تطور جملة ميكانيكية

الأستاذ : عايب كمال / بوسعادة

1– مقاربة تاريخية لميكانيك نيوتن :

1–1–نبذة تاريخية :

منذ الفيزياء الأكثر حسية لأرسطو إلى غاية الفيزياء النسبية و تنبؤات انشتاين ، كان لفهم حركات الأجسام و الفعل الجاذبي أثر كبير على الفكر ، تمخضت عنه ثلاث ثورات على الأقل . أبرزها كان فيها الإنتقال من النظام المركزي الأرضي $(gèocentrique)$ لأرسطو إلى النظام المركزي الشمسي لكوبرنيك ، و تفسير غاليلي و نيوتن للحركات .

** نظام أرسطو $Aristote(384-322)$م : ينقسم إلى ميكانيك أرضية و أخرى مثالية (علم الأجرام) ، بحيث أن الأرض هي المركز الهندسي للكون و كان وصفه مبنيا على الحدس ، بحيث يوجد نوعان من الحركات :

– حركات طبيعية كالسقوط الحر ، و حركة الكواكب – حركات عنيفة كالقذيفة مثلا .

** نظام بطليموس $Ptolémée(140)$م : إقترح نظام حركة الأجرام مبنيا على فلك التدوير $(épicycle)$ ، و فسر حركة الكواكب بالنسبة للمعلم الأرضي .

** نظام كوبرنيك $Copernic(1473-1543)$م : وضع فرضية النظام الهليومركزي $(héliocentrique)$ ، و أثار عدة إشكاليات حول حركة بعض الكواكب ، بحيث وضع 48 مسار دائري لحركة الكواكب .

** نظام كبلر $Kepler(1571-1630)$م : عمل بالنظام الهليومركزي ، و نشر سنة 1609قانونين :

– ترسم الكواكب مدارات اهليجية لا دائرية . – سرعتها ليست ثابتة .

بحيث عوض 48 دائرة بـ 7 إهليجات ووضع قانون بين المسافة بين الكوكب و الشمس و دور الحركة سوف نتطرق له في الدروس المقبلة .

** نظام غاليلي $Galilée(1564-1642)$م : إتبع كوبرنيك و شكك في المدارات الإهليجية و قدم البرهان القاطع الذي يفند كليا نظرية مركزية الرض ، فوضع قانون العطالة و بين أن التسارع ثابت في حقل الجاذبية الأرضية في شرحه للسقوط الحر .

** نظام نيوتن $Newton(1642-1727)$م : إعتمد على نظريات من سبقه فاستطاع ربط القوى المطبقة على جسم بتسارعه ، و قدم قانون الجذب العام و التجاذب الكوني ، و نتائجه القوانين الثلاثة لنيوتن .

1–2– بعض المفاهيم الأساسية :

أ–المرجع و المعلم : لدراسة حركة جسم ما وليكن المتحرك G

نحتاج إلى مرجع تنسب إليه الحركة ، و لتحديد مواضعه G

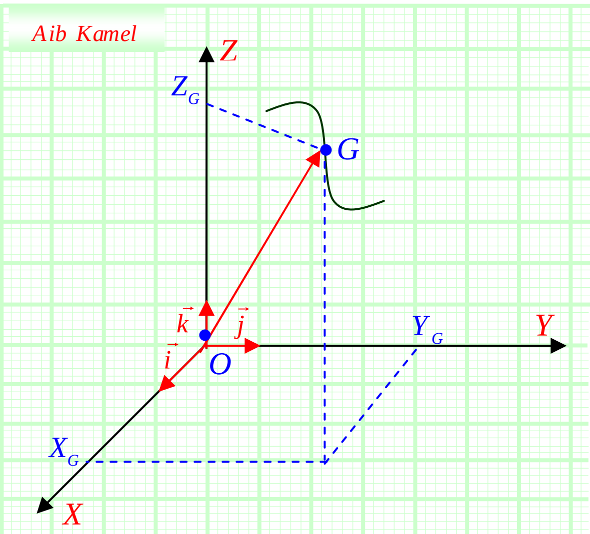
في الفضاء نحتاج إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، وساعة لقياس الزمن.

