الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الشعبة: **علوم تجريبية** | **نموذج 01 مقترح للبكالوريا** | دورة: **جوان 2017**

مقترح من طرف الاساتذة : حجاج براهيم +يوسف يوسف + بلفاطمي محمد سفيان

اختبار في مادة : **الرياضيات** | المدة: **02 سا و30 د**

التمرين الأول: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط A، B، C و شعاع $\vec{n}$ معرفة بـ: $A(3;4;1)$

$\overrightarrow{AC}(1;2;1)$، $\overrightarrow{BC}(-3;1;1)$، $\vec{n}(1;-4;7)$

1) أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و حدد *طبيعة المثلث* ABC ثم أحسب مساحته .

2) لتكن (P) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق $(\alpha\in\mathbb{R})$ $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=\alpha$.

أ) حدد طبيعة و عناصر المميزة لـ (P).

ب) عين قيمة α حتى يشمل (P) النقط A ، B و C .

3) لتكن G مركز ثقل المثلث ABC

عين بدلالة t تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من النقطة G و العمودي على المستوي (ABC)

4) لتكن F النقطة كيفية من (Δ) و $v(t)$ حجم الرباعي الوجوه $ABCF$

عين مجموعة النقط F بحيث $v(t)\le 27$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n$

1) أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n\succ 0$.

ب) أدرس اتجاه التغير المتتالية (u_n) ثم أستنتج أنها متقاربة .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم كما يلي: $v_n=\frac{u_n}{n}$

أثبت أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

3) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن $u_n=\frac{n}{2^n}$.

4) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\ln x-x\ln 2$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$ و أكتب على الحلول على الشكل الأسي

2) ينسب المستوي المركب إلي معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C لواحقها:

$z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -z_A$ على الترتيب .

أحسب z_D لاحقة النقطة D حيث D مرجح الجملة $\{(A;-1);(B;+1);(C;+1)\}$ محددا طبيعة الرباعي $ABDC$.

3) أحسب $\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2017}$. $\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1962}$. $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{1954}$.

4) أ) بين مجموعة النقط (Γ) معرفة بـ : $(z - z_A)(\overline{z} - z_B) = z_C.\overline{z_C}$ هي دائرة يطلب تعين عناصرها المميزة و حساب مساحتها

ب) عين (Γ') صورة الدائرة (Γ) بالتحاكي h الذي مركزه A و نسبته 2 .

ج) لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $(k \in \mathbb{Z})$ $\arg(\overline{z} - z_A) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

عين طبيعة المجموعة (E).

التمرين الرابع : (07 نقاط)

g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - x + e^{x-2}$

1) أ) أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

ب) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \geq 0$.

2) لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + xe^{2-x}$ (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

بين أن $\lim_{x \to +\infty} xe^{2-x} = 0$ ثم أحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف .

3) ليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ ،

بين أن (Δ) مستقيم مقارب مائل و أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة الى (Δ).

4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{2-x}.g(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها.

5) ليكن α عدد حقيقي حيث: $0,1 \prec \alpha \prec 0,2$ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ثم استنتج حلول المتراجحة $e^{2-x}. \geq \frac{1-\alpha}{\alpha}$.

6) أ) بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب كتابة معادلة المماس (T) عندها .

ب) أنشئ (C) و (Δ) و (T).

7) ناقش حسب قيم الوسيط m حلول المعادلة : $f(x) = x + m$

تصحيح لموضوع نموذج مقترح 01 لشعبة علوم تجريبية

مقترح من طرف الأساتذة : حجاج براهيم +يوسف يوسف + بلفاطمي محمد سفيان

حل التمرين الأول: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط A ، B ، C و شعاع $\vec{n}$ معرفة بـ: $A(3;4;1)$

$\overrightarrow{AC}(1;2;1)$ ، $\overrightarrow{BC}(-3;1;1)$ ، $\vec{n}(1;-4;7)$

1) حساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و تحدد طبيعة المثلث ABC ثم حساب مساحته .

طريقة 1 : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC}$

لدينا $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$ و منه $AC^2=1+4+1=6$

و كذالك $\overrightarrow{BC}(-3;1;1)$ و بالتالي $\overrightarrow{CB}(3;-1;-1)$ إذن ينتج $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC}=+3-2-1=0$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC}=6+0=6$$

تحدد طبيعة المثلث ABC

بما أن $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC}=+3-2-1=0$ ومنه المثلث ABC قائم في النقطة C

طريقة 2 : أولا نعين احدثيات النقطتان B و C :

لدينا $\overrightarrow{AC}(1;2;1)$ وكذلك $\overrightarrow{AC}(x_c-3;y_c-4;z_c-1)$ و منه $\begin{cases}x_c-3=1\\y_c-4=2\\z_c-1=1\end{cases}$ فنجد $\begin{cases}x_c=1+3=4\\y_c=2+4=6\\z_c=1+1=2\end{cases}$

اذن $C(4;6;2)$.

لدينا $\overrightarrow{BC}(-3;1;1)$ وكذلك $\overrightarrow{BC}(x_c-x_B;y_c-y_B;z_c-z_B)$ و منه $\overrightarrow{BC}(4-x_B;6-y_B;2-z_B)$

$\begin{cases}4-x_B=-3\\6-y_B=1\\2-z_B=1\end{cases}$ فنجد $\begin{cases}x_B=4+3=7\\y_B=6-1=5\\z_B=2-1=1\end{cases}$ اذن $B(7;5;1)$

اذن نحسب شعاع $\overrightarrow{AB}$ نجد $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.و منه $\overrightarrow{AB}(7-3;5-4;1-1)$

و منه $\overrightarrow{AB}(4;1;0)$ فنجد $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=4+2+0=6$

طريقة 3 : لتحدد طبيعة المثلث ABC يمكن حساب اطول و نجد

$AC=\sqrt{6}$ و $BC=\sqrt{11}$ و $AB=\sqrt{17}$ و منه نلاحظ أن $BC^2+AC^2=11+6=17=AB^2$

حساب مساحته $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BC.AC=\dfrac{1}{2}\sqrt{11}.\sqrt{6}=\dfrac{\sqrt{66}}{2}(ua)$.

2) لتكن (P) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق $(\alpha\in\mathbb{R})$ $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=\alpha$.

أ) تحدد طبيعة و العناصر المميزة لـ (P).

$(\alpha \in \mathbb{R})$ $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=\alpha$ مع $\overrightarrow{AM}(x-3;y-4;z-1)$ و $\vec{n}(1;-4;7)$

$(\alpha \in \mathbb{R})$ $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=\alpha$ يكافئ $1(x-3)-4(y-4)+7(z-1)=\alpha$ نجد $x-4y+7z-3+16-7-\alpha=0$

اذن $x-4y+7z+6-\alpha=0$ و بالتالي مجموعة (P) عبارة المستوي شعاعه ناظمي $\vec{n}(1;-4;7)$

ب) تعيين قيمة α حتى يشمل (P) النقط A ، B و C.

طريقة 1 : نعوض احداثيات النقط A و B و C نجد قيمة $\alpha=0$ هي التي تحقق دوما .

طريقة 2 : لدينا (P) التي تحقق $(\alpha \in \mathbb{R})$ $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=\alpha$ حتى تكون النقطة A من (P) فان $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

معناه $\alpha=0$ معناه يجب ان نثبت أن $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{BC}$

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AC}=1-8+7=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{BC}=-3-4+7=0\end{cases}$$

3) لتكن G مركز ثقل المثلث ABC معناه G مرجح الجملة $\{(A;+1);(B;+1);(C;+1)\}$

$$\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{3+7+4}{3}=\dfrac{14}{3}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{4+5+6}{3}=\dfrac{15}{3}=5\\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{1+1+2}{3}=\dfrac{4}{3}\end{cases}$$ اذن $G\left(\dfrac{14}{3};5;\dfrac{4}{3}\right)$

تعيين بدلالة t تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من النقطة G و العمودي على المستوي (ABC)

لتكن $M(x;y;z)$ من الفضاء

$M\in(\Delta)$ يكافئ $(t\in\mathbb{R})$ $\overrightarrow{GM}=t\vec{n}$. فنجد $(t\in\mathbb{R})$ $$\begin{cases}x=\dfrac{14}{3}+t\\ y=5-4t\\ z=\dfrac{4}{3}+7t\end{cases}$$

4) لتكن F النقطة كيفية من (Δ) و $v(t)$ حجم الرباعي الوجوه $ABCF$

تعيين مجموعة النقط F بحيث $v(t)\leq 27$

F النقطة كيفية من (Δ)معناه $(t\in\mathbb{R})$ $F\left(\dfrac{14}{3}+t;5-4t;\dfrac{4}{3}+7t\right)$

و حجم الرباعي الوجوه $ABCF$ هو $v(t)=\dfrac{1}{3}S_{ABC}\times d[(P);F]$

مع $$d[(P);F]=\frac{|x_F-4y_F+7z_F+6|}{\sqrt{1+16+49}}=\frac{\left|\left(\frac{14}{3}+t\right)-4(5-4t)+7\left(\frac{4}{3}+7t\right)+6\right|}{\sqrt{66}}=\frac{\left|\frac{14}{3}+t-20+16t+\frac{28}{3}+49t+6\right|}{\sqrt{66}}$$

$$d[(P);F]=\frac{\left|\frac{42}{3}+66t-14\right|}{\sqrt{66}}=\frac{|66t|}{\sqrt{66}}=\frac{66|t|}{\sqrt{66}}=\sqrt{66}|t|$$

و منه (uv) $v(t)=\frac{1}{3}S_{ABC}\times d\left[(P);F\right]=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{66}}{2}\times\sqrt{66}|t|=11|t|$

لدينا $v(t)\le 27$ معناه $11|t|\le 27$ و منه $-27\le 11t\le +27$ فنجد $\frac{-27}{11}\le t\le\frac{+27}{11}$ إذن مجموعة نقط عبارة عن القطعة من المستقيم (Δ) مع $\frac{-27}{11}\le t\le\frac{+27}{11}$ ما عدا النقطة G من اجل $t=0$ لأنه لا يكون $ABCF$ رباعي وجوه و تكون النقطة G مع النقط A ، B ، C من النفس المستوي

أو نقول القطعة المستقيم ماعدا النقطة G حيث $\left(t\in\left[\frac{-27}{11};\frac{+27}{11}\right]-\{0\}\right)$ $\begin{cases}x=\frac{14}{3}+t\\ y=5-4t\\ z=\frac{4}{3}+7t\end{cases}$

حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n$

1) أ) برهان أنّ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n\succ 0$.

مرحلة 1 : نتحقق من صحتها من أجل $n=1$: لدينا $u_1=\frac{1}{2}\succ 0$ ومنه خاصية محققة من اجل $n=1$

مرحلة 2 : نفرض أنها صحيحة من اجل n أي $u_n\succ 0$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي أن $u_{n+1}\succ 0$

بما أن $n\succ 0$ و منه $2n\succ 0$ و كذلك $n\succ 0$ معناه $n+1\succ 1\succ 0$

$\begin{cases}n+1\succ 0\\ 2n\succ 0\end{cases}$ و منه $\frac{n+1}{2n}\succ 0$

إذن لدينا $\begin{cases}\frac{n+1}{2n}\succ 0\\ u_n\succ 0\end{cases}$ فنجد $\frac{n+1}{2n}u_n\succ 0$ و بالتالي $u_{n+1}\succ 0$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\succ 0$.

ب) دراسة اتجاه التغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{2n}u_n-u_n=\left(\frac{n+1}{2n}-1\right)u_n=\left(\frac{n+1-2n}{2n}\right)u_n=\left(\frac{1-n}{2n}\right)u_n$$

بما $n\ge 1$ و منه $-n\le -1$ منه $1-n\le 0$ فينتج $\left(\frac{1-n}{2n}\right)\le 0$ يعني $u_{n+1}-u_n\le 0$

إذن المتتالية (u_n) متناقصة .

استنتاج أنها متقاربة .

بما أن (u_n) متناقصة و محدودة من أسفل بالعدد 0 فهي متقاربة

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم كما يلي: $v_n=\frac{u_n}{n}$

إثبات أن (v_n) هندسية و تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n\times\frac{1}{n+1}=\frac{u_n}{2n}=\frac{1}{2}\times\frac{u_n}{n}=\frac{1}{2}v_n$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_1=\frac{u_1}{1}=\frac{1}{2}$

3) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن $u_n=\frac{n}{2^n}$.

