



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5)

التمرين الأول: (04 نقاط)

(1) حل المعادلة $505x - 673y = 1 \dots\dots (E)$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عدنان صحيحان.

(لاحظ أن: $2019 = 3 \times 673$ و $2020 = 4 \times 505$)

(2) بين أنه من أجل كل ثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإن x و y من نفس الإشارة.

(3) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على \mathbb{N} بـ:

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = v_n + 673 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases}$$

- اكتب u_α بدلالة α ثم اكتب v_β بدلالة β حيث α و β عدنان طبيعيان.

(4) أ) عيّن الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم بين أن هذه الحدود المشتركة تشكل متتالية حسابية (w_n) يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023)$

احسب بدلالة n الجداء $p = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1; 0; -1)$ ، $B(1; -2; 0)$ و $C(1; 2; 3)$

(1) بين أن المثلث ABC قائم في A .

(2) اكتب معادلة للمستوي (Q) الذي يشمل A و \overline{AC} شعاع ناظمي له.

(3) m وسيط حقيقي و (P_m) مستو حيث: $(m-1)x + 2y - z - m = 0$ معادلة له.

أ) أثبت أنه عندما يتغير m في \mathbb{R} فإن المستوي (P_m) يحوي مستقيما ثابتا (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

- تحقق أن A و C نقطتان من المستقيم (Δ) .

ب) تحقق أنه مهما كان m من \mathbb{R} فإن المستوي (P_m) يعامد المستوي (Q) .

4) لتكن $d(m)$ المسافة بين النقطة B و المستوي (P_m) .

أ) أثبت أن: $d(m) = \frac{5}{\sqrt{m^2 - 2m + 6}}$ ثم عيّن قيمة m التي تكون من أجلها $d(m)$ أعظمية واحسبها.

ب) استنتج أنه إذا كانت $d(m)$ أعظمية فإن النقطة A هي المسقط العمودي للنقطة B على (P_m) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C و D

حيث: $z_E = 1$ و $z_D = \bar{z}_B$ ، $z_C = \bar{z}_A$ ، $z_B = i$ ، $z_A = 1 + i\sqrt{2}$

1) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : $(z^2 + 1)(z^2 - 2z + 3) = 0$

2) أ) احسب كلاً من $|z_A - 1|$ ، $|z_B - 1|$ و $|z_C - z_E|$ ثم تحقق أن النقط الأربعة A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها و طول نصف قطرها.

ب) بيّن أن: $z_B - z_E = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A - z_E)$ ثم استنتج أن B هي صورة A بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة.

- ما طبيعة المثلث ABE ؟

3) عيّن لاحتتي الشعاعين \overrightarrow{BD} و \overrightarrow{AE} محدداً طبيعة الرباعي $ABDE$.

4) \vec{w}_1 و \vec{w}_2 شعاعان من المستوي لاحقتهما على الترتيب z_1 و z_2 .

أ) برهن أن: $(\vec{w}_1$ و \vec{w}_2 متعامدان) يكافئ $(z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 0)$.

ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاهقة z حيث: $(z - z_A)(\bar{z} - z_D) + (z - z_B)(\bar{z} - z_C) = 0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ ب: $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة 3 cm

1) برهن أن:

- إذا كان: $x > 1$ فإن: $1 - x - 2x \ln x < 0$

- إذا كان: $0 < x < 1$ فإن: $1 - x - 2x \ln x > 0$

2) أ) أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين ثم اكتب معادلة لنصف المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (Δ) و (C_f) .

3) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .



- (4 أ) اكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) الموازي لـ (Δ) .
- (ب) أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $[1;+\infty[$ حلا وحيدا α ثم تحقق أن: $1,76 < \alpha < 1,77$.
- (ج) اكتب معادلة للمستقيم (d) الذي يوازي (Δ) ويشمل النقطة ذات الإحداثيين $(\alpha;0)$.
- ارسم كلا من (T) ، (Δ) و (d) ثم المنحنى (C_f) على المجال $[0;\alpha]$.
- (5) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $x^2 \ln x + m = 0$ في المجال $[0;\alpha]$.

(6) λ عدد حقيقي حيث: $0 < \lambda < 1$ ، نعتبر: $A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 -x^2 \ln x dx$

(أ) باستعمال الكاملة بالتجزئة احسب $A(\lambda)$ بدلالة λ .