* هناك عدة مراجع منها :

– المراجع الغاليلية (العطالية)– المرجع الهليومركزي (الشمسي)

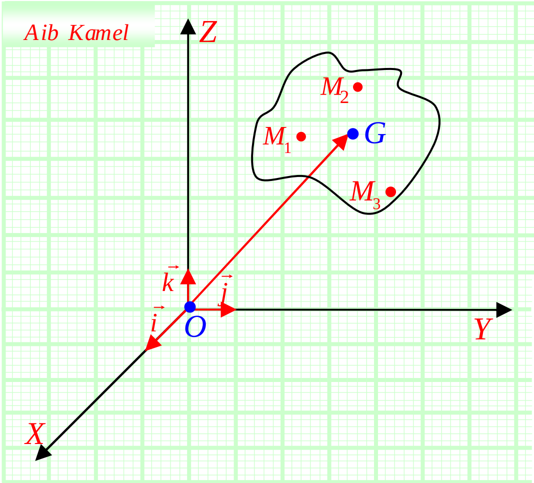
– المرجع الجيومركزي (الأرضي).– المرجع السطحي الأرضي .

* يمكن اعتبار الجملة نقطة مادية إذا كانت أبعادها مهملة أمام المرج الذي تنسب إليه الحركة .



ب- مفهوم مركز العطالة : في الجملة الشبه معزولة توجد على الأقل نقطة ساكنة أو تتحرك بحركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لمعلم غاليلي ، في ميكانيك نيوتن هذه النقطة تنطبق دائما على مركز الكتلة الذي يمثل مركز المسافات المتناسبة لمجموعة النقاط المادية $(M_1, M_2, M_3, ...)$ للجملة بحيث :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2 + m_2\overrightarrow{OM}_3 + ...}{\sum m_i}$$



1-2- بعض المفاهيم الأساسية :

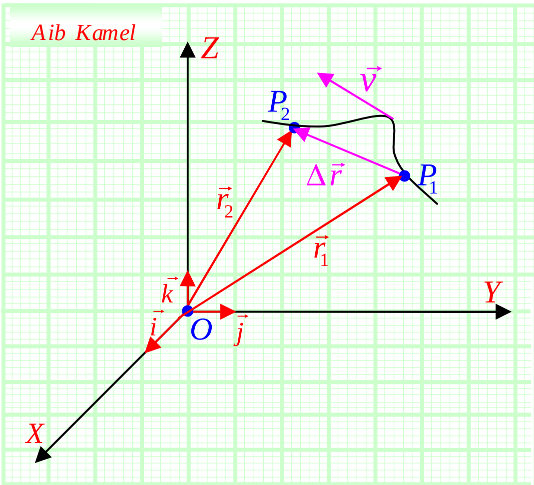
أ- مفهوم التسارع :

** شعاع الموضع : يكتب في الفضاء شعاع الموضع كمايلي :

$$\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

إذا انتقل جسم بين موضعين كما في الشكل فإن شعاع الموضع $\Delta\vec{r}$ يكتب :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta x.\vec{i} + \Delta y.\vec{j} + \Delta z.\vec{k}$$



** شعاع السرعة : يعرف كمايلي

- شعاع السرعة المتوسطة : $\vec{V}_{moy} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

- شعاع السرعة اللحظية : $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

أي : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}.\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k}$

قيمة السرعة في معلم كارتيزي هي : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