بما أن (v_n) متتالية هندسية فان $v_n=v_1\times q^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$

لدينا $v_n=\frac{u_n}{n}$ و منه $u_n=n.v_n=n.\frac{1}{2^n}=\frac{n}{2^n}$

4) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\ln x-x\ln 2$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[\ln x-x\ln 2]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{\ln x}{x}-\ln 2\right]=(+\infty)(0-\ln 2)=-\infty$$

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا $u_n=\frac{n}{2^n}$ و منه $\ln[u_n]=\ln\left[\frac{n}{2^n}\right]=\ln n-\ln 2^n=\ln n-n\ln 2=f(n)$

إذن $\ln[u_n]=f(n)$ و منه $u_n=e^{f(n)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{f(n)}=0$ (لأنه $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=-\infty$)

حل التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) حلول المعادلة $z^2=2+2i\sqrt{3}$ و كتابة على الحلول على الشكل الأسي

طريقة 1 : الشكل الجبري

$$\begin{cases}x^2-y^2=2.................(1)\\2xy=2\sqrt{3}.................(2)\\x^2+y^2=4.................(3)\end{cases}$$
و منه بالجمع 1 و 3 نجد $2x^2=6$ و بالتالي $x^2=3$

إما $x_1=\sqrt{3}$ نعوض في 2 نجد $2x_1y_1=2\sqrt{3}$ نجد $2\sqrt{3}y_1=2\sqrt{3}$ و منه $y_1=1$ فيصبح $z_1=\sqrt{3}+i$

إما $x_2=-\sqrt{3}$ نعوض في 2 نجد $2x_2y_2=2\sqrt{3}$ نجد $-2\sqrt{3}y_2=2\sqrt{3}$ و منه $y_2=-1$ فيصبح $z_2=-\sqrt{3}-i$

$z_1=\sqrt{3}+i=\left[2;\frac{\pi}{6}\right]=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $z_2=-\sqrt{3}-i=\left[2;\frac{7\pi}{6}\right]=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

طريقة 1 : الشكل المثلثي

$$2+2i\sqrt{3}=2\left(1+i\sqrt{3}\right)=4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left[4;\frac{\pi}{3}\right]=4e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ولدينا $z=[r;\theta]=re^{i\theta}$ و منه $z^2=\left(re^{i\theta}\right)^2=r^2e^{i2\theta}=\left[r^2;2\theta\right]$

لينا $z^2=2+2i\sqrt{3}$ و منه $\left[r^2;2\theta\right]=\left[4;\frac{\pi}{3}\right]$ و منه $\begin{cases}r^2=4\\2\theta=\frac{\pi}{3}+2\pi k\quad(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$ و منه $\begin{cases}r=2\\\theta=\frac{\pi}{6}+\pi k\quad(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$

إذن $\begin{cases} k=0 \\ r=2 \\ \theta_1=\dfrac{\pi}{6} \\ z_1=\left[2;\dfrac{\pi}{6}\right]=2e^{i\frac{\pi}{6}} \end{cases}$ و $\begin{cases} k=1 \\ r=2 \\ \theta_2=\dfrac{\pi}{6}+\pi=\dfrac{7\pi}{6} \\ z_2=\left[2;\dfrac{7\pi}{6}\right]=2e^{i\frac{7\pi}{6}} \end{cases}$

2) ينسب المستوي المركب إلي معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. نعتبر النقط A ، B و C لواحقها:

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ على الترتيب .

حساب z_D لاحقة النقطة D حيث D مرجح الجملة $\{(A;-1);(B;+1);(C;+1)\}$

$$z_D=\frac{-z_A+z_B+z_C}{-1+1+1}=\frac{-\sqrt{3}-i+\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-i}{1}=-\sqrt{3}-3i$$

تحديد طبيعة الرباعي $ABDC$.

