الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2019
الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=13$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$

1) أ) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>1$.

ب) أُدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln(u_n-1)$.

أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

3) اكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=1+\frac{12}{5^n}$ واحسب عندئذ $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

4) بيّن أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0-1)(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وكرية واحدة تحمل الرقم 2 وسبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وثلاث كريات تحمل الرقم 2 (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا كريتين من الكيس في آن واحد ونعتبر الحادثتين A و B حيث: A: " سحب كريتين من نفس اللون " ، B: " سحب كريتين تحملان نفس الرقم " .

1) بيّن أنّ احتمال الحادثة A هو $P(A)=\frac{31}{66}$ واحسب احتمال الحادثة B .

2) علما أنّ الكريتين المسحوبتين من نفس اللون، ما احتمال أن تحملا نفس الرقم؟

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z-i)(z^2-4z+5)=0$.

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها i ، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب.

1) اكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع $f(z)=\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$

أ) عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|f(z)|=\frac{1}{2}$

ب) بيّن أن العدد $\left[f(i)\right]^{1440}$ حقيقي موجب.

3) نعتبر الدوران r الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) عيّن لاحقة D صورة B بالدوران r وبيّن أنّ النقط D ، A و C في استقامية.

ب) استنتج أنّ D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته وعناصره .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدّالة العددية المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)$ ثم فسِّر النتائج بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ وشكِّل جدول تغيُّراتها.

3) نسمي (Γ) المنحنى البياني للدّالة اللّوغاريتمية النّيبيرية "ln" في المعلم السابق.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)$ ثم فسِّر النَّتيجة بيانيا.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنِّسبة إلى المنحنى (Γ).

4) ارسم بعناية المنحنى (Γ) ثمَّ المنحنى (C_f).

5) H الدّالة المعرفة على المجال $[3;+\infty[$ بـ: $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$ حيث t متغيّر حقيقي موجب تماما.

أ) باستعمال المكاملة بالتّجزئة، عيّن عبارة $H(x)$ بدلالة x .

ب) احسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدَّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين: $x=3$ و $x=4$.

6) g الدّالة المعرَّفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$.

دون حساب عبارة $g(x)$ حدّد اتجاه تغيّر الدالة g على مجموعة تعريفها.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللّمس منها كريتان تحملان الرقم 0 وثلاث تحمل الرقم 1 والكريات الأخرى تحمل الرقم 2. نسحب عشوائياً وفي آنٍ واحدٍ ثلاث كريات من الصندوق.

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب، جداء الأرقام المسجّلة على الكريات المسحوبة.

1) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

2) بيّن أنّ احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقماً زوجياً هو $\frac{7}{24}$.

3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع.

ما احتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن جداءهما زوجي؟

التمرين الثاني: (04 نقاط)

f الدّالة المعرّفة على المجال $]4;7]$ بـ: $f(x)=\sqrt{x+2}+4$.

1) أ) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]4;7[$.

ب) استنتج أنَّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4;7]$ فإنّ $f(x)\in[4;7[$.

2) برهن أنَّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4;7]$ فإنّ $f(x)-x=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$.

ثمّ استنتج أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]4;7]$ فإنّ $f(x)-x>0$

3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0=4$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) برهن بالتّراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n $4\leq u_n<7$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ بيّن أنّها متقاربة.

4) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n $7-u_{n+1}<\frac{1}{4}(7-u_n)$.

ب) استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n $0<7-u_n<3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثمَّ احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النّقط A، B و C التي لاحقاتها z_A، z_B و z_C على التّرتيب حيث:

$z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2z_A$.

1) أ) اكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسي .

ب) احسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

2) أ) T الانسحاب الذي يحوّل A إلى C، عيّن z_D لاحقة النّقطة D صورة B بالانسحاب T.

ب) استنتج طبيعة الرّباعي $ABDC$.

3) اكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسي.

4) جد قيم العدد الطّبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.

5) لتكن M نقطة كيفيّة من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C .

عيّن (E) مجموعة النّقط M التي من أجلها يكون $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. تُؤخذ وحدة الطول $2cm$

$\left(\mathcal{C}_f\right)$ و $\left(\mathcal{C}_g\right)$ التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad و \quad g(x) = e^x - ex$$

1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

ب) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f .

3) احسب كلاً من $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

4) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $\left(\mathcal{C}_f\right)$ و $\left(\mathcal{C}_g\right)$ على $\mathbb{R}$.

5) ارسم على المجال $[0;2]$ المنحنيين $\left(\mathcal{C}_f\right)$ و $\left(\mathcal{C}_g\right)$ في نفس المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (يُعطى $\mathrm{e}^2 - 2e \approx 2$)

6) احسب بالسنتمتر المربّع، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين $\left(\mathcal{C}_f\right)$ و $\left(\mathcal{C}_g\right)$.

7) h الدالة المعرّفة على المجال $[-2 \,;\, 2]$ كما يلي: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.

ب) من أجل $x \in [0 \,;\, 2]$ احسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) انطلاقا من $\left(\mathcal{C}_f\right)$ ثم ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني