنه من اجل كل x عدد حقيقي، $f(x)=e\times\frac{x}{e^x}$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{1-x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e\times\frac{x}{e^x}=0$ اذن $y=0$ معادلة مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f عند $+\infty$.

3. اتجاه تغير الدالة f الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، $f'(x)=(1-x)e^{1-x}$.

من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{1-x}>0$ و بالتالي اشارة $f'(x)$ من اشارة $1-x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		+	0	-	

جدول تغيرات:

❑

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

II.1. ليكن x عدد حقيقي،

$$\begin{aligned}(1-x)g_n(x) &= g_n(x) - xg_n(x)\\ &= \left(1+x+x^2+\ldots+x^n\right) - x\left(1+x+x^2+\ldots+x^n\right)\\ &= \left(1+x+x^2+\ldots+x^n\right) - \left(x+x^2+\ldots+x^n+x^{n+1}\right)\\ &= 1-x^{n+1}\end{aligned}$$

اذن من أجل كل $x \neq 1$ ، $g_n(x) = \dfrac{\left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)}$.

2.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1،

نلاحظ أن أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1، $h_n(x) = g_n'(x)$ و عليه

و بالتالي:

$$\begin{aligned}g'_n(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x)+\left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2}\\ &= \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

3.نضع $S_n = f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$:

حساب بدلالة n المجموع S_n:

$$\begin{aligned}S_n &= f(1)+f(2)+\ldots+f(n) = \frac{1}{e^0}+\frac{2}{e^1}+\frac{3}{e^2}+\ldots+\frac{n}{e^{n-1}}\\ &= 1+2\left(\frac{1}{e}\right)^1+3\left(\frac{1}{e}\right)^2+\ldots+n\left(\frac{1}{e}\right)^n\\ &= h_n\left(\frac{1}{e}\right)\\ &= \frac{n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n+1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}\end{aligned}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = ne^{-n-1} = e^{-2}ne^{1-n} = e^{-2}f(n)$

و عليه $\lim_{n\to+\infty} e^{-2}f(n)=0 = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$.

و كذلك $f(n+1) = (n+1)e^{-n} = (n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^{n}$

و عليه نستنتج ان: $\left(\frac{e}{e-1}\right)^2 = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2} = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

❑التمرين الثامن عشر: الأعداد المركبة

Bac Etrangers

I.المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^4-6z^3+24z^2-18z^2+63=0.....(E)$

حل المعادلة (E) علما أنها تقبل حلين صرفين مترافقين.

II.نعتبر النقط C,B,A التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-i\sqrt{3}, z_B=-3+2i\sqrt{3}$ و $z_C=3+2i\sqrt{3}$.

1.عين الكتابة الأسية للعدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

2.عين زاوية الدوران r الذي مركزه A و يحول B الى C ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3.عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

4. أ-عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث: $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

ب-عين z_D لاحقة النقطة D صورة A بالتحويل T .

الحل:

I . لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^4-6z^3+24z^2-18z+63=0.....(E)$

حل المعادلة (E) علما أنها تقبل حلين صرفين مترافقين

لدينا\: $z^4-6z^3+24z^2-18+63=0.....(E)$.

نفرض أن: αi و $-\alpha i$ هما الحلان الصرفيان المترافقان مع $\alpha\in\mathbb{R}$.

و عليه لدينا من أجل كل عدد مركب z :

$$P(z)=(z-\alpha i)(z+\alpha i)(az^2+bz+c)$$
$$P(z)=(z^2+\alpha^2)(az^2+bz+c)$$
$$P(z)=az^4+bz^3+(\alpha^2a+c)z^2+\alpha^2bz+c\alpha^2$$

❑

بالمطابقة ينتج: $\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ \alpha^2 a + c = 24 \Rightarrow a=1, b=-6, \alpha^2=3, c=21 \\ \alpha^2 b = -18 \\ \alpha^2 c = 63 \end{cases}$ $\alpha^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{3} \\ \alpha = -\sqrt{3} \end{cases}$

اذن:

$$P(z) = \left(z^2+3\right)\left(z^2-6z+21\right)$$

$$P(z)=0 \Rightarrow \begin{cases} \left(z^2+3\right)=0 \Rightarrow z = i\sqrt{3}, z' = -i\sqrt{3} \\ \left(z^2-6z+21\right)=0 \Rightarrow z = 3-2i\sqrt{3}, z' = 3+2i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{-i\sqrt{3}, 3-2i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, 3+2i\sqrt{3}\right\}$$

II. نعتبر النقط C, B, A التي لواحقها على الترتيب: $z_B = -3+2i\sqrt{3}, z_A = -i\sqrt{3}$ و $z_C = 3+2i\sqrt{3}$.

1.عين الكتابة الأسية للعدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

$$z_C - z_A = 3+3i\sqrt{3} = 6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

و عليه

$$z_B - z_A = -3+3i\sqrt{3} = 6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}} = e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$$

2.تعين زاوية الدوران r الذي مركزه A و يحول B الى C ،

لدينا:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{6e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{6e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}} = e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$$

$$z_C - z_A = \left(z_B - z_A\right)e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$$

و هذا يعني: أن النقطة C هي صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

استنتاج طبيعة المثلث ABC:

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} == e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$ تعني: ان:

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow \left(AC = AB\right)$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\frac{-\pi}{3}\right) \Rightarrow \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right) = \left(\frac{-\pi}{3}\right)$$

و بهذا نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3.تعين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = i\sqrt{3}$$

4.أ-تعين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

لدينا: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ ومنه: $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MG}$ باستعمال علاقة شال نجد: $\overrightarrow{GM'} - \overrightarrow{GM} = 3\overrightarrow{MG}$

وبالتالي: $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$ نستنتج أن النقطة M' هي صورة نقطة M بالتحاكي الذي مركزه النقطة G و نسبته -2

من العلاقة: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ يكون لدينا:

أي:

$$\begin{aligned} z' - z &= (z_A - z) + (z_B - z) + (z_C - z) \\ z' &= -2z + (z_A + z_B + z_C) \\ z' &= -2z + 3z_G \end{aligned}$$

ب-تعين z_D لاحقة النقطة D صورة A بالتحويل T.

أي:

$$\begin{aligned} z_D &= -2z_A + 3z_G \\ z_D &= 5i\sqrt{3} \end{aligned}$$

❑التمرين التاسع عشر: دوال:

Bac France

لتكن الدالة f_k المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f_k(x)=\ln\left(e^x+kx\right)-x$ ، حيث k عدد حقيقي موجب تماما.

و (C_k) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الرسم: $\|\vec{i}\|=5cm,\|\vec{j}\|=10cm$

الجزء (أ): 1. الدالة f_1 معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي. $f_1(x)=\ln\left(e^x+x\right)-x$

احسب $f_1'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f_1 و استنتج اتجاه تغيرها.

2.بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f_1(x)=\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$. ثم استنتج نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$.

3.شكل جدول تغيرات الدالة f_1 .

الجزء (ب) : 1 .احسب $f_k'(x)$ من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f_k .

2. من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f_k(x)=\ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$ ثم استنتج نهاية الدالة f_k عند $+\infty$.

3.أ-شكل جدول تغيرات الدالة f_k ..

ب-بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f_k(x)\le\frac{k}{e}$.

4.عين معادلة المماس (T_k) للمنحنى (C_k) عند النقطة O.

5.ليكن p و m عددان حقيقيان موجبان تماما حيث $p<m$. أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_p) و (C_m).

6. ارسم المماسين (T_1)،(T_2) و المنحنيين (C_1) و (C_2) على الترتيب.

الحل:

الجزء (أ):

الدالة f_k المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f_k(x)=\ln\left(e^x+kx\right)-x$ ، حيث k عدد حقيقي موجب تماما.

الجزء (أ):

1.الدالة f_1 معرفة على $[0;+\infty[$ كمايلي. $f_1(x)=\ln\left(e^x+x\right)-x$

حساب $f_1'(x)$: الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ،

$$f'_1(x)=\frac{e^x+1}{e^x+x}-1=\frac{e^x+1-e^x+x}{e^x+x}=\frac{1-x}{e^x+x}$$

واستنتج اتجاه تغيرها:

❑

لدينا: $f'_1(x)=\frac{1-x}{e^x+x}$ ، بما أن: $x\geq 0$ فان اشارة $f'_1(x)$ من اشارة البسط أي: $1-x$

x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
$1-x$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

و بالتالي: f_1 متزايدة على المجال $]0;1[$ و متناقصة على المجال $]1;+\infty[$

2.بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $f_1(x)=\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$:

$$f_1(x)=\ln\left(e^x+x\right)-x=\ln\left(e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)=\ln\left(e^x\right)+\ln\left(\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)-x$$

$$=x+\ln\left(\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)-x=\ln\left(\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)$$

استنتاج نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{e^x}\right)=0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f_1(x)=0$$

3.شكل جدول تغيرات الدالة f_1 :

x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
$f'_1(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$f_1(x)$	0 $\nearrow$ $f_1(1)$ $\searrow$ 0

حيث: $f_1(0)=0,\ f_1(1)=\ln\left(e+1\right)-1$

<u>الجزء (ب):</u>

حساب $f_k'(x)$ من أجل كل x من $[0;+\infty[$:

الدالة f_k قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ،

$$f'_k(x)=\frac{e^x+k}{e^x+kx}-1=\frac{e^x+k-e^x+kx}{e^x+kx}=\frac{k(1-x)}{e^x+kx}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f_k :

لدينا: $x\geq 0$ و $k>0$ و بالتالي $f_k'(x)$ من نفس اشارة $1-x$. :

مما سبق نجد أن : f_k متزايدة على المجال $]0;1[$ و متناقصة على المجال $]1;+\infty[$

2. بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $f_k(x)=\ln\left(1+k\dfrac{x}{e^x}\right)$

$$f_k(x)=\ln\left(e^x+kx\right)-x=\ln\left(e^x\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)\right)=\ln\left(e^x\right)+\ln\left(\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)\right)-x$$

$$=x+\ln\left(\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)\right)-x=\ln\left(\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)\right)$$

استنتاج نهاية الدالة f_k عند $+\infty$.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(k\dfrac{x}{e^x}\right)=0, k>0\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=0$$

3.أ-شكل جدول تغيرات الدالة f_k .

x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
$f'_k(x)$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-$
$f_k(x)$	0 $\nearrow$ $f_k(1)$ $\searrow$ 0

حيث: $f_k(0)=0,\ f_k(1)=\ln\left(e+k\right)-1$

ب-اثبات أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f_k(x)\le\dfrac{k}{e}$:

من جدول التغيرات نلاحظ أن:

$$f_k(x)\le f_k(1)$$

$$f_k(1)=\ln\left(e+k\right)-1=\ln\left(e+k\right)-\ln e=\ln\left(\frac{e+k}{e}\right)$$

اذن: $f_k(x)\le\ln\left(\dfrac{e+k}{e}\right)$ ، نعلم أنه من أجل $x>0$ لدينا: $\ln(x)\le x$ و بالتالي:

أي:

$$f_k(x)\le\ln\left(\frac{e+k}{e}\right)\le\frac{k}{e}$$

$$f_k(x)\le\frac{k}{e}$$

4.تعين معادلة المماس (T_k) للمنحنى (C_k) عند النقطة O.