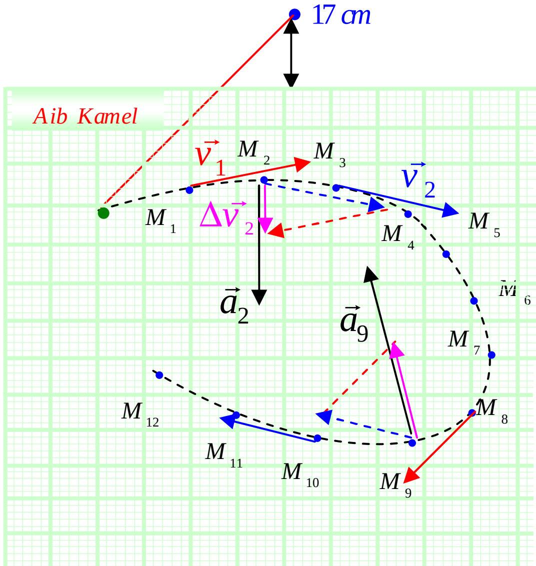
ب- القانون الأول لنيوتن (مبدأ العطالة): في المعالم العطالية أو الغاليلية يحافظ الجسم على سكونه أو حركته المستقيمة المنتظمة إذا لم تتدخل أي قوة لتغيير حالته الحركية أي : لما $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ فإن $\Delta\vec{v} = \vec{0}$ ومنه $v = cte$.

جـــ- القانون الثالث لنيوتن :

** تجربة : كيف نرسم شعاع التسارع ؟ (عمل مخبري) .

نقوم بالنشاط الموضح في الشكل 16 ص 240

و نمثل شعاع التسارع $\vec{a}$ لمركز عطالة الجملة في أية لحظة كما هو موضح في الشكل المقابل .



- في معلم معين و في لحظة معينة t يعرف شعاع التسارع لمركز عطالة جملة كمايلي : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_G}{\Delta t}$ وحدته (m/s^2).

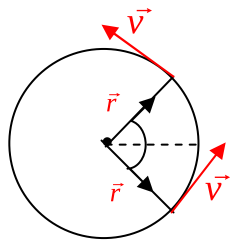
** عبارة القانون الثاني لنيوتن : في معلم غاليلي المجموع الشعاعي للقوة المؤثرة على جملة مادية يساوي في كل لحظة جداء كتلتها في شعاع تسارع مركز عطالتها بحيث : $\sum \vec{F}_{ex} = m.\vec{a}$.

د- القانون الثالث لنيوتن (مبدأ الفعلين المتبادلين): إذا أثرت جملة A على جملة B بقوة $\vec{F}_{A/B}$ فإن الجملة B تؤثر على الجملة A بقوة $\vec{F}_{B/A}$ تماثلها في الشدة و تزامنها و تعاكسها في الإتجاه و لهما نفس الحامل بحيث : $\vec{F}_{A/B}=-\vec{F}_{B/A}$.

2- شرح حركة كوكب أو قمر صناعي : محاكاة $TICE$.

2-1- شروط الحصول على حركة دائرية :

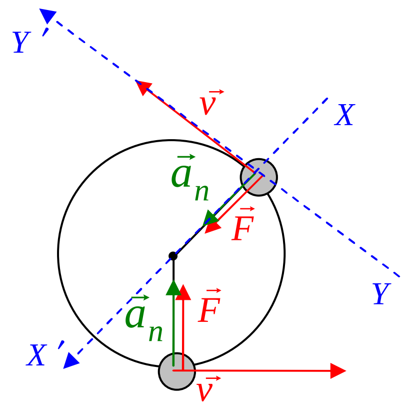
تكون الجملة المادية في حالة حركة دائرية منتظمة إذا كانت سرعتها الإبتدائية غير معدومة و كانت خاضعة لقوة مركزية (قوة عمودية على شعاع السرعة) .



2-2- عبارة التسارع الناظمي و دور الحركة :

تعطى عبارة التسارع الناظمي a_n كمايلي :
$$a_n=\frac{v^2}{r}$$

* دور الحركة هو المدة اللازمة لانجاز دورة واحدة أي قطع مسافة $2\pi\, r$ بحيث :
$$T=\frac{x}{v} \Leftarrow \quad ....(1) \quad T=\frac{2\pi\, r}{v} .$$



2-3- الحركة الدائرية المنتظمة للكواكب و الأقمار الإصطناعية :

أ- تفسير الحركة : نختار معلما بحيث يكون أحد محاوره ناظمي كما في الشكل

** باستعمال القانون الثاني لنيوتن نجد :

$\sum \vec{F}_{ex}=m\cdot\vec{a} \Leftarrow \vec{F}=m\cdot\vec{a}$ بالإسقاط على الناظم نجد :

$$F=m\cdot a_n \Leftarrow \quad ....(1)' \quad F=m\frac{v^2}{r}$$

** باستعمال قانون الجذب العام : $.............(2)' \quad F=G\times\frac{m\cdot M}{r^2}$ بحيث $G=6{,}67\times10^{-11}$: ثابت الجذب العام .

