



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بعدها الأول $u_0 = 1$ حيث $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$

- (1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$
 ب) بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنها متقاربة.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

(3) عبّر بدلالة n عن u_n و v_n ، و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 3 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 2 ، 3 ، 3 نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

نعتبر الحادثتين A : "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني"

و B : "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم".

(1) أ) احسب: $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.

ب) بين أن: $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.

عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

A، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحتقاتها على الترتيب: Z_A, Z_B, Z_C حيث :

$$Z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad Z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad Z_C = \bar{Z}_B \quad (\text{يُرمز بـ } \bar{Z}_B \text{ لمرافق } Z_B)$$

اكتب Z_A و Z_B على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

(3) أ) تحقق أن: $\frac{Z_B}{Z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدّد طبيعة المثلث OBC .

ب) استنتج أن: B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة.

(4) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق: $|z| = \left| \bar{z} - \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right|$

عيّن طبيعة المجموعة (γ) ثم عيّن صورتها بالدوران r .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$.

أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.38 < \alpha < -0.37$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x+1))$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم $(\Delta): y = 2x + 1$ حيث:

(2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها.

(3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(4) ارسم (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) = 0.8$).

(5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x = (1-m)e^x$.

(6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تتعدم من أجل $x = 1$.

ب) احسب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = 1$ ،

$$x = 3 \text{ و } y = 2x + 1.$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) احسب كلا من u_1 ، u_2 و u_3 .
- (2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- (3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2n+1$.
 أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n} = v_n$.
 ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (4) احسب المجموعين S_n و T حيث:
- $$T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \dots + e^{u_{2018}} \quad \text{و} \quad S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطة $A(1; -2; 1)$ والمستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلتيهما على الترتيب $-x + y + 2z + 1 = 0$ و $-3x + y + z + 4 = 0$.
- (1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(1; 5; -2)$ شعاع توجيه له .
- (2) بين أن المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان ثم تحقق أن تقاطعهما هو المستقيم (Δ) .
- (3) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل $B(-1; 4; 0)$ ويعامد كلا من (P_1) و (P_2) ثم استنتج تقاطع المستويات الثلاثة (P_1) ، (P_2) و (Q) .
- (4) لتكن $E(2; 3; -1)$ و $H(0; 3; -2)$ نقطتان من الفضاء .
 أ) تحقق أن H هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_1) .
 ب) حدّد طبيعة المثلث EBH ثم احسب V حجم رباعي الوجوه $AEBH$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (I) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\bar{z} - 4 + i)(z^2 - 4z + 5) = 0$ (يرمز $\bar{z}$ لمرافق العدد z)
- (II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A = 2 + i$ ، $z_B = 4 + i$ و $z_C = \bar{z}_A$.
- (1) تحقق أن $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا .

$$\begin{cases} |Z_D - Z_A| = |Z_B - Z_A| \\ \text{Arg}\left(\frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad (2) \text{ نقطة من المستوى لاحقها } Z_D \text{ حيث:}$$

يُبين أن المثلث ABD متقايس الأضلاع و احسب Z_D .

(3) احسب Z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثم عيّن نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D .

(4) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z (M تختلف عن C) بحيث: $\text{Arg}\left(\frac{Z_G - Z}{Z_C - Z}\right) = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- g الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ ب:

$$g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$$

كما هو مبين في الشكل المقابل:

- احسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ ب:

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$$

إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$(1) \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و بيّن أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

ثم فسّر النتيجة بيانيا.

$$(2) \text{ أ) بيّن أنه من أجل كل } x \text{ من }]0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

$$(3) \text{ بيّن أن } y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1} \text{ هي معادلة لـ } (T) \text{ مماس المنحنى } (C_f) \text{ في نقطة تقاطعه مع حامل محور}$$

الفواصل، ثم ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f) .

$$(4) \text{ عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي } m \text{ بحيث تقبل المعادلة } (e-1)f(x) = e^2x - me \text{ حلين متميزين.}$$

III- n عدد طبيعي حيث $n > 1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f)

والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = n$ و $x = 1$.

$$(1) \text{ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n > 1 : I_n = \ln(1 + n \ln n)$$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (I_n) .

انتهى الموضوع الثاني