معادلة المماس (T_k):

$$(T_k): y=f_k'(0)\,x+f_k(0)$$

$$(T_k): y=kx$$

5.ليكن $0<p<m$.درسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_p) و (C_m).

❑

ندرس اشارة الفرق: $f_p(x)-f_m(x)$ ، نجد:

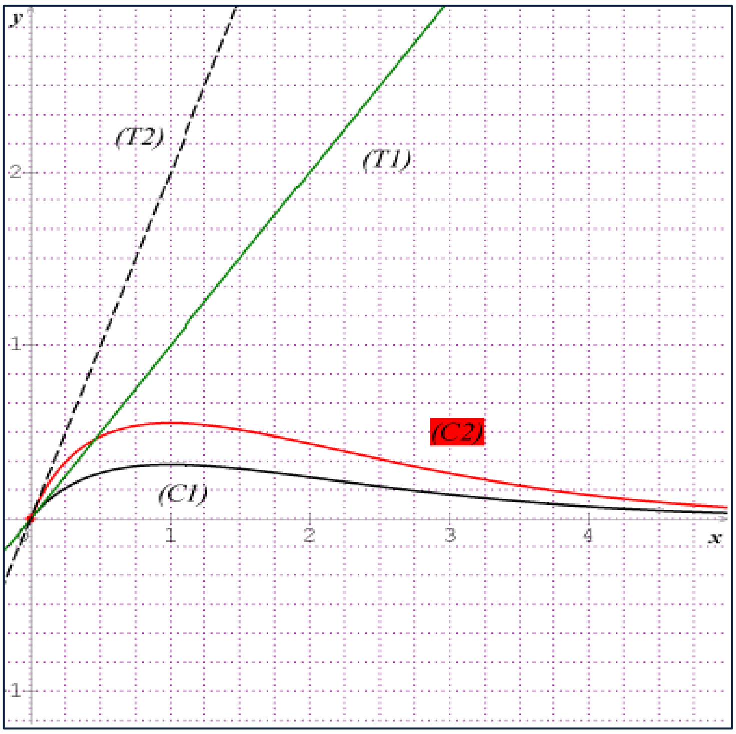
$$f_p(x)-f_m(x)=\ln\left(e^x+px\right)-x-\ln\left(e^x+mx\right)+x$$
$$=\ln\left(e^x+px\right)-\ln\left(e^x+mx\right)=\ln\left(\frac{e^x+px}{e^x+mx}\right)$$

بما أن: $0<p<m$ فان: $\begin{matrix} e^x+px>0 \\ e^x+mx>0 \end{matrix}$ نستنتج أن: $\begin{matrix} e^x+px<e^x+mx \\ \dfrac{e^x+px}{e^x+mx}<1 \Rightarrow \ln\left(\dfrac{e^x+px}{e^x+mx}\right)<0 \end{matrix}$

و بالتالي: $f_p(x)-f_m(x)<0$ اذن المنحنى $\left(C_p\right)$ يقع تحت $\left(C_m\right)$ من أجل $0<p<m$.

6. رسم المماسين $\left(T_1\right)$، $\left(T_2\right)$ و المنحنيين $\left(C_1\right)$ و $\left(C_2\right)$ على الترتيب.

$$\left(T_1\right): y=x$$
$$\left(T_2\right): y=2x$$



التمرين العشرون: الأعداد المركبة

Bac Maroc

I- نعتبر العدد المركب $Z=2+\sqrt{3}+i$.

1.بين أن طويلة Z هي $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

2.تحقق من أن : $Z=2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]+2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

3.أ-باستعمال قوانين موافرين بين أن : $1+\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)$.

ب-بين ان: $Z=4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (نذكر أن : $\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$) ثم أكتب العدد المركب Z على شكله المثلثي.

ج-بين أن: $Z^6=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 i$.

II- نعتبر في المستوى المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين Ω و P اللتين لاحقتهما $\omega=\sqrt{3}$ و Z على الترتيب ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 2.

1.بين أن d لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4+\sqrt{3})+2i$.

2.حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z-4-\sqrt{3}-2i|=|Z|$.

الحل:

I- نعتبر العدد المركب $Z=2+\sqrt{3}+i$.

1.بين أن طويلة Z هي $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

$$|Z|=|2+\sqrt{3}+i|=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

2.التحقق من أن : $Z=2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]+2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$$Z=2+\sqrt{3}+i=2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i.2\frac{1}{2}=2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

3.أ- اثبات أن : $1+\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)$.

نعلم أن:

$$\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

و منه:

$$\cos^2(\theta)=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2=\frac{e^{2i\theta}+2e^{2i\theta}.e^{-2i\theta}+e^{-2i\theta}}{4}=\frac{e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\left[\cos(2\theta)+1\right]$$

$$\Rightarrow 1+\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)$$

ب-اثبات ان: $Z=4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

(نذكر أن : $\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$)

لدينا:

$$Z=2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right)\right)+2i\sin\left(\frac{2\pi}{12}\right)$$

$$=2\times 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+i2\times 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

كتابة العدد المركب Z على شكله المثلثي: بما أن:

$$4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)>0\Rightarrow |Z|=4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$Z=4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

ج-اثبات أن: $Z^6=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 i$.

و منه حسب موافر:
$$Z^6=\left(|Z|\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]\right)^6$$
$$=|Z|^6\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]^6$$
$$=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6\left[\cos\left(\frac{6\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{12}\right)\right]$$
$$=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$Z^6=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 i$$

II- نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين Ω و P اللتين لاحقتهما

$\omega=\sqrt{3}$ و Z على الترتيب ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 2.

1.البرهان على أن d لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4+\sqrt{3})+2i$.

أي:
$$d-\omega=2(p-\omega)$$
$$d=2p-\omega$$
$$d=\left(4+\sqrt{3}\right)+2i$$
اذن : لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4+\sqrt{3})+2i$.

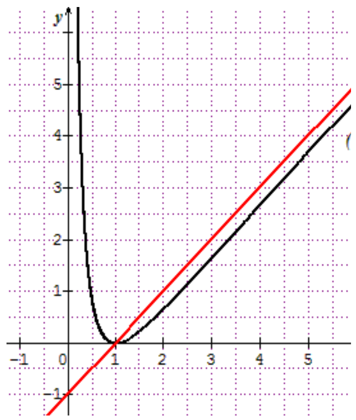
2.تعين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $\left|z-4-\sqrt{3}-2i\right|=|Z|$.

$\left|z-4-\sqrt{3}-2i\right|=|Z|$ تكافئ : $|z-d|=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

اذن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي دائرة مركزها النقطة D و نصف قطرها $4\left(2+\sqrt{3}\right)$.

التمرين الواحد و العشرون: الدالة اللوغاريتمية

f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=ax-1-\dfrac{b\ln x}{x}$ ، حيث b,a عددان حقيقيان و ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (أنظر الشكل).



الجزء الأول: بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية:

1.عين $f(1)$ و $f'(1)$.

2.عين نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم على يمين العدد0.

3.عين حسب قيم x اشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

الجزء الثاني:

1.أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$.

2.أثبت أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له ثم أدرس وضعيته بالنسبة الى (C).

3.أ-ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda\geq 1$.

احسب $A(\lambda)$ مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلتهما $x=1$ و $x=\lambda$.

ب-عين قيم العدد الحقيقي λ حتى تكون $A(\lambda)>\dfrac{1}{2}$.

الجزء الثالث: نعتبر F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-\dfrac{1}{2}$.وليكن (C_F) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

بدون حساب عبارة $F(x)$ أجب عما يلي:

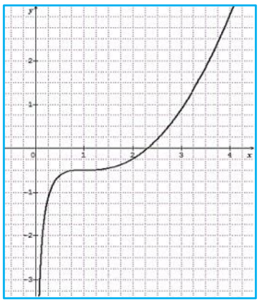
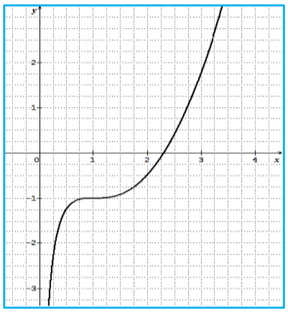
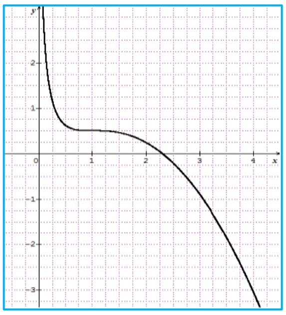
1.حدد اتجاه تغير الدالة F .

2.يبين أن (C_F) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

3.أ-بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (C_F) في النقطة ذات الفاصلة1 هي: $y=\dfrac{-1}{2}$.

ب-استنتج وضعية (C_F) بالنسبة الى المماس (T).

4.من بين المنحنيات الثلاثة التالية عين المنحنى (C_F) مع التبرير.


(1)

(2)

(3)

الحل:

I. بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية:

1.تعين $f(1)$ و $f'(1)$: لدينا: $f(1)=0$ و $f'(1)=0$ (لأن المماس عند النقة ذات الفاصلة 1 موازي لمحور الفواصل)

2. نهاية الدالة f :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

3.تعين حسب قيم x اشارة $f'(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

II. 1..أثبات أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$.

لدينا: $f(1)=0$ و $f'(1)=0$

$$f(1)=0 \Rightarrow a-1-\frac{b\ln 1}{1}=0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow a-\frac{b-b\ln x}{x^2}=0 \Rightarrow b=1$$

و بالتالي: $a=b=1$ اذن: $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$.