من $(1)'$ و $(2)'$ نجد $\cancel{m}\frac{v^2}{r}=G\times\frac{\cancel{m}\cdot M}{r^2} \Leftarrow v^2=G\times\frac{M}{r}$ ومنه نجد عبارة السرعة المدارية : $v_{orb}=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$

ومن العلاقة (1) نجد : $T=\frac{2\pi\, r}{v_{orb}}$ نتحصل على العلاقة $T^2=\frac{4\pi^2}{G\cdot M}r^3$

- في حالة كوكب يدور حول الشمس (S) : يكون : $v_{orb}=\sqrt{\frac{G\cdot M_S}{r}}$ ، $T^2=\frac{4\pi^2}{G\cdot M_S}r^3$

بحيث M_S : كتلة الشمس ، r : البعد بين الكوكب ومركز الشمس

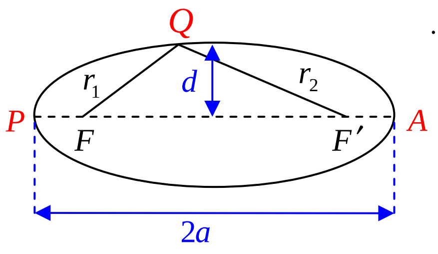
- في حالة قمر أصطناعي يدور حول الأرض (T) : يكون $v_{orb}=\sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r}}$ ، $T^2=\frac{4\pi^2}{G\cdot M_T}r^3=\frac{4\pi^2}{G\cdot M_T}(R_T+h)^3$

بحيث M_T : كتلة الأرض ، R_T : نصف قطر الأرض ، h : بعد القمر عن سطح الأرض .

** إن كتلة الكواكب و الأقمار لا تؤثر على السرعة المدارية و الدور .

2-4- قوانين كبلر :

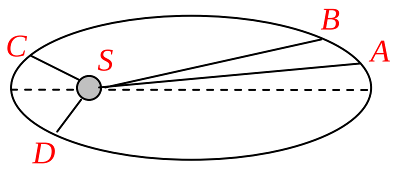
أ- القانون الأول : إن الكواكب تتحرك وفق مدارات اهليجية تمثل الشمس أحد محرقيها .



** الإهليج : هو منحنى يكون فيه مجموع المسافتين من نقطة منه إلى المحرقين F, F' ثابتا (قطع ناقص)

** المحور الكبير : $2a=r_1+r_2$

** المحور الصغير : $2d$.



ب– القانون الثاني : إن المستقيم الرابط بين الشمس و كوكب يمسح مساحات متساوية خلال مجالات زمنية متساوية .

** إذا كان المجالين الزمنيين للإنتقالين متساويين فإن سرعة الكوكب هي التي تتغير على مداره

جـــ– القانون الثالث : يتناسب مربع الدور لمدار كوكب مع مكعب البعد المتوسط للكوكب عن الشمس (نصف المحور الكبير)

بحيث : $T^2 = K \cdot a^3$ ، $K = cte$

2–5– استنتاج قانون الجذب العام من قانون كبلر :

من القانون الثالث لكبلر ومن عبارة الدور السابقة : $T^2 = K \cdot r^3 = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M} r^3$.

يمكن تحديد القوة المتسببة في الحركة الدائرية المنتظمة للأقمار و الكواكب ، علما أن $\left\{ v^2 = \dfrac{4\pi^2 r^2}{T^2} \ , \ T = \dfrac{2\pi r}{v}^3 \right\}$.

