النهايات والاستمرارية

1- نهايات دوال مألوفة

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \lvert x\rvert=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \lvert x\rvert=+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0^+$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0^-$
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \frac{1}{x}=+\infty$	$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} \frac{1}{x}=-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$	$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \sqrt{x}=0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} [ax+b]=+\infty(a>0)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} [ax+b]=-\infty(a>0)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} [ax+b]=-\infty(a<0)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} [ax+b]=+\infty(a<0)$

2- التفسير الهندسي للنهايات

النهاية	تفسيرها الهندسي
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=a$	$(\mathbf{C_f})$ يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=a$ بجوار $\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$	$(\mathbf{C_f})$ يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=x_0$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty\,(\mp\infty)$	$(\mathbf{C_f})$ قد يقبل مستقيم مقارب مائل له معادلة من الشكل $y=ax+b$ بجوار $\pm\infty$

إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathbf{C_f})$ بجوار $\pm\infty$

3- العمليات على النهايات

فيما يلي يمثل a عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$

أ- نهاية مجموع دالتين

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$l+l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	ح.ع.ت

ب- نهاية جداء دالتين

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l\neq 0$	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)$	$l\times l'$	∞	∞	ح.ع.ت

الإشارة تعين حسب قواعد إشارة الجداء

ج- نهاية حاصل قسمة دالتين

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$l\neq 0$	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	∞	0	l'	∞	0
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	0	∞	∞	ح.ع.ت	ح.ع.ت

الإشارة تعين حسب قواعد إشارة حاصل قسمة

4- بعض طرق إزالة حالات عدم التعيين

1- الاختزال 2- التحليل 3- المرافق 4- العدد المشتق 5- المقارنة 6- الحصر ▪

5- الاستمرارية

تعريف:

▪ f مستمرة عند قيمة x_0 معناه $f(x_0)$ معرفة و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0} f(x)=f(x_0)$

▪ f مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ معناه f مستمرة عند كل قيمة x_0 من هذا المجال ▪

6- تطبيقات مبرهنة القيم الوسطى

حالة 1:

▪ f معرفة، مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a,b]$

▪ k عدد حقيقي محصور تماما بين $f(a)$ و $f(b)$

حسب مبرهنة القيم الوسطى المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]a,b[$

تفسير هندسي: المنحنى $(\mathbf{C_f})$ يقطع مستقيم معادلته $y=k$ في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]a,b[$

حالة 2:

▪ f معرفة، مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a,b]$

▪ $f(a)\times f(b)<0$

حسب مبرهنة القيم الوسطى المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]a,b[$

تفسير هندسي: المنحنى $(\mathbf{C_f})$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]a,b[$

ملاحظة:

إذا كان المجال غير محدود مثلا $]a,+\infty[$ فإننا نكتب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ بدلا من الصورة $f(b)$ أي :

$$f(a)\times\lim_{x\to+\infty} f(x)<0$$