(ب) احسب $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A(\lambda)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

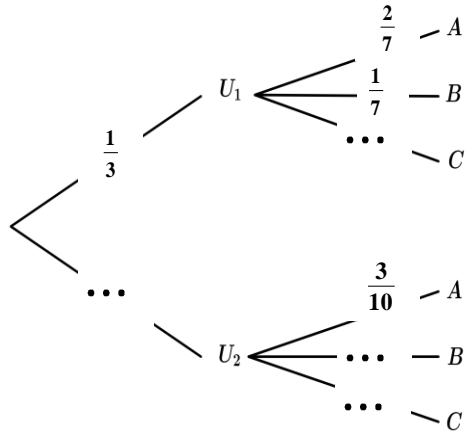
انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع على صفتين (02) (من الصفحة 4 من 5 إلى الصفحة 5 من 5)

التمرين الأول: (04 نقاط)

صندوقان غير شفافين U_1 و U_2 ، يحتوي الصندوق U_1 على 4 كريات حمراء و 3 كريات سوداء ويحتوي الصندوق U_2 على 3 كريات حمراء و كرتين سوداوين (الكرات كلها متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس) نرمي ندرا غير مزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 .



إذا ظهر الرقمان 2 أو 4 نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من الصندوق U_1 وفي باقي الحالات نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من الصندوق U_2 .

نعتبر الأحداث A ، B و C المعرفة بـ : "سحب كرتين حمراوين"

B : "سحب كرتين سوداوين" و C : "سحب كرتين من لونين مختلفين"

(1) أنقل، وأكمل شجرة الاحتمالات.

(2) أحسب احتمالات الأحداث A ، B و C .

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

(3) أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X .

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(4) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية حدودها موجبة معرفة بعدها الأول u_1 حيث $u_1 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$$

(1) أ) تحقّق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$

ب) استنتج كتابة الحد العام u_n بدلالة n

(2) تحقّق أنّه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = n(n-2) + 1$

(3) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها: $n-2$ يقسم $n-5$.

(4) أ) من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ، بيّن أنّ: $PGCD(n-2; u_n) = 1$

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) نضع من أجل كل عدد مركب z ، $P(z) = z^4 - 6z^3 + 29z^2 - 24z + 100$ ،

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ ، ثم استنتج أنّه إذا كان z حلا للمعادلة $P(z) = 0$

فإنّ \bar{z} حل لها.

ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$ علما أنّها تقبل حلا تخيليا صرفا.

(2) نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, M و M'

التي لآحقاتها على الترتيب: $2i, 3-4i, z$ و z' حيث: $z' = \frac{-iz + 4 + 3i}{z - 2i}$ مع $z \neq 2i$.

ولتكن I مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; 1)\}$ و J مرجح الجملة $\{(A; -2), (B; 1)\}$

(أ) عيّن اللاحقتين z_I و z_J للنقطتين I و J على الترتيب.

(ب) لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $|z'| = 2$.

بيّن أن (النقطة M من (E)) يكافئ $(\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{JM} = 0)$ ، ثم عيّن (E) وأنشئها.

(ج) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $\arg(z') = 2k\pi$ حيث k عدد صحيح.

تحقق أنّ النقطة D ذات اللاحقة $\frac{9}{2} - \frac{5}{2}i$ تنتمي إلى (Γ) ، ثم عيّن وأنشئ (Γ) .

(3) عيّن الشكل الجبري للاحقة النقطة G تقاطع المجموعتين (E) و (Γ) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) f_k الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي.

ليكن (\mathcal{C}_k) التمثيل البياني للدالة f_k في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بيّن أنّ كل المنحنيات (\mathcal{C}_k) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما.

(2) احسب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ وعند $+\infty$. (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k).

(3) (أ) احسب $f'_k(x)$ ، ثم حدّد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغير الدالة f_k .

(ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما.

(4) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k الأوضاع النسبية للمنحنيين (\mathcal{C}_k) و (\mathcal{C}_{k+1}) .

(II) f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$

نسمي (\mathcal{C}_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) شكّل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم المنحنى (\mathcal{C}_f) على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

(2) (أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلين في \mathbb{R} أحدهما α حيث: $-1,28 < \alpha < -1,27$.

(ب) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right| = \left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا.

(3) g الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = (x+1)e^{-2x}$.

(أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$ ثم استنتج دالة أصلية لـ g على \mathbb{R} .

(ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (\mathcal{C}_f) ومحور الفواصل

والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = -1$ و $x = 0$.