و حسب القانون الثاني لنيوتن : $F = m \cdot a_n = m\dfrac{v^2}{r} \Leftarrow F = \dfrac{4\pi^2 m}{Kr^3}$.................$(2)'$

بحيث m : كتلة الكوكب أو القمر الصناعي . K : يتعلق بكتلة الجسم المركزي M فقط فجميع مدارت الكواكب لها نفس الثابت.

* بالنسبة للكواكب : $K_S = \dfrac{4\pi^2}{GM_S}$ * بالنسبة للأقمار الإصطناعية : $K_T = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$.

بتعويض قيمة K في العلاقة $(2)'$ نجد : $F = \dfrac{4\pi^2 m}{Kr^3} = \dfrac{\cancel{4}\cancel{\pi}^2 mGM}{\cancel{4}\cancel{\pi}^2 r^2}$ ومنه نستنتج قانون الجذب العام : $F = G\dfrac{mM}{r^2}$

** **تمرين تدريبي :** أحسب قوة التجاذب بين الأرض و القمر حيث البعد بينهما : $d = 384\times10^6 m$

ولدينا : $\{R_L = 1,74\times10^6 m \ , \ R_T = 6,38\times10^6 m \ , \ M_L = 7,34\times10^{22} kg \ , \ M_T = 5,98\times10^{24} kg\}$.

** أحسب شدة الجاذبية على كل من سطحي الأرض و القمر ، ماذا تستنتج ؟

الحل : (1) – قوة التجاذب $F_{T/L} = F_{L/T} = G\dfrac{M_L M_T}{d^2}$ ت،ع : $F_{T/L} = F_{L/T} = 2\times10^{20} N$

(2) – شدة الجاذبية على سطح القمر و الأرض :

من القانون الثاني لنيوتن و قانون الجذب العام : $F = G\dfrac{mM}{d^2} = m \cdot a$ ومنه $g = a = G\dfrac{M}{d^2}$

** على سطح الأرض : $g_T = G\dfrac{M_T}{R_T^2} \Leftarrow g_T = 9,8 \ N/Kg$ ** على سطح القمر : $g_L = G\dfrac{M_L}{R_L^2} \Leftarrow g_L = 1,62 \ N/Kg$

نلاحظ أن : $g_T \rangle g_L$ أي : $g_T \simeq 6g_L$.

3– دراسة حركة السقوط الشاقولي لجسم صلب في الهواء :

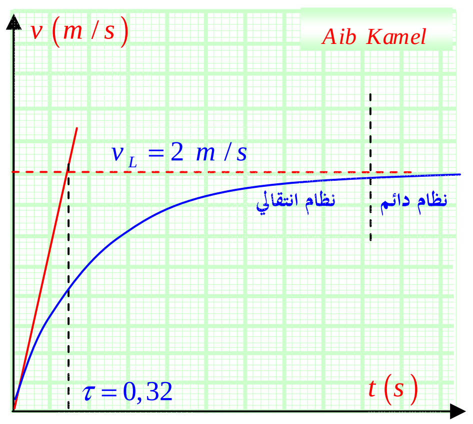
3–1– دراسة حركة السقوط الحقيقي لجسم صلب في الهواء : (عمل مخبري) .

** **التجربة :** نترك أربع بالونات مربوطة مثقلة بجسم كتلته $m = 19g$ و حجم $V = 5,4L$:

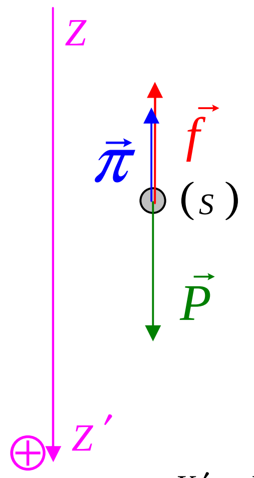
** عند القيام بالتجربة و تسجيل النتائج بواسطة برنامج مناسب نجد المنحنى $v = f(t)$ و نميز فيه نظامين .(إنتقالي و دائم) .

بحيث نجد السرعة الحدية $v_L = 2 \ m/s$.