2.أثبات أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty} x-1-\frac{\ln x}{x}-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{\ln x}{x}=0$$

❑

اذن: $y=x-1$ معادلة مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C).

دراسة الوضعية بالنسبة الى (C):

ندرس اشار الفرق: $f(x)-y$ نجد: $f(x)-y=\dfrac{-\ln x}{x}$

نعلم أن: $x>0$ و بالتالي حسب اشارة $-\ln x$ أي:

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	+	0	--

اذن:

من أجل $0<x<1$ المنحنى (C) فوق المستقيم (Δ).

من اجل $x>1$ المنحنى (C) تحت المستقيم (Δ).

لما $x=1$ المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $A(1;0)$.

3.أ-ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda\geq 1$.

احسب $A(\lambda)$ مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلتهما $x=1$ و $x=\lambda$.

على المجال $[1;\lambda]$ المنحنى (C) تحت المستقيم (Δ) و بالتالي:

$$A(\lambda)=\int_1^{\lambda} y-f(x)dx=\int_1^{\lambda} x-1-x+1+\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^{\lambda}\frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{\lambda}=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2\,u.a$$

نذكر أن: $(u^2)'=2.u'.u\Rightarrow\int u'.u=\dfrac{u}{2}+c$

ب-تعين قيم العدد الحقيقي λ حتى تكون $A(\lambda)>\dfrac{1}{2}$.

معناه: $\dfrac{1}{2}(\ln\lambda)^2>\dfrac{1}{2}$ و بالتالي: $(\ln\lambda)^2>1\Rightarrow(\ln\lambda)^2-1>0\Leftrightarrow(\ln\lambda-1)(\ln\lambda+1)>0$ ومنه: $\lambda\in\,]e;+\infty[$

III. 1.تحدد اتجاه تغير الدالة F.

لدينا: $F'(x)=f(x)$ من جدول التغيرات لدينا : $f(x)\geq 0$ أي: $F'(x)\geq 0$ و منه الدالة F متزايدة على $]0;+\infty[$.

2. تبيان أن (C_F) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

نعلم أن: $F''(x)=f'(x)$ أي: اشارة $F''(x)$ من اشارة $f'(x)$ التي تنعدم عند 1 و تغير اشارتها.

اذن (C_F) يقبل نقطة انعطاف $B(1;F(1))$ أي: $B\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$

3.أ-معادلة المماس (T) للمنحنى (C_F) في النقطة ذات الفاصلة1.

$$(T): y = F'(1)(x-1)+F(1)$$
$$(T): y = f(1)(x-1)+F(1)$$
$$(T): y = -\frac{1}{2}$$

ب-استنتاج وضعية (C_F) بالنسبة الى المماس (T).

على المجال $]0;1[$ المنحنى (C_F) يقع تحت المماس (T)

على المجال $]1;+\infty[$ المنحنى (C_F) يقع تحت المماس (T)

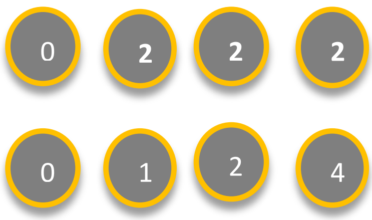
المنحنى (C_F) يقطع المماس (T) في النقطة $B\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

4. المنحنى الممثل للدالة F هو الشكل الأول (1) لأنه يحقق : $F(1) = -\frac{1}{2}$ و الدالة متزايدة و المنحى (C_F) يقبل نقطة انعطاف $B(1;F(1))$.

التمرين الثاني و العشرون: الاحتمالات

يحتوي صندوق على ثماني(08) كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس و تحمل كل واحدة منها عددا كما هو موضح في الشكل المقابل:

نسحب عشوائيا و في أن واحد ثلاث كرات من الصندوق.



1.نعتبر الحدث A: "من بين الكرات الثلاثة المسحوبة لا توجد أي كرة تحمل العدد 0".

الحدث B: "جداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة يساوي 8".

بين أن: $P(A) = \frac{5}{14}$ و أن: $P(B) = \frac{1}{7}$.

2.ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة.

أ-بين أن: $P(X=16) = \frac{3}{28}$.

ب-الجدول المرفق أسفله يتعلق بقانون الاحتمال المتغير العشوائي .

أتمم الجدول معللا اجابتك.

x_i	0	4	8	16
$P(X=x_i)$	....	....	....	$\frac{3}{28}$

الحل:

نسحب عشوائيا و في أن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

عدد الامكانيات الممكنة هو: $card\Omega = C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$.

1. نعتبر الحدث A: "من بين الكرات الثلاثة المسحوبة لا توجد أي كرة تحمل العدد 0".

عدد الكرات ماعدا التي تحمل الرقم 0 هي 6 اذن: $cardA = C_6^3$.

منه: $P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$.

الحدث B: "جداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة يساوي 8".

يعني اما ثلاث كرات تحمل الرقم2 أو كرة تحمل 2 وكرة 4 و كرة1.

اذن:

$$cardB = C_4^1 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1 = 4$$

$$P(B) = \frac{\text{cardB}}{card\Omega} = \frac{4}{56} = \frac{1}{7}$$

2.ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة.

أ-تبيان أن: $P(X = 16) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$.

ب-الجدول المرفق أسفله يتعلق بقانون الاحتمال المتغير العشوائي .

اتمام الجدول :

x_i	0	4	8	16
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$

Bac Mauritanie-2012

I.لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^{-2x-1}+3x-1$. (C_f) و تمثيلها البياني في معلم متعامد ز متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(3x-1)\right]$ ، فسر النتيجة هندسيا.

2.أدرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدو تغيراتها.

3.بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1{,}3<\alpha<-1{,}2$ و $0{,}2<\beta<0{,}3$.

4.أرسم المنحنى (C_f).

II.نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $u_n=e^{-2n-1}$ و $v_n=3n-1$.

1.بين أن المتتالية (u_n) هندسية و أن المتتالية (v_n) حسابية.

2.أدرس اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n).

3.المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟ علل اجابتك.

4. احسب المجموع S_n بدلالة n بحيث : $S_n=f(0)+f(1)+...+f(n)$

ب-احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n^2}$.

ترجمة: بخاخشة خالد

الحل:

I.لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^{-2x-1}+3x-1$. (C_f) و تمثيلها البياني في معلم متعامد ز متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ-حساب

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-2x-1}+3x-1=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-2x-1}+3x-1=\lim_{x\to-\infty} e^{-2x-1}\left(1+\frac{3x}{e^{-2x-1}}-\frac{1}{e^{-2x-1}}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty} e^{-2x-1}\left(1+3xe^{2x+1}-e^{2x+1}\right)$$
$$==\lim_{x\to-\infty} e^{-2x-1}=+\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3xe^{2x+1}\right)=0$.

و منه

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-2x-1}+3x-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-2x-1}}{x}+\frac{3x}{x}+\frac{1}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{2x+1}}+3+\frac{1}{x}$$
$$=-\infty$$
.

❑

ب-لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(3x-1)\right]&=\lim_{x\to+\infty}\left[e^{-2x-1}+3x-1-(3x-1)\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}e^{-2x-1}\\&=0\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(3x-1)\right]=0$$

التفسير: نقول أن المستقيم ذا المعادلة $y=3x-1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$.

2. اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f'(x)=-2e^{-2x-1}+3$

و منه $f'(x)=0$ تكافئ

$$-2e^{-2x-1}+3=0\Leftrightarrow e^{-2x-1}=\frac{3}{2}$$

نستنتج أن :

$$-2x-1=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$x=-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)$	$+\infty$
$-2e^{-2x-1}+3$	-	0	+

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا:

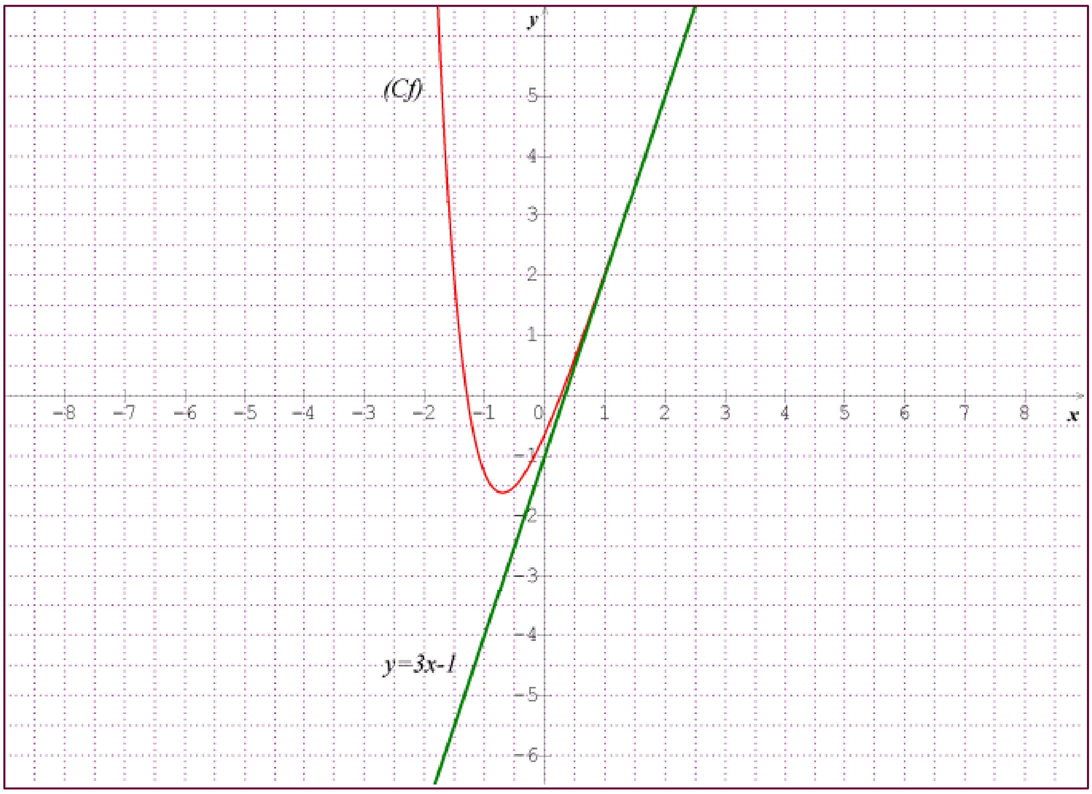
$$f(x)=e^{-2x-1}+3x-1$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right)=e^{-2\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right)-1}+3\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right)-1$$
$$=\frac{3}{2}+3\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right)-1$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)-1$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)$$
$$\simeq -1,6$$

3. الدالة f مستمرة و رتيبة على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right)\right[$ و $f(-1,3)\times f(-1,2)<0$

و لدينا كذالك الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1\right);+\infty\right[$ ولدينا: $f(0,2)\times f(0,3)<0$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1,3<\alpha<-1,2$ $0,2<\beta<0,3$.

