الثّلاثاء 18 جويلية 2017

المسألة 1. لكلّ عدد صحيح $a_0 > 1$ ، نعرّف المتتالية a_0 ، a_1 ، a_2 ، ... كما يلي:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{إذا كان } \sqrt{a_n} \text{ عددا صحيحا} \\ a_n + 3 & \text{إذا لم يكن كذلك} \end{cases} \qquad \text{لكلّ } n \geqslant 0.$$

حدّد كلّ قيم a_0 التّي من أجلها يوجد عدد A يحقّق $a_n = A$ لعدد غير منته من قيم n.

المسألة 2. لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقيّة. حدّد كلّ الدّوال $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ التّي تحقّق، لكلّ عددين حقيقيّين x و y:

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

المسألة 3. هناك أرنب غير مرئي وصيّاد يلعبان في المستو الإقليدي اللّعبة التّالية: نقطة انطلاق الأرنب A_0، ونقطة انطلاق الصّيّاد B_0، متطابقتان. بعد مرور $n-1$ جولة من اللّعبة، يتواجد الأرنب في نقطة A_{n-1} ويتواجد الصّيّاد في نقطة B_{n-1}. في الجولة n من اللّعبة، تحدث الأمور الثّلاثة التّالية على التّرتيب:

ا. يتنقّل الأرنب دون أن يُرَى إلى نقطة A_n بحيث تكون المسافة بين A_{n-1} و A_n تساوي 1 بالضّبط.

ب. لدى الصّيّاد جهاز ملاحقة يدلّه على نقطة P_n. الشّيء الوحيد الذّي يستطيع الصّيّاد أن يضمنه من دقّة جهازه هو أنّ المسافة بين A_n و P_n لا تزيد عن 1.

ج. يتنقّل الصّيّاد علنا إلى نقطة B_n بحيث تكون المسافة بين B_{n-1} و B_n تساوي 1 بالضّبط.

هل يمكن دائما للصّيّاد، مهما كانت تنقّلات الأرنب، وأيّا كانت النّقط التّي يرصدها له جهازه، أن يختار خطواته بحيث يستطيع أن يضمن أنّه بعد 10^9 جولة من اللّعبة لا تزيد المسافة بينه وبين الأرنب على 100 ؟

Language: Arabic (Algerian)

الوقت المتاح: 4 ساعات و30 دقيقة
7 درجات لكلّ مسألة

الأربعاء 19 جويلية 2017

المسألة 4. لتكن R و S نقطتين مختلفتين على دائرة Ω بحيث لا تكون القطعة المستقيمة $[RS]$ قطرا لها. ليكن ℓ المستقيم الماس للدّائرة Ω عند R. النّقطة T هي الّتي لأجلها تكون S منتصف القطعة المستقيمة $[RT]$. تمّ اختيار نقطة J على القوس القصير $\widehat{RS}$ للدّائرة Ω بحيث تتقاطع الدّائرة Γ المحيطة بالمثلّث JST مع ℓ في نقطتين مختلفتين. لتكن A النّقطة المشتركة بين Γ و ℓ الأقرب من R. يقطع المستقيم (AJ) الدّائرة Ω مرّة ثانية في K. أثبت أنّ المستقيم (KT) مماسّ للدّائرة Γ.

المسألة 5. لدينا عدد صحيح $N \geqslant 2$. هناك مجموعة مكوّنة من $N(N+1)$ لاعبي كرة القدم واقفين في صفّ، لا يوجد من بينهم لاعبان لهما نفس القامة. يريد المدرّب أن يستبعد $N(N-1)$ لاعبا من هذا الصّف بحيث يبقى في الصّف $2N$ لاعبا تتحقّق فيهم الشّروط التّالية الّتي عددها N، باعتبار قامات اللّاعبين المتبقّين فقط:

(1) لا يوجد أيّ لاعب يقف بين أوّل وثاني أطول لاعبين،

(2) لا يوجد أيّ لاعب يقف بين ثالث ورابع أطول لاعبين،

$\vdots$

(N) لا يوجد أيّ لاعب يقف بين أقصر لاعبين.

بين أنّ هذا ممكن دائما.

المسألة 6. نسمّي الثّنائيّة المرتّبة (x,y) المكوّنة من عددين صحيحين **نقطة أصليّة** إذا كان القاسم المشترك الأكبر لـ x و y يساوي 1. لتكن S مجموعة منتهية من نقط أصليّة. أثبت أنّه يوجد عدد صحيح موجب تماما n وأعداد صحيحة a_0، a_1، ...، a_n تحقّق: لكلّ (x,y) في S، لدينا

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Language: Arabic (Algerian)

الوقت المتاح: 4 ساعات و30 دقيقة

7 درجات لكلّ مسألة