الزمن المميز : $\tau = 0,32 \ s$



3-2- القوى المؤثرة على جسم صلب : القوى هي :



** الثقل : قوة تأثير الأرض $\vec{p}=m\cdot\vec{g}$.

** دافعة أرخميدس : يخضع لها كل جسم مغمور في مائع (هواء ، سائل).

قيمتها تساوي ثقل المائع المزاح : $\vec{\pi}=-\rho_f\cdot V\cdot\vec{g}$.

- ρ_f : الكتلة الحجمية للمائع (Kg/m^3) – V : حجم الجسم الصلب المتحرك (m^3) .

– g : تسارع الجاذبية (m/s^2) .

**قوى الإحتكاك $\vec{f}$: قوة مقاومة الهواء للجسم الساقط تزداد بزيادة السرعة

– في حالة السرعة الضعيفة $f=k\,v$ – و في حالة السرعات الكبيرة $f=k'v^2$ بحيث K , K' : ثابتان .

3-3- تطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم الصلب :

باختيار مرجع مناسب و بتطبيق القنون الثاني لنيوتن (الشكل السابق) نجد : $\sum\vec{F}_{ex}=m\cdot\vec{a}\;\Leftarrow\;\vec{P}+\vec{\pi}+\vec{f}=m\cdot\vec{a}$.

بالإسقاط على محور الحركة نجد : $P-\pi-f=m\cdot a$.

لدينا : $a=\dfrac{dv_z}{dt}\;\Leftarrow\;m\dfrac{dv_z}{dt}=mg-\rho_f Vg-f$ معادلة تفاضلية .

** لما $f=k\,v$ $\Leftarrow$ المعادلة من الشكل $\dfrac{d\,v_z}{d\,t}+\dfrac{k}{m}v=g\left(1-\dfrac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ حلها من الشكل : $v=\dfrac{mg}{k}\left(1-\dfrac{\rho_f}{\rho_S}\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$.

السرعة الحدية : $v_L=\dfrac{mg}{k}\left(1-\dfrac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ ، الزمن المميز : $\tau=\dfrac{m}{k}$.

** لما $f=k'v^2$ $\Leftarrow$ المعادلة من الشكل $\dfrac{d\,v_z}{d\,t}+\dfrac{k'}{m}v^2=g\left(1-\dfrac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ ، السرعة الحدية : $v_L=\sqrt{\dfrac{mg}{k'}\left(1-\dfrac{\rho_f}{\rho_S}\right)}$.

– v_L : تزداد بزيادة الكتلة الحجمية للجسم الصلب ρ_S . – تبلغ الحركة النظام الدائم (ثبات السرعة) لما $t\simeq 5\,\tau$.

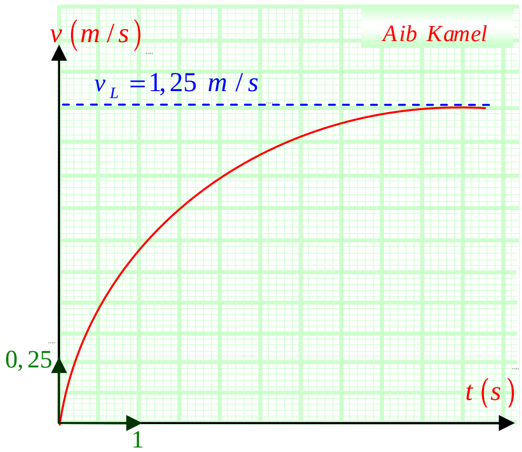
** تمرين تدريبي : نترك كرة صغيرة تسقط في الماء بحيث :

$\rho_{H_2O}=10^3\,g/m^3$ ، و كتلة الكرة $m=10g$ ،

ونصف قطرها $r=1\,cm$ و بأخذ $g=10\;m/s^2$ أوجد :

(1)– شدة دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ المؤثرة .

(2)– تسارع الحركة في اللحظة $t=1\,s$ و استنتج شدة محصلة القوى $\vec{F}$ المؤثرة على الكرة في تلك اللحظة ، و كذلك شدة قوة الإحتكاك الموافقة .