4.رسم المنحنى (C_f):



II.نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $u_n=e^{-2n-1}$ و $v_n=3n-1$.

.1

لدينا: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e^{-2(n+1)-1}}{e^{-2n-1}}=e^{-2(n+1)-1+2n+1}=e^{-2}$

و منه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q=e^{-2}$ و حدها الأول $u_0=e^{-1}$.

و لدينا: $v_{n+1}-v_n=3(n+1)-1-3n+1=3$ و منه نجد أن المتتالية (v_n) حسابية

أساسها $r=3$ و حدها الأول $v_0=-1$.

2. اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n).

بما أن $r=3>0$ فان المتتالية (v_n) متتالية متزايدة .

بما أن الأساس $-1<e^{-2}<1$ و الحد الأول $e^{-1}>0$ فان (u_n) متتالية متزايدة .

3.لدينا: (v_n) متتالية متزايدة و (u_n) متتالية متزايدة

ومن جهة أخرى لدينا:
$$\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n=\lim_{n\to+\infty} 3n-1-e^{-2n-1}=+\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} v_n-u_n=+\infty$$

اذن المتتاليتين (u_n) و (v_n) ليس بمتتاليتين متجاورتان .

4. حساب المجموع S_n بدلالة n:

بحيث : $S_n=f(0)+f(1)+...+f(n)$ يكفي ان نلاحظ أن $f(n)=u_n+v_n$

و بالتالي:
$$\begin{aligned}S_n&=f(0)+f(1)+...+f(n)\\&=u_0+u_1+...+u_n+v_0+v_1+...+v_n\\&=e^{-1}\left(\frac{1-e^{-2(n+1)}}{1-e^{-2}}\right)+(n+1)\left(\frac{-1-1+3n}{2}\right)\\&=\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}\right)\left(1-e^{-2(n+1)}\right)+(n+1)\left(\frac{-2+3n}{2}\right)\end{aligned}$$

ب-احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$ $\quad \lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}\right)\left(1-e^{-2(n+1)}\right)+(n+1)\left(\frac{-2+3n}{2}\right)=+\infty$

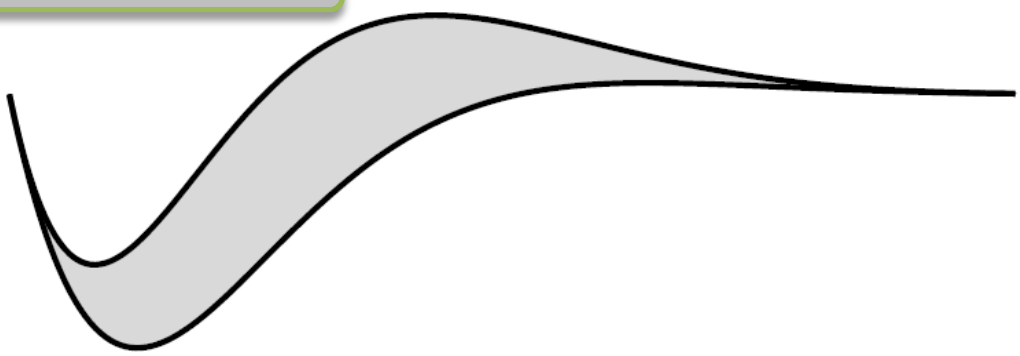
حساب $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}$.

اذن:
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}\right)\left(1-e^{-2(n+1)}\right)+(n+1)\left(\frac{-2+3n}{2}\right)}{n^2}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}\right)\left(1-e^{-2(n+1)}\right)}{n^2}+\frac{(n+1)\left(\frac{-2+3n}{2}\right)}{n^2}\end{aligned}$$
$$\begin{cases}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{-1}}{1-e^{-2}}\right)\frac{\left(1-e^{-2(n+1)}\right)}{n^2}=0\\ \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{-2+3n}{2}\right)}{n^2}=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{3}{2}$$

❑

Bac Antilles – Guyane -2018

I.شركة اعلانات تريد طباعة الشعار المرسوم بالأسفل على أقمصة عملائها:



الشعار المرفق مشكل من تمثيلين بيانيين (C_f) و (C_g) في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (و حدة الرسم $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$) لدالتين f و g معرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x)=e^{-x}(-\cos x+\sin x+1)$ و $g(x)=-e^{-x}\cos x$.

1.بين أن من اجل كل x من $\mathbb{R}$، $-e^{-x}\leq f(x)\leq 3e^{-x}$

2.استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3.تحقق أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=e^{-x}(2\cos x-1)$ (f' الدالة المشتقة للدالة f).

4.أ-عين اشارة $f'(x)$ على المجال $[-\pi;\pi]$.

ب-استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-\pi;\pi]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

5.أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g).

II.لتكن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $H(x)=\left(-\frac{\cos x}{2}-\frac{\sin x}{2}-1\right)e^{-x}$

1. بين أن الدالة H دالة أصلية للدالة $x\mapsto(\sin x+1)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

2.أحسب مساحة (مساحة الشعار) الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) (C_g) و المستقيمات التي معادلاتها:

$x=\frac{-\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$.

الحل:

لدينا: $f(x)=e^{-x}(-\cos x+\sin x+1)$ و $g(x)=-e^{-x}\cos x$.

1. من اجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1\leq\cos x\leq1$ و $-1\leq\sin x\leq1$ و منه:

$$-\cos x+\sin x+1\geq -1-1+1$$
$$-\cos x+\sin x+1\geq -1$$
$$\Leftrightarrow e^{-x}\left(-\cos x+\sin x+1\right)\geq -e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow -e^{-x}\leq e^{-x}\left(-\cos x+\sin x+1\right)........(1)$$

و عليه:

$$-\cos x+\sin x+1\leq 1+1+1$$
$$-\cos x+\sin x+1\leq 3$$
$$\Leftrightarrow e^{-x}\left(-\cos x+\sin x+1\right)\leq 3e^{-x}..........(2)$$

من (1) و (2) نجد أن من اجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-e^{-x}\leq f(x)\leq 3e^{-x}$

2.استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}-e^{-x}\leq \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\leq \lim\limits_{x\to+\infty} 3e^{-x}\\ 0\leq \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$ حسب خاصية حصر نهاية.

3. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=-e^{-x}\left(-\cos x+\sin x+1\right)+e^{-x}\left(\sin x+\cos x\right)$$
$$=e^{-x}\left(\cos x-\sin x-1+\sin x+\cos x\right)$$

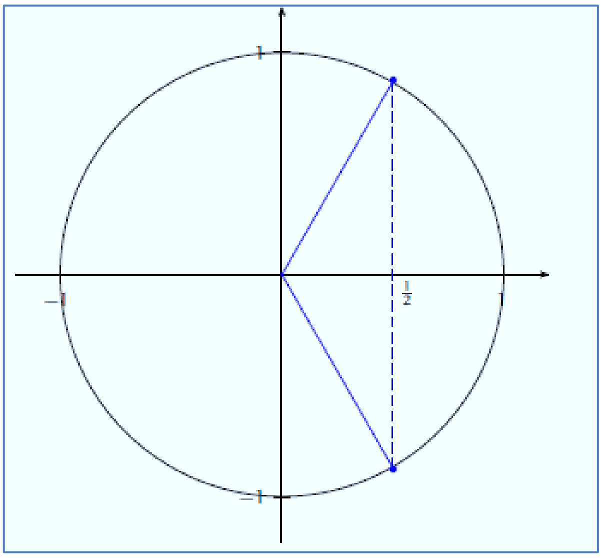
و بالتالي: من اجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=e^{-x}\left(2\cos x-1\right)$.

4.أ-تعين اشارة $f'(x)$ على المجال $\left[-\pi;\pi\right]$.

لدينا من اجل كل x من $\left[-\pi;\pi\right]$ $e^{-x}>0$ و بالتالي: اشارة $f'(x)$ من اشارة $2\cos x-1$

و عليه $$2\cos x-1=0\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}\\ x=-\frac{\pi}{3}\end{cases}$$.

نستعين بالدائرة المثلثية و نجد:



$f'(x)<0$ على المجال $\left[-\pi;-\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3};\pi\right]$ و $f'(x)>0$ على المجال $\left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[$.

ب- اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-\pi;\pi]$:

الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[$ و متناقصة على $\left[-\pi;-\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3};\pi\right]$

جدول تغيرات f :

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$2e^{\pi}$	$\searrow$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{3}}$	$\nearrow$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{3}}$	$\searrow$	$2e^{-\pi}$

5. الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g):

نقوم بدراسة اشارة فرق العبارة: $f(x)-y$ نجد:

$$f(x)-g(x)=e^{-x}\left(-\cos x+\sin x+1+\cos x\right)$$
$$=e^{-x}\left(\sin x+1\right)$$

و عليه
$$f(x)-g(x)=0\Rightarrow e^{-x}\left(\sin x+1\right)=0$$
$$\Rightarrow \sin x+1=0$$
$$\Rightarrow \sin x=-1$$
$$\Rightarrow x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$$

و بالتالي من أجل $x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$ المنحنيين $\left(C_f\right)$ و $\left(C_g\right)$ يتقاطعان في النقطة $A\left(\frac{-\pi}{2}+2k\pi;0\right)$ لأن $g\left(\frac{-\pi}{2}+2k\pi\right)=0$.

من أجل $x\neq\frac{-\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$ المنحنى $\left(C_f\right)$ يقع فوق $\left(C_g\right)$.