لدينا $z_D=-z_A+z_B+z_C$ و منه $z_D-z_C=z_B-z_A$ و منه $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ إذن الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع

او يمكن استعمال طريقة أخري D مرجح معناه $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ منه $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ نجد $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{DC}$ و بالتالي $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ و منه $ABDC$ متوازي الأضلاع

3) حساب $\left(\dfrac{z_A}{2}\right)^{1954}\cdot\left(\dfrac{z_B}{2}\right)^{1962}\cdot\left(\dfrac{z_C}{2}\right)^{2017}$.

طريقة 1 :

$$\left(\frac{z_A}{2}\right)^{1954}=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2}\right)^{1954}=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{1954}=e^{i\frac{1954\pi}{6}}=e^{i\frac{977\pi}{3}}=e^{i\frac{978\pi-\pi}{3}}=e^{i\left(\frac{978\pi-\pi}{3}\right)}=e^{i\left(326\pi-\frac{\pi}{3}\right)}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1962}=\left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2}\right)^{1962}=\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{1962}=e^{-i\frac{1962\pi}{6}}=e^{-i327\pi}=e^{-i(326\pi+\pi)}=e^{-i\pi}$$

$$\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2017}=\left(\frac{2e^{i\frac{7\pi}{6}}}{2}\right)^{2017}=\left(e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^{2017}=e^{i\frac{2017\times7\pi}{6}}=e^{i\frac{14119\pi}{6}}=e^{i\left(2353\pi+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\left(\frac{z_A}{2}\right)^{1954}\cdot\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1962}\cdot\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2017}=e^{-i\frac{\pi}{3}}\times e^{-i\pi}\times e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}-\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{-i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

طريقة 2 :

$$\left(\frac{z_A}{2}\right)^{1954}=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2}\right)^{1954}=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{1954}=e^{i\frac{1954\pi}{6}}=e^{i\frac{977\pi}{3}}=e^{i\frac{978\pi-\pi}{3}}=e^{i\left(\frac{978\pi-\pi}{3}\right)}=e^{-i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1962}=\left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2}\right)^{1962}=\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{1962}=e^{-i\frac{1962\pi}{6}}=e^{-i327\pi}=e^{-i(326\pi+\pi)}=e^{-i\pi}=-1$$

$$\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2017}=\left(\frac{2e^{i\frac{7\pi}{6}}}{2}\right)^{2017}=\left(e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^{2017}=e^{i\frac{2017\times7\pi}{6}}=e^{i\frac{14119\pi}{6}}=e^{i\left(2353\pi+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$\left(\frac{z_A}{2}\right)^{1954}\cdot\left(\frac{z_B}{2}\right)^{1962}\cdot\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2017}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i-\frac{3}{4}i+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

4) أ) إثبات أن مجموعة النقط (Γ) معرفة بـ : $(z-z_A)(\overline{z}-z_B)=z_C.\overline{z_C}$ هي دائرة يطلب

$(z-z_A)(\overline{z}-z_B)=z_C.\overline{z_C}$ و منه $(z-z_A)\left(\overline{z-\overline{z_B}}\right)=|z_C|^2$ فان $(z-z_A)\left(\overline{z-z_A}\right)=|z_C|^2$

$|z-z_A|^2=4$ ومنه $|z-z_A|=2$ و منه $AM=2$

مجموعة عبارة عن الدائرة مركزها A و نصف قطرها $R=2$

ومنه مساحتها $S=\pi R^2=4\pi(ua)$ تعين عناصرها المميزة و حساب مساحتها

ب) تعيين (Γ') صورة الدائرة (Γ) بالتحاكي h الذي مركزه A و نسبته 2 .

مركز الدائرة (Γ') هو نفسه A (مركز تحاكي هو نفسه مركز الدائرة (Γ) نقطة صامدة)

و نصف قطرها R' حيث $R'=2R=2\times2=4$

ج) لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $\arg\left(\overline{z}-z_A\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

تعيين طبيعة المجموعة (E)

$\arg\left(\overline{z}-z_A\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$ و منه $\arg\left(\overline{z-\overline{z_A}}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\arg\left(z-\overline{z}_A\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$ و منه $\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$ اذن مجموعة نقط عبارة عن نصف المستقيم مفتوح عند B و موازي لمحور الترتيب

حل التمرين الرابع : (07 نقاط)

g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-x+e^{x-2}$

1) أ) دراسة اتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها .

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[1-x+e^{x-2}\right]=1+\infty+0=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[1-x+e^{x-2}\right]=\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{x}-1+\frac{e^{x-2}}{x}\right]=+\infty$$

$g'(x)=-1+e^{x-2}$ و منه $-1+e^{x-2}=0$ و منه $e^{x-2}=1$ و منه $x=2$

إذا كان $x\in\left]-\infty;2\right[$ فان $g'(x)\prec 0$ و الدالة g متناقصة

إذا كان $x\in\left]2;+\infty\right[$ فان $g'(x)\succ 0$ و الدالة g متزايدة مع $g(2)=1-2+e^{2-2}=0$

g	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

ب) بيان أن من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)\geq 0$.

لدينا من جدول تغيرات الدالة g تقبل قيمة حدية الصغرى $g(x)\geq g(2)$ و منه $g(x)\geq 0$

2) لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-1+xe^{2-x}$ (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

إثبات أن $\lim_{x\to+\infty} xe^{2-x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{2-x}=\lim_{x\to+\infty} x\frac{e^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty} e^2\,\frac{x}{e^x}=e^2\times 0=0$$

حساب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x-1+xe^{2-x}\right]=-\infty-1-\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x-1+xe^{2-x}\right]=+\infty+0=+\infty$$

3) ليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ ،

إثبات أن (Δ) مستقيم مقارب مائل و دراسة وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (Δ).

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-1+xe^{2-x}-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[+xe^{2-x}\right]=0$ و منه (Δ) مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$.

دراسة وضعية : $f(x)-y=xe^{2-x}$

حالة 1 : $f(x)-y=0$ و منه $x=0$ إذن $(C)\cap(\Delta)=\left\{(0;-1)\right\}$

حالة 2 : $f(x)-y\succ 0$ و منه $x\in\left]0;+\infty\right[$ إذن (C) فوق (Δ)

حالة 3 : $f(x)-y \prec 0$ و منه $x\in]-\infty;0[$ إذن (C) تحت (Δ)

4) تبيان أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{2-x}.g(x)$

$$f'(x)=1+e^{2-x}-xe^{2-x}=e^{2-x}\left[\frac{1}{e^{2-x}}+1-x\right]=e^{2-x}\left[1-x+e^{x-2}\right]=e^{2-x}g(x)$$

إذن $f'(x)=e^{2-x}g(x)\geq 0$ إذن الدالة f متزايدة

تشكل جدول تغيراتها.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5) ليكن α عدد حقيقي حيث: $0,1\prec\alpha\prec 0,2$ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

بما أن f معرفة– مستمرة – متزايدة تماما علي مجال $]0,1;0,2[$ و $f(0.1)\prec 0$ و $f(0,2)\succ 0$

و 0 محصور بين $f(0.1)$ و $f(0,2)$ فإن حسب نظرية قيم متوسطة يوجد حلا وحيدا α علي المجال

$]0,1;0,2[$ حيث $f(\alpha)=0$

استنتج حلول المتراجحة $e^{2-x}.\geq\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$.

لدينا $f(\alpha)=0$ معناه $\alpha-1+\alpha e^{2-\alpha}=0$ و منه $e^{2-\alpha}=\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$

لدينا $\begin{cases} e^{2-x}\geq\dfrac{1-\alpha}{\alpha} \\ e^{2-\alpha}=\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\end{cases}$ و منه $e^{2-x}\geq e^{2-\alpha}$ و منه $2-x\geq 2-\alpha$ نجد $-x\geq-\alpha$