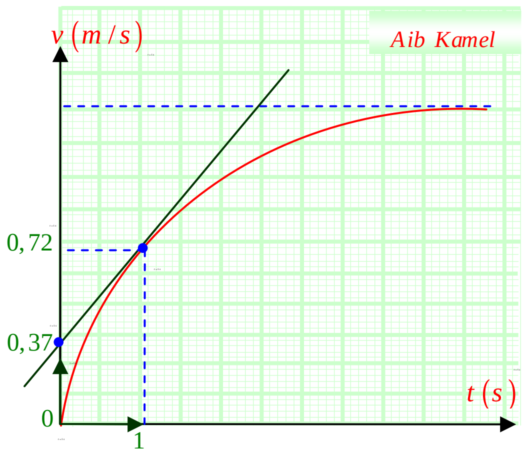
الحل : (1)– قيمة $\vec{\pi}$: شدتها مساوية لثقل السائل المزاح

$\pi=P_f=m_f\,g=\rho_f V_f\,g$ ، حجم السائل : $V_f=\dfrac{4}{3}\pi\,r^3\;\Leftarrow$

$V_f=\dfrac{4}{3}\times 3{,}14\times\left(10^{-2}\right)^3$ ت.ع : $\pi=0{,}042\;N$.

(2)– تسارع الحركة : التسارع a في اللحظة $t=1\,s$ هو ميل مماس البيان $v=f(t)$ في تلك اللحظة . ومنه نجد

$a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{0{,}72-0{,}37}{1-0}\;\Leftarrow\;a=0{,}35\;m/s^2$



** شدة محصلة القوى : حسب القانون الثاني لنيوتن فإن $\sum \vec{F}_{ex} = m \cdot \vec{a}$ بالإسقاط نجد : $\sum F = F = m \cdot a$

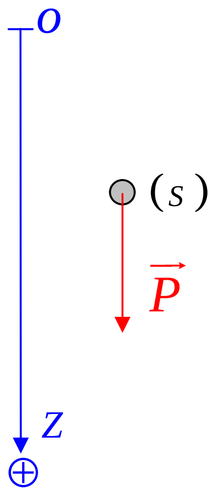
ومنه : $F = 10\times10^{-3}\times0,35 \Leftarrow F = 3,5\times10^{-3} N$.

** حساب قوى الإحتكاك : حسب القانون الثاني لنيوتن $\vec{F} = \vec{P} + \vec{\pi} + \vec{f}$ بالإسقاط نجد $f = P - F - \pi$.

ت.ع : $f = 10\times10^{-3}\times10 - 4,2\times10^{-2} - 3,5\times10^{-3} \Leftarrow f = 5,45\times10^{-2}$.

3-4- دراسة حركة السقوط الحر لجسم صلب بإهمال قوى الإحتكاك :

أ- قانون السقوط الحر : إن السقوط في الفراغ غير مرتبط بالكتلة في غياب مقاومة الهواء ، كل الأجسام تسقط بالتسارع نفسه ، مهما كان حجمها أو شكلها .



ب- حركة مركز عطالة جسم في سقوط حر :

** الدراسة التحريكية : بعد تمثيل القوى و بإهمال قوى الإحتكاك و اهمال $\vec{\pi}$ امام $\vec{P}$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم (s) نجد :

$\sum \vec{F}_{ex} = m \cdot \vec{a} \Leftarrow \vec{P} + \cancel{\vec{\pi}} + \cancel{\vec{f}} = m\ \vec{a}$ بالإسقاط على محور الحركة

$P = m\ a \Leftarrow m\ g = m\ a \Leftarrow$ (1)................. $a = g$

$a =$ ثابت $\leftarrow$ إذا الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

** الدراسة التحليلية : يجب تحديد الشروط الإبتدائية $t = 0$

لما $t = 0 \longleftarrow \{v_0 = 0\ ,\ z_0 = 0\}$.