II.لتكن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $H(x)=\left(-\frac{\cos x}{2}-\frac{\sin x}{2}-1\right)e^{-x}$

1. الدالة H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$H'(x)=\left(\frac{\sin x}{2}-\frac{\cos x}{2}\right)e^{-x}-\left(-\frac{\cos x}{2}-\frac{\sin x}{2}-1\right)e^{-x}$$

أي:
$$=\left(\frac{\sin x}{2}-\frac{\cos x}{2}+\frac{\cos x}{2}+\frac{\sin x}{2}+1\right)e^{-x}$$
$$=\left(\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin x}{2}+1\right)e^{-x}$$
$$=\left(\sin x+1\right)e^{-x}$$

و بالتالي: الدالة H دالة أصلية للدالة $x\mapsto\left(\sin x+1\right)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

2.حساب مساحة الحيز(الشعار) :

لدينا على المجال $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ المنحنى $\left(C_f\right)$ يقع فوق $\left(C_g\right)$ و بالتالي:

$$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\sin x+1)e^{-x}dx\left(4cm^2\right)=\left[H(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\times 4cm^2$$

و عليه:

$$=\left(H\left(\frac{3\pi}{2}\right)-H\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\times 4cm^2$$

$$=\left(\left(\frac{1}{2}-1\right)e^{-\frac{3\pi}{2}}-\left(\frac{1}{2}-1\right)e^{\frac{\pi}{2}}\right)\times 4cm^2$$

$$=2\left(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)cm^2$$

اذن مساحة الشعار هي: $A=2\left(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)cm^2$ أي ما يقارب $9,6cm^2$.

Bac Liban juin 1999

نعتبر العدد الطبيعي غير معدوم n و نضع: $a=4n+3$ و $b=5n+2$ و $d=pgcd(a;b)$.

1. أتمم الجدول المقابل:

n	a	b	d
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			

ماذا يمكن الاستنتاج بالنسبة للعدد d.

2. احسب $5a-4b$ ثم استنتج القيم الممكنة للعدد d.

3. نعتبر المعادلة: $7k-4n=3......(E)$ حيث n و k عددان طبيعيان غير معدومين.

أ- عين حلا خاصا للمعادلة (E) ثم عين جميع الثنائيات حلول المعادلة (E).

ب- استنتج جميع الثنائيات الطبيعية $(n;k)$ حلول المعادلة (E) بحيث $4n+3=7k$.

4. عين جميع الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $5n+2$ يقبل القسمة على 7.

5. ليكن r باقي القسمة الاقليدية للعدد n على 7. استنتج من الأسئلة السابقة قيمة العدد r بحيث يكون $d=7$.

من أجل أي قيمة للعدد r يكون $d=1$.

الحل:

1. أتمم الجدول المقابل:

n	a	b	d
8	35	42	7
9	39	47	1
10	43	52	1
11	47	57	1
12	51	62	1
13	55	67	1
14	59	72	1
15	63	77	7
16	67	82	1
17	71	87	1

و بالتالي: اذا كان $n\equiv 1[7]$ فان $d=7$

2. حساب $5a-4b$:

$$5a-4b=20n+15-20n-8=7$$
$$5a-4b=7$$

و عليه d يقسم a و b و d بالتالي يقسم $5a$ و $4b$

و عليه d يقسم $5a-4b$ و بالتالي d يقسم 7.

و عليه نستنتج القيم الممكنة للعدد d هي 1 أو 7.

3. المعادلة: $7k-4n=3......(E)$ حيث n و k عددان طبيعيان غير معدومين.

أ-تعين حلا خاصا للمعادلة (E):

نلاحظ أن $(1;1)$ حل خاص للمعادلة (E).

و بالتالي: $\left|\begin{array}{l}7k-4n=3\\7(1)-4(1)=3\end{array}\right. \Rightarrow 7(k-1)-4(n-1)=0$

$7(k-1)=4(n-1)$

هذا يعني أن 4 يقسم $7(k-1)$ و بما أن 4 لا يقسم 7 فحسب مبرهنة غوص فان العدد 4 يقسم $k-1$

أي $k-1=4p$ و بنفس الكيفية نجد $n-1=7p$. و عليه مجموعة الحلول $(n;k)$ هي $\begin{cases}n=1+7p\\k=1+4p\end{cases};p\in\mathbb{N}$

ب- استنتج جميع الثنائيات الطبيعية $(n;k)$ حلول المعادلة (E) بحيث $4n+3=7k$ أي أن: $7k-4n=3$ و منه

$(k=1+4p\geq 0$ و $n=1+7p\geq 0)$ معناه $(1+7p;1+4p)$ حيث $p\geq 0$.

4.تعين جميع الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $5n+2$ يقبل القسمة على 7.

$5n+2$ يقبل القسمة على 7 معناه $5n+2\equiv 0[7]$.

$n=$	0	1	2	3	4	5	6
$5n+2\equiv$	2	0	5	3	1	6	4

من الجدول نستنتج أن $5n+2$ يقبل القسمة على 7.اذا كان $n\equiv 1[7]$ أي $n=7m+1$ حيث $m\in\mathbb{N}$.

5. لدينا $n\equiv r[7]$ و مما سبق لدينا $4n+3=7k$ من أجل $n\equiv 1[7]$.

و أيضا يكون $5n+2=7k$ من أجل $n\equiv 1[7]$.

و عليه من أجل $n\equiv 1[7]$ فان العددين a و b يقبلان القسمة على 7 و منه $d=1$

من أجل كل القيم الأخرى للعدد r العددان a و b لا يقبلان القسمة على 7 و بالتالي $d=1$.

❑التمرين السادس و العشرون: متتاليات عددية

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم كما يلي: $u_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Bac Maroc juin 1977

1.احسب $u_{n+1}-u_n$ ثم استنتج ان (u_n) متتالية متناقصة.

2.نضع: $v_n=u_1+u_2+...+u_n$

أ-احسب v_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

ب-المتتالية (v_n) متقاربة؟

3.نضع : $w_n=u_n+u_{n+1}+...+u_{2n}$

أ-احسب w_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ ب-المتتالية (w_n) متقاربة؟

❑

الحل:

1. حساب $u_{n+1}-u_n$

لدينا: $u_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

$$u_{n+1}-u_n=\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)=\ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)$$

بما أن: $\ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)<0 \Leftrightarrow \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}<1$ و منه: $u_{n+1}-u_n<0$

و عليه (u_n) متتالية متناقصة.

2. أ-حساب v_n بدلالة n:

$$v_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$$
$$=\ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\ldots\times\frac{n}{n-1}\times\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\ln(n+1)$$

اذن: $v_n=\ln(n+1)$ و لدينا: $\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$.

ب-بما أن $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ فان المتتالية (v_n) متباعدة.

3.أ-حساب w_n بدلالة n:

$$w_n=u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{2n}$$
$$=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\ldots\times\frac{2n}{2n-1}\times\frac{2n+1}{2n}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

منه $w_n=\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$

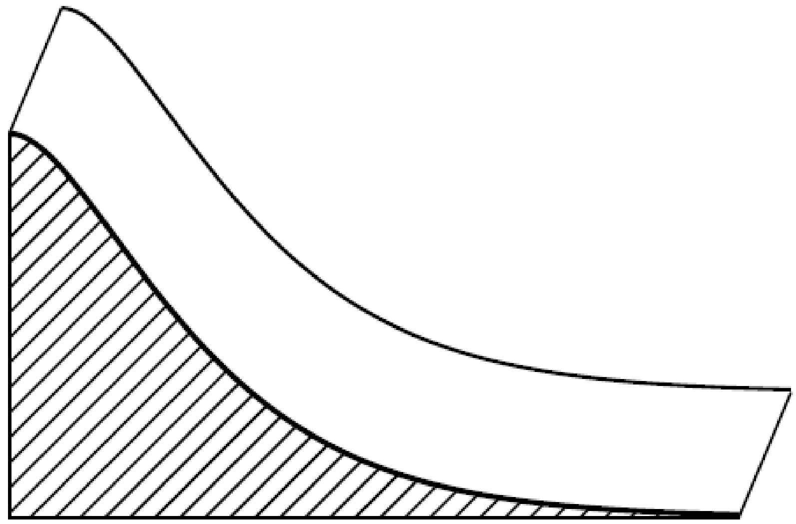
ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} w_n=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)=\ln(2)$

ب-لدينا $\lim_{n\to+\infty} w_n=\ln(2)$ و عليه المتتالية (w_n) متقاربة.

❑

I.مدير حديقة عمومية يريد أن يشيد (toboggan) للتزحلق فقامت شركة الدراسات بالتصميم المقابل:

Bac Polynésie juin 2015



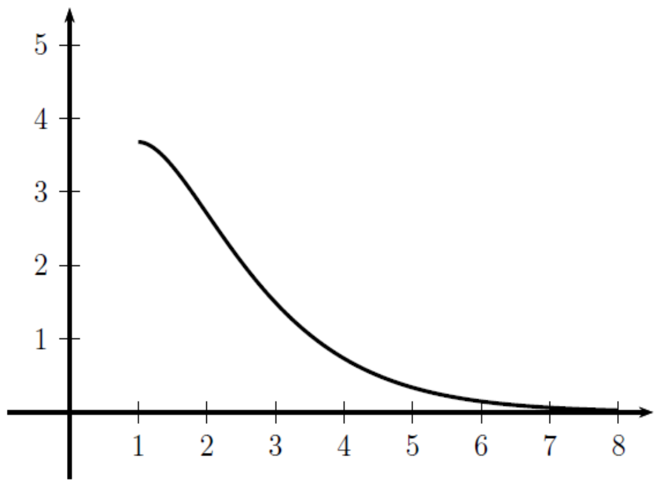
تصميم (toboggan) ينمذجه المنحنى (C)(أنظر أسفله)منحنى الدالة f المعرفة على المجال $[1;8]$ كما يلي: $f(x)=(ax+b)e^{-x}$
حيث a و b عددان طبيعيان .

1.علما أن مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 موازي لمحور الفواصل، عين قيمة العدد b.

2. علما أن ارتفاع (toboggan) يتراوح بين 3.5 م الى 4 م،

عين قيمة العدد a.

II.لتكن الدالة f المعرفة على $[1;8]$ كما يلي : $f(x)=10xe^{-x}$.