و بالتالي $x\leq\alpha$ معناه $x\in]-\infty;\alpha]$

6) أ) بيان أن (C) يقبل نقطة انعطاف

$$f''(x)=-e^{2-x}-e^{2-x}+xe^{2-x}=[-2+x]e^{2-x}$$

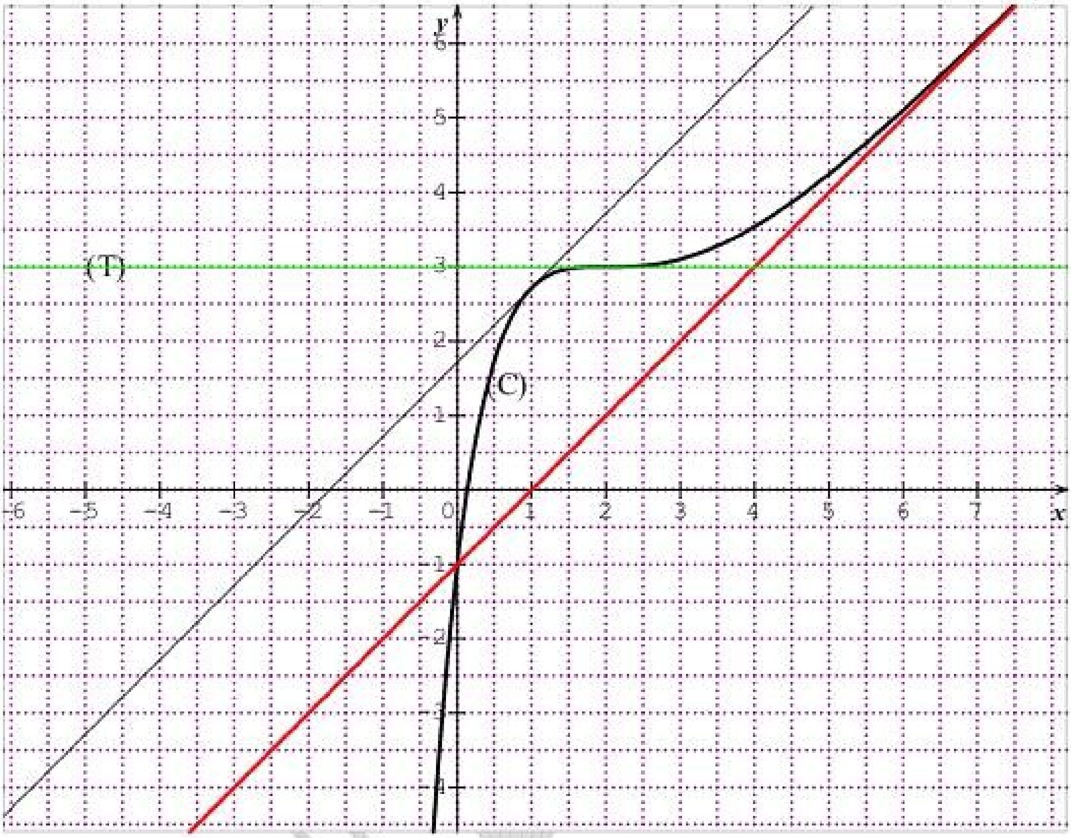
نلاحظ أن $f''(x)$ تنعدم عند 2 و تغير اشارتها و بالتالي نقطة انعطاف I عند النقطة التي فاصلتها 2 .

$$f(2)=2-1+2e^{2-2}=3$$

كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة $I(2;3)$.

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$ مع $f'(2)=0$ فنجد $y=3$

ب) إنشاء (C) و (Δ) و (T).



7) مناقش حسب قيم الوسيط m حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

حلول معادلة هي فواصل نقط تقاطع (C) مع مستقيمات ذات المعادلات من الشكل $\begin{cases} y=f(x) \\ y=x+m \end{cases}$

$y=x+m$ التي تكون متوازية و موازية لـ (Δ) مع m يمثل على المحور الترتيب و كذالك معامل توجيه 1

لذالك أولا نتطرق إلى هل يوجود مماسات معامل توجها 1 معناه حل المعادلة $f'(x)=1$

$1+e^{2-x}-xe^{2-x}=1$ و منه $(1-x)e^{2-x}=0$ و منه $x=1$

إذن نكتب معادلة مماس عند 1 : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $y=x-1+e$

حالة 1 : $m\in]-\infty;-1[$ حل واحد سالب

حالة 2 : $m=-1$ حل معدوم

حالة 3 : $m\in]-1;-1+e[$ حلين موجبين

حالة 4 : $m=-1+e$ حل موجب

حالة 5 : $m\in]-1+e;+\infty[$ لا يوجد حلول