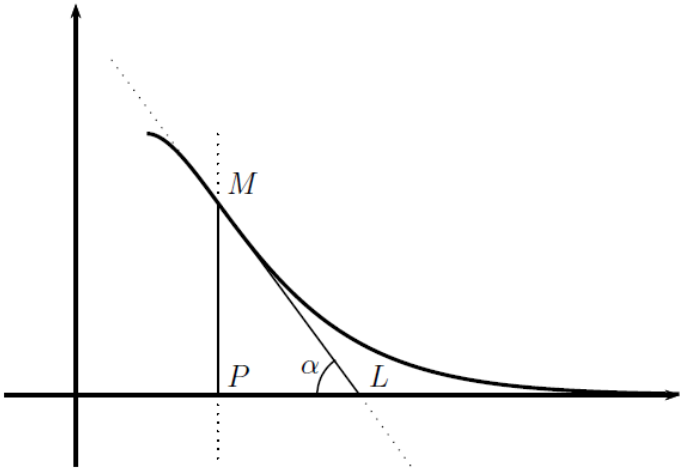
يريد المقاول طلاء الحائط الذي يسند (toboggan) الممثل في الشكل بالمساحة المشطبة حيث كلفة الطلاء هي 300دج مع 50دج للمتر المربع الواحد.

1.نعتبر الدالة g المعرفة على $[1;8]$ كما يلي:
$g(x)=10(-x-1)e^{-x}$ ، احسب $g'(x)$.

2.ما هي التكلفة الاجمالية لطلاء حائط (toboggan).

III.لأسباب احترازية لسلامة الزوار وضع ميل أعظمي للتزحلق على (toboggan).

نعتبر M نقطة من المنحنى (C) ذات فاصلة تختلف عن 1، و نسمي الزاوية الحادة α (نفرض أن $\alpha<55^\circ$ من أجل السلامة)كما هو موضح في الشكل :



1.أدرس اتجاه تغير الدالة f' على $[1;8]$.

2.ليكن x عدد حقيقي من المجال $[1;8]$ و M نقطة من المنحنى (C).بين أن: $\tan(\alpha)=|f'(x)|$.

3.في هذه الحالة هل سيكون التزحلق على (toboggan) مريح و آمن؟

الحل:

1. لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $[1;8]$، $f'(x)=ae^{-x}+(ax+b)-e^{-x}=(-ax+a-b)e^{-x}$.

و عليه $f'(1)=0 \Leftrightarrow b=0$

2. من أجل كل x من $[1;8]$ لدينا $f(x)=axe^{-x}$.

وعلما أن ارتفاع (toboggan) يتراوح بين 3.5 م الى 4 م أي:

$$3,5\le f(1)\le 4$$
$$3,5\le ae^{-1}\le 4 \Leftrightarrow 3,5\le \frac{a}{e}\le 4$$
$$9,5\le a\le 10,8$$

و بما أن a عدد طبيعي فان $a=10$.

1.نعتبر الدالة g المعرفة على $[1;8]$كما يلي: $g(x)=10(-x-1)e^{-x}$ ،

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على $[1;8]$ و منه

$$\begin{aligned} g'(x)&=10xe^{-x}\\ &=f(x)\end{aligned}$$

2. التكلفة الاجمالية لطلاء حائط (toboggan):

نحسب مساحة الحائط التي تمثل مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x=1$ و $x=8$.

بما أن $f(x)>0$ على $[1;8]$ و لدينا $g'(x)=f(x)$ من أجل كل x من $[1;8]$،

❑

$A=\int_1^8 f(x)dx=[g(x)]_1^8=g(8)-g(1)=\left(20e^{-1}-90e^{-8}\right)cm^2$.

بما أن كلفة الطلاء هي 300دج مع 50دج للمتر المربع الواحد فان: $300+50\left(20e^{-1}-90e^{-8}\right)da\approx 670da$

لدينا الدالة $f\,'$ قابلة للاشتقاق على $[1;8]$ ، $f\,''(x)=10(x-2)e^{-x}$

من أجل كل x من $[1;8]$ ، $10e^{-x}>0$ و بالتالي اشارة $f\,''(x)$ من اشارة $x-2$.

x	1		2		8
$f\,''(x)$		-	0	+	
$f\,'(x)$	0	↘	$-10e^{-2}$	↗	$-70e^{-8}$

$f\,'(x)$ هو معامل توجيه مماس المنحنى (C) عند النقطة M و بالتالي هذا المماس هو المستقيم (ML).

و عليه $|f\,'(x)|$ هو معامل توجيه المستقيم (ML).

و لدينا المثلث MPL قائم في P و منه $\tan(\alpha)=\dfrac{PM}{PL}$. اذن $\tan(\alpha)=|f\,'(x)|$.

3. من أجل كل x من $[1;8]$ ، $1-x\le 0$ و $10(1-x)e^{-x}\le 0$ يعني أن $f\,'(x)\le 0$.

يستلزم أن $|f\,'(x)|=-f\,'(x)$.

x	1		2		8
$\lvert f\,'(x)\rvert$	0	↗	$10e^{-2}$	↘	$70e^{-8}$

و بالتالي $|f\,'(x)|$ تبلغ قيمتها الأعظمية عند $10e^{-2}$ من أجل $x=2$ أي $\tan(\alpha)=10e^{-2}$ يعني أن $\alpha\simeq 53,5^\circ$

في هذه الحالة بما أن $\alpha\simeq 53,5^\circ<55^\circ$ فان التزحلق على (toboggan) سيكون مريح و آمن.

التمرين الثامن و العشرون: أعداد مركبة

Bac Maroc

نعتبر المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.أ- نعتبر النقط B,A و C التي لواحقها على الترتيب: $a=2, b=3+i\sqrt{3}$ و $c=2i\sqrt{3}$. حدد قيس الزاوية $A\hat{B}C$.

ب-استنتج أن ω لاحقة النقطة Ω مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC هي $1+i\sqrt{3}$.

2.لتكن (z_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $\begin{cases} z_0=0 \\ z_{n+1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2 \end{cases}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$، نضع A_n النقطة التي لاحقتها z_n.

أ-بين أن النقط A_2, A_3 و A_4 هي النقط التي لاحقتها على التوالي $3+i\sqrt{3}$ ، $2+2i\sqrt{3}$ و $2i\sqrt{3}$.

(لاحظ أن: $A_1=A$ ، $A_2=B$ و $A_4=C$).

ب-قارن أطوال القطع $[A_1A_2],[A_2A_3]$ و $[A_3A_4]$.

3.أ-بين أن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $z_{n+1}-\omega=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)$.

ب-استنتج أن A_{n+1} هي صورة A_n بتحويل يطلب تحديد طبيعته و عناصره المميزة.

ج- بين أن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $A_{n+6}=A_n$ ثم حدد لاحقة A_{2012}.

د-حدد طول القطعة $[A_nA_{n+1}]$.

الحل:

1.أ-تحديد قيس الزاوية $A\hat{B}C$. نعتبر النقط B,A و C التي لواحقها على الترتيب: $a=2, b=3+i\sqrt{3}$ و $c=2i\sqrt{3}$.

لدينا:

$$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)$$
$$\frac{c-b}{a-b}=\frac{2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}{2-3-i\sqrt{3}}$$
$$=-i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}$$
$$\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)=\frac{-\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$$

ب-استنتاج أن ω لاحقة النقطة Ω مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC هي $1+i\sqrt{3}$.

بما أن المثلث ABC قائم في B فان $[AC]$ يمثل قطر الدائرة المحاطة بالمثلث ABC و بالتالي: $\omega=\dfrac{a+c}{2}=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$

2.لتكن (z_n) المتتالية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2 \end{cases}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، نضع A_n النقطة التي لاحقتها z_n .

أ-بين أن النقط A_2, A_3 و A_4 هي النقط التي لاحقتها على التوالي $3+i\sqrt{3}$ ، $2+2i\sqrt{3}$ و $2i\sqrt{3}$.

(لاحظ أن: $A_1 = A$ ، $A_2 = B$ و $A_4 = C$).

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_0 + 2 = 2 = a$$
$$z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_1 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(2) + 2 = 1+i\sqrt{3}+2 = 3+i\sqrt{3} = b$$
$$z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_2 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(3+i\sqrt{3}\right) + 2 = 2+2i\sqrt{3}$$
$$z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_3 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(2+2i\sqrt{3}\right) + 2 = 2i\sqrt{3} = c$$

ب-مقارنة أطوال القطع $[A_1A_2],[A_2A_3]$ و $[A_3A_4]$.

$$A_3A_4 = |z_4 - z_3| = 2 \quad A_2A_3 = |z_3 - z_2| = 2 \quad A_1A_2 = |z_2 - z_1| = 2$$

اذن: $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$

3.أ-اثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $z_{n+1} - \omega = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$.

ليكن n من $\mathbb{N}$:

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2 - 1 - i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 1 - i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(z_n - \left(1+i\sqrt{3}\right)\right)$$
$$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$$

ب-استنتاج أن A_{n+1} هي صورة A_n بتحويل يطلب تحديد طبيعته و عناصره المميزة.

بما أن : $z_{n+1} - \omega = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$

أي: $z_{n+1} - \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_n - \omega)$

فان A_{n+1} هي صورة A_n بالدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

ج-اثبات أن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $A_{n+6} = A_n$

نضع: $v_n = z_n - \omega$ لدينا: (v_n) متتالية هندسية أساسها $e^{\frac{i\pi}{3}}$ و حدها الأول $v_0 = -\omega$ اذن:

$$v_n = -\omega\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^n = -\omega e^{\frac{in\pi}{3}}$$

$$z_n = \omega - \omega e^{\frac{in\pi}{3}}$$

$$z_{n+6} = \omega - \omega e^{\frac{i(n+6)\pi}{3}} = \omega - \omega e^{\frac{i(n+6)\pi}{3}} = \omega - \omega e^{\frac{in\pi}{3}} e^{i2\pi} = \omega - \omega e^{\frac{in\pi}{3}} = z_n$$

ومنه:

$$e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$$

$$z_{2012} = \omega - \omega e^{\frac{i(2012)\pi}{3}} = z_2 = 3 + i\sqrt{3}$$

د-تحدد طول القطعة $[A_nA_{n+1}]$:

نضع $d_n = A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$

بحساب d_{n+1} نجد: $d_{n+1} = d_n$ اذن : (d_n) متتالية ثابتة و منه:

$$d_n = d_1 = A_1A_2 = 2$$

$$A_nA_{n+1} = 2$$

Bac France

لتكن المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بحدهما الأول $u_0=1$ و $v_0=6$ من أجل كل n عدد طبيعي :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{2}{3}v_n \\ v_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{4}v_n \end{cases}$$

1.نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة كما يلي: $w_n=v_n-u_n$ ، من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

بين أن المتتالية (w_n) هندسية ثم استنتج عبارة w_n بدلالة n

2.نعرف المتتالية (t_n) من أجل كل n عدد طبيعي كمايلي: $t_n=8v_n+3u_n$

بين أن المتتالية (t_n) ثابتة ثم استنتج عبارة حدها العام.

3.عبر عن v_n بدلالة w_n و t_n. ثم استنتج v_n بدلالة n و احسب نهايتها.

4. ما هي نهاية المتتالية (u_n).

الحل:

1اثبات أن المتتالية (w_n) هندسية :

بما أن: $w_n=v_n-u_n$ ، من أجل كل n من $\mathbb{N}$. و $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{2}{3}v_n$ و $v_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{4}v_n$.

بالتعويض نجد:

$$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{4}v_n-\frac{1}{3}u_n-\frac{2}{3}v_n$$
$$=-\frac{1}{12}u_n+\frac{1}{12}v_n=\frac{1}{12}(v_n-u_n)$$
$$=\frac{1}{12}w_n$$

و بالتالي : المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{12}$ و حدها الأول $w_0=v_0-u_0=6-1=5$.

استنتاج عبارة w_n بدلالة n.: $w_n=w_0\times q^n=5\times\left(\frac{1}{12}\right)^n$

2.لدينا من أجل كل n عدد طبيعي : $t_n=8v_n+3u_n$

تبيان أن المتتالية (t_n) ثابتة:

$$t_{n+1}=8v_{n+1}+3u_{n+1}=8\left(\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{4}v_n\right)+3\left(\frac{1}{3}u_n+\frac{2}{3}v_n\right)=8v_n+3u_n=t_n$$ و بالتالي المتتالية (t_n) ثابتة

$$\Leftrightarrow t_{n+1}=t_n=t_0$$

استنتاج عبارة حدها العام. $t_n=t_0=8v_0+3u_0=51$

$$t_n=51$$

3.التعبير عن v_n بدلالة w_n و t_n:

لدينا: $\begin{cases} 3w_n=3v_n-3u_n........(1) \\ t_n=8v_n+3u_n............(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_n=v_n-u_n \\ t_n=8v_n+3u_n \end{cases}$ بجمع المعادلة (1) و (2) طرف لطرف نجد:

$$11v_n=3w_n+t_n \Rightarrow v_n=\frac{3}{11}w_n+\frac{1}{11}t_n$$

استنتاج v_n بدلالة n.

❑

بالتعويض نجد: $v_n=\frac{3}{11}\left(5\times\left(\frac{1}{12}\right)^n\right)+\frac{1}{11}(51)=\frac{15}{11}\times\left(\frac{1}{12}\right)^n+\frac{51}{11}$

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{15}{11}\times\left(\frac{1}{12}\right)^n+51$$

حساب نهاية (v_n):

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{15}{11}\times\left(\frac{1}{12}\right)^n=0\\(0<q<1)\end{cases}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{51}{11}$$

4. نهاية المتتالية (u_n):

لدينا:

$$v_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{4}v_n$$

$$\lim_{n\to+\infty}v_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{4}v_n\right)=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}u_n+\frac{3}{4}\lim_{n\to+\infty}v_n$$

لان: $\lim\limits_{n\to+\infty}v_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{51}{11}$

$$\frac{51}{11}=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}u_n+\frac{3}{4}\left(\frac{51}{11}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{51}{11}$$

التمرين الثلاثون: احتمالات

يحتوي كيس على $n+8$ كرية لا نفرق بينهما باللمس، 8 كريات بيضاء و n كرية سوداء (n عدد طبيعي أكبر أو يساوي2)

1..نسحب على التوالي كرتين مع ارجاع الكرية المسحوبة في كل مرة الى الكيس بحيث نربح دينارا من أجل كل كرية بيضاء مسحوبة و نخسر ديناربن من أجل كل كرية سوداء مسحوبة .

Bac Etrangers

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب قيمة الربح الجبري .

أ-ماهي قيم المتغير العشوائي الممكنة.

ب-أكتب بدلالة n قانون احتماله.

ج-أحسب أمله الرياضياتي.

د-هل توجد قيمة للعدد n تجعل الأمل الرياضياتي معدوما؟ أحسبها.

2.نفرض أننا سحبنا كرتين على التوالي من دون ارجاع، ليكن A_n حادث الحصول على كرتين من نفس اللون . B_n حادث الحصول على كرتين من لونين مختلفين.

أ-احسب $p(A_n)$ بدلالة n ثم $\lim\limits_{n\to+\infty}p(A_n)$ ، فسر هذه النتيجة.

ب- احسب $p(B_n)$ بدلالة n ثم $\lim\limits_{n\to+\infty}p(B_n)$ ، فسر هذه النتيجة

الحل:

عند سحب كرتين يمكن أن تكونا بيضاويين و بالتالي الربح الجبري هو 2 أو سوداوين و يكون الربح الجبري -4 أو من لونين مختلفين و يكون الربح الجبري -1 فقيم المتغير العشوائي هي : $X=\{-4,-1,2\}$.

ب- قانون الاحتمال:

x_i	-4	-1	2
$p(X_i=x_i)$	$\frac{n^2}{(n+8)^2}$	$\frac{16n}{(n+8)^2}$	$\frac{64}{(n+8)^2}$

الأمل الرياضياتي:

$$E(X)=\frac{-n^2-16n+128}{(n+8)^2}=\frac{4}{(n+8)^2}\left(-n^2-4n+32\right)$$

$$E(X)=0$$

الأمل الرياضياتي معدوم معناه: $\frac{4}{(n+8)^2}\left(-n^2-4n+32\right)=0$

$$-n^2-4n+32=0\begin{cases} n=-8\notin\mathbb{N} \\ n=4 \end{cases}$$

و منه: $n=4$.

2.أ-حساب $p(A_n)$ بدلالة n:

$$p(A_n)=\frac{n(n-1)+8\times 7}{(n+8)(n+7)}=\frac{n^2-n+56}{n^2+15n+56}$$

النهاية: $\lim\limits_{n\to+\infty}p(A_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-n+56}{n^2+15n+56}=1$ ،

التفسير: عندما يؤول n الى $+\infty$ يصبح حادث الحصول على كرتين سوداوين شبه أكيد فاحتماله يقترب القدر الكافي من 1.

ب- حساب $p(B_n)$ بدلالة n:

$$p(B_n)=\frac{8n}{(n+8)(n+7)}=\frac{8n}{n^2+15n+56}$$

النهاية: $\lim\limits_{n\to+\infty}p(B_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{8n}{n^2+15n+56}=0$

تفسير النتيجة: عندما يؤول n الى $+\infty$ تصبح معظم الكرات سوداء و يصبح حادث الحصول على كرتين من لونين مختلفين شبه مستحيل فاحتماله يقترب من 0.

❑

Bac Etrangers

1.عين العددين الحقيقين a و b بحيث: $(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}$.

2.أ-حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $z^2-4z+16=0$.

ب-استنتج في المجموعة $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $z^4-4z^2+16=0$.

3.نعتبر العدد المركب z_k المعرف كما يلي: $z_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ حيث k عدد صحيح.

أ-بين أن: $z_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ ثم استنتج أن: $z_{2013}=0$

ب-أكتب العدد $-2^{2015}z_{2015}$ على الشكل $i\sqrt{n}$ حيث n عدد طبيعي يطلب تحديده.

4.المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقطتين A و B ذات الاحقتين على الترتيب: $z_A=2+2i\sqrt{3}$ و $z_B=2-2i\sqrt{3}$ لتكن C النقطة ذات الاحقة: $z_c=5-2^{2015}z_{2015}$

أ-تحقق أن: $z_c=\frac{3}{2}z_B+z_B$.

ب-بين أن: $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=-2^{2015}z_{2015}$ ثم عين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A الى B معينا عناصره المميزة ثم جد العبارة المركبة له.

5.لتكن A_0 النقطة ذات اللاحقة $z_0=\sqrt{3}-i$ من أجل كل عدد طبيعي n: $A_{n+1}=f\left(A_n\right)$ حيث z_n لاحقة A_n .

نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة كما يلي: $\begin{cases}u_0=A_0A_1\\u_n=A_nA_{n+1}\end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n.(A_0A_1 يمثل الطول بين النقطتين)

أ-بين أن $\left(u_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 و أساسها q.

ب-استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج- أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$

الحل:

1.تعين العددين الحقيقين a و b بحيث: $(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}$.

لدينا: بالمطابقة تجد:
$$(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}\Rightarrow a^2+2ai-1=2+2i\sqrt{3}$$
$$2ai=2i\sqrt{3}\Rightarrow a=\sqrt{3}$$

بنفس العملية:
$$(b-i)^2=22i\sqrt{3}\Rightarrow b^2-2bi-1=2-2i\sqrt{3}$$
$$-2bi=-2i\sqrt{3}\Rightarrow b=\sqrt{3}$$

و بالتالي: $a=b=\sqrt{3}$.

2.أ-حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+16=0$

$$z^2-4z+16=0$$
$$\Delta=-48=\left(4i\sqrt{3}\right)^2$$
أي:
$$z_1=2+2i\sqrt{3}, z_2=2-2i\sqrt{3}$$
$$S=\left\{2+2i\sqrt{3};2-2i\sqrt{3}\right\}$$

ب-استنتاج حلول المعادلة: $z^4-4z^2+16=0$.

نضع: $z'=z^2$ المعادلة : $z^4-4z^2+16=0$ تصبح: $z'^2-4z'+16=0$

معناه مما سبق:
$$z_1^2=z'_1=2+2i\sqrt{3}$$
$$z_2^2=z'_2=2-2i\sqrt{3}$$

علينا حساب الجذران التربيعيان لكل من : z_1' و z_2'.

نلاحظ من السؤال 1. لدينا : الجذر التربيعي للعدد $2+2i\sqrt{3}$ هو : $\sqrt{3}+i$ أو $-\sqrt{3}-i$

الجذر التربيعي للعدد $2-2i\sqrt{3}$ هو : $\sqrt{3}-i$ أو $-\sqrt{3}+i$.

و بالتالي: $S=\left\{\sqrt{3}+i;-\sqrt{3}-i;\sqrt{3}-i;-\sqrt{3}+i\right\}$.

3. أ- لدينا: $z_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$

اثبات أن:

$$z_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$$
$$z_k=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left[\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)\right]$$
$$=z_k=\frac{1}{2^k}2i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$
$$z_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

استنتاج أن: $z_{2013}=0$

$$z_{2013}=\frac{i}{2^{2013-1}}\sin\left(\frac{2013\pi}{3}\right)=\frac{i}{2^{2012}}\sin(\pi)=0$$

❑

ب-كتابة العدد $-2^{2015} z_{2015}$ على الشكل $i\sqrt{n}$ حيث n.

$$-2^{2015} z_{2015} = -2^{2015} z_{2015} = -2^{2015} \frac{i}{2^{2014}} \sin\left(\frac{2015\pi}{3}\right)$$
$$= -2i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 671\pi = -2i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \sqrt{3}i$$

و بالتالي: $n=3$

4. $z_A = 2+2i\sqrt{3}$ و $z_B = 2-2i\sqrt{3}$ لتكن C النقطة ذات الاحقة: $z_c = 5-2^{2015} z_{2015}$

أ-التحقق أن: $z_c = \frac{3}{2} z_B + z_B$.

لدينا: $z_c = 5-2^{2015} z_{2015} = 5+i\sqrt{3}$ و لدينا كذلك:

أي:
$$z_C = \frac{3}{2} z_A + z_B$$
$$z_C = \frac{3}{2}\left(2+2i\sqrt{3}\right) + \left(2-2i\sqrt{3}\right) = 5+i\sqrt{3}$$

ب-اثبات أن:

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = -2^{2015} z_{2015}$$
$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{2-2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}} = \frac{-3-3i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$$
$$= i\sqrt{3} = -2^{2015} z_{2015}$$

تعين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A الى B.

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i\sqrt{3} \Leftrightarrow z_B - z_C = i\sqrt{3}\left(z_A - z_C\right)$$

$$\begin{cases} |z_B - z_C| = \sqrt{3}|z_A - z_C| \\ \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CB = \sqrt{3}CA \\ \left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

اذن : التحويل النقطي f هو تشابه مباشرمركزه Cونسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

العبارة المركبة: تكتب من الشكل:

$$Z' = a'Z + b'$$
$$\begin{cases} a' = i\sqrt{3} \\ b' = z_C(1-a') \Rightarrow b' = 8-4i\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow Z' = i\sqrt{3}Z + 8 - 4i\sqrt{3}$$

5.نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = A_0.A_1 \\ u_n = A_nA_{n+1} \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

❑

أ-بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 و أساسها q.

لدينا:

$$u_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|i\sqrt{3}z_{n+1} + 8 - 4i\sqrt{3} - i\sqrt{3}z_n - 8 + 4i\sqrt{3}\right|$$

و بالتالي:
$$u_{n+1} = \left|i\sqrt{3}z_{n+1} - i\sqrt{3}z_n\right| = \left|i\sqrt{3}(z_{n+1} - z_n)\right| = \left|i\sqrt{3}\right|\left|(z_{n+1} - z_n)\right| = \sqrt{3}u_n$$
$$\Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{3}u_n$$

اذن: $q = \sqrt{3}$ هو أساس هذه المتتالية و حدها الأول:

$$u_0 = A_0.A_1 = |z_1 - z_0| = \left|i\sqrt{3}z_0 + 8 - 4i\sqrt{3} - z_0\right|$$

نعلم أن: $z_0 = \sqrt{3} - i$

$$u_0 = \left|i\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - i\right) + 8 - 4i\sqrt{3} - \left(\sqrt{3} - i\right)\right| = \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}$$

ب-استنتاج عبارة u_n بدلالة n: $u_n = u_0 \times q^n = \left(\sqrt{3}\right)^n \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}$

ج- حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$$

$$S_n = \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}\left(\frac{1 - \left(\sqrt{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\sqrt{3}\right)}\right) = \left[\frac{\sqrt{128 - 32\sqrt{3}}}{1 - \sqrt{3}}\right]\left(1 - \left(\sqrt{3}\right)^{n+1}\right)$$

Bac Etrangers

1. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(1-x)e^{x}-1$.

أ- أدرس تغيرات الدالة g و استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

ب- بين ان الدالة k حيث: $k(x)=(2-x)e^{x}-x$ دالة أصلية للدالة g على المجال $[0;+\infty[$.

ج- استنتج حساب $\int_0^1 g(x)dx$.

2. f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي :

$f(0)=1$ و من أجل كل يختلف عن الصفر: $f(x)=\frac{x}{e^{x}-1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. أ- أثبت أن $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$.

ب- عين نهاية الدالة f عند 0، ثم استنتج أن f مستمرة عند الصفر من اليمين .

ج- عين نهاية الدالة f عند $+\infty$. فسر النتيجة هندسيا.

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^{x}-1)^{2}}$.

ب- استنتج تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ج- أرسم المنحنى (C_f).

4. لتكن المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ب: $u_n=\frac{1}{n}\left[1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n-1}{n}}\right]$. برهن أن:

$1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ ثم استنتج أن: $u_n=(e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$.

ب-استنتج باستعمال الجزء الأول من التمرين أيضا، أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو $e-1$

الحل:

1. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(1-x)e^{x}-1$.

أ- دراسة تغيرات الدالة:

لدينا: $g(0)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^{x}-1=-\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ حيث من أجل كل x من $[0;+\infty[$ لدينا: $g'(x)=-xe^{x}$

و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$

و جول تغيراتها يكون كتالي\:

x	0 $+\infty$
$g'(x)$	-
$g(x)$	$0 \searrow -\infty$

استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

من جدول التغيرات نلاحظ \أن \: $g(x)\le 0$ على المجال $[0;+\infty[$

ب- تبيان ان الدالة k حيث: $k(x)=(2-x)e^{x}-x$ دالة أصلية للدالة g على المجال $[0;+\infty[$.

الدالة k قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ حيث من أجل كل x من $[0;+\infty[$ لدينا: $k'(x)=(1-x)e^{x}-1=g(x)$

و بالتالي k دالة أصلية للدالة g على المجال $[0;+\infty[$.

ج- استنتاج حساب $\int_0^1 g(x)dx$.

$$\int_0^1 g(x)dx = k(1)-k(0)=\left[k(x)\right]_0^1=(\mathrm{e}-1)-2=(e-3)ua$$

2. f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(0)=1$ و من أجل كل يختلف عن الصفر: $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-1}$ ،

أ- أثبت أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$.

باستعمال خاصية العدد المشتق: نعلم \أن\: $g'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x+a)-g(a)}{x-a}$ يكفي \أن نضع $g(x)=e^{x}$.

ومنه\: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x-0}=\left(e^{x}\right)'(0)=e^{0}=1$.

ب- عين نهاية الدالة f عند 0،

لدينا\: $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-1}=\dfrac{1}{\dfrac{e^{x}-1}{x}}$

اذن\: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x}-1}{x}\right)}=\dfrac{1}{1}=1$

أي\: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

استنتاج أن f مستمرة عند الصفر من اليمين . لدينا: $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$

ج- عين نهاية الدالة f عند $+\infty$. فسر النتيجة هندسيا.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\frac{x\left(e^x - 1\right)}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} \right)$$

نهاية شهيرة

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

ومنه $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث:

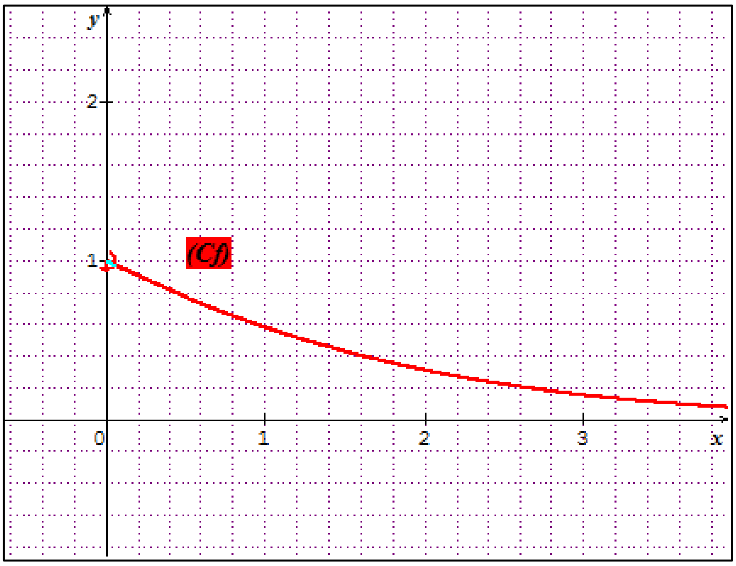
$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - e^x \times x}{\left(e^x - 1\right)^2} = \frac{e^x\left(1 - x\right) - 1}{\left(e^x - 1\right)^2} = \frac{g(x)}{\left(e^x - 1\right)^2}$$

ب- استنتاج تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{\left(e^x - 1\right)^2}$ و مما سبق $g(x) \leq 0$ و $\left(e^x - 1\right) > 0$ اذن: $f'(x) < 0$ أي أن الدالة متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	1 $\searrow$ 0

ج- رسم المنحنى (C_f).



4. لتكن المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ب: $u_n=\frac{1}{n}\left[1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n-1}{n}}\right]$.

أ- برهن أن: $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$.

$1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ هو مجموع n حدا الأولى لمتتالية هندسة حدها الأول $v_0=1$ و أساسها $q=e^{\frac{1}{n}}$

وبالتالي: $S_n=1\times\frac{1-e^{\left(\frac{1}{n}\right)^n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1-e^1}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ حدد الحدود هو n.

ثم استنتج أن: $u_n=(e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$. لدينا: $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ ، $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}$ أي: $f\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right)$

و من جهة أخرى: $u_n=-\frac{1}{n}\left(\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right)=(1-e)\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right)=-(1-e)f\left(\frac{1}{n}\right)$

$u_n=(e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$

ب-استنتاج باستعمال الجزء الأول من التمرين أيضا، أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو $e-1$.

بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ و لدينا مما سبق $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$ و بالجداء و التركيب نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e-1$ فالمتتالية (u_n) متقاربة نحو $e-1$.

❑

قدم لكم هذا العمل (ترجمة و تصرف) الأستاذ **شعبان أسامة**.

تجدون كل منشوراتي

5min Maths

5 min Maths

chbnoussama@gmail.com

Google

يمكنكم زيارة الموقع الالكتروني للصفحة: www.5min Maths .com