** معادلة السرعة : $v(t) = \int a(t) \cdot dt$ بمكاملة العلاقة (1) نجد $v(t) = g \cdot t + c_1$.

نحدد c_1 من الشروط الإبتدائية بحيث $v(0) = g\times0 + c_1 = 0 \Leftarrow c_1 = 0$ ومنه معادلة السرعة (2)............ $v(t) = g \cdot t$

** معادلة المسافة : $z(t) = \int v(t) \cdot dt$ بمكاملة العلاقة (2) نجد $z(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + c_2$.

نحدد c_2 من الشروط الإبتدائية بحيث $z(0) = \frac{1}{2} g\times0^2 + c_2 = 0 \Leftarrow c_2 = 0$ ومنه معادلة (3)............ $z(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$

تمرين تدريبي : من نقطة O يقذف جسم شاقوليا نحو الأعلى بسرعة ابتدائية $v_0 = 40\ m/s$ في اللحظة $t = 0$ ، $(g = 10\ m/s^2)$

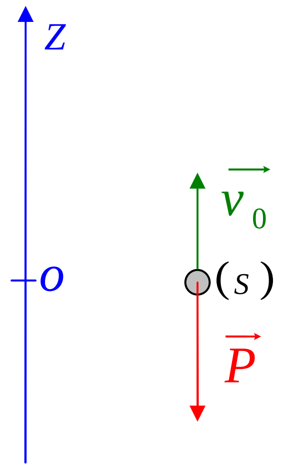
(1)- أوجد موقع هذا الجسم بعد $1\ s$ من قذفه ، ثم بعد $10\ s$.

(2)- حدد جهة حركة الجسم في اللحظة $t = 5\ s$.

(3)- ما هو أقصى ارتفاع يبلغه هذا الجسم ، و ما الزمن اللازم لذلك ؟

(4)- ماهي اللحظة t التي يصبح فيها الجسم أسفل نقطة القذف O بـــ : $2m$ ؟ - ماسرعته عندئذ ؟ .

حل التمرين :



الشروط الإبتدائية : لما $t = 0 \longleftarrow \{v_0 = 40m/s\ ,\ z_0 = 0\}$

معادلة الحركة : بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \vec{F}_{ex} = m \cdot \vec{a} \Leftarrow \vec{P} = m\ \vec{a}$

بالإسقاط على محور الحركة : $-P = m\ a \Leftarrow -m\ g = m\ a \Leftarrow$ (1)........ $a = -10$

معادلة السرعة : (2)............ $v(t) = -10 \cdot t + 40$

معادلة المسافة : (3)............ $z(t) = -5 \cdot t^2 + 40 \cdot t$

(1)- موقع الجسم

** لما $t = 1\ s$ من المعادلة (3) : $z(1) = -5\cdot(1)^2 + 40\cdot(1) \leftarrow z(1) = 35\ m$.

** لما $t=10\ s$ من المعادلة (3) : $z(10)=-5\cdot(10)^2+40\cdot(10) \leftarrow z(1)=-100\ m$. أي أسفل النقطة O بـ $100\ m$

(2)– جهة الحركة : تتعين بجهة شعاع السرعة :

** لما $t=5\ s$ من العلاقة (2) : $v(t)=-10\cdot(5)+40 \leftarrow v(5)=-10\ m/s$ الحركة تتم نحو الأسفل .

(3)– أقصى ارتفاع $\longleftarrow v=0$ من العلاقة (2) $v(t)=-10\cdot t+40=0 \leftarrow t=4\ s$

بالتعويض في العلاقة (3) نجد : $z(4)=-5\cdot(4)^2+40\cdot(4) \leftarrow z_{\max}=80\ m$.

(4)– إيجاد t لما $z=-2\ m$: من العلاقة (3) $z(t)=-5\cdot t^2+40\cdot t=-2 \Leftarrow z(t)=-5\cdot t^2+40\cdot t+2=0$

الحل بالمميز : $\Delta=(40)^2-4\times5(-2)=40,5 \longleftarrow t=\dfrac{40\pm40,5}{2\times5}$ ومنه $t=8,05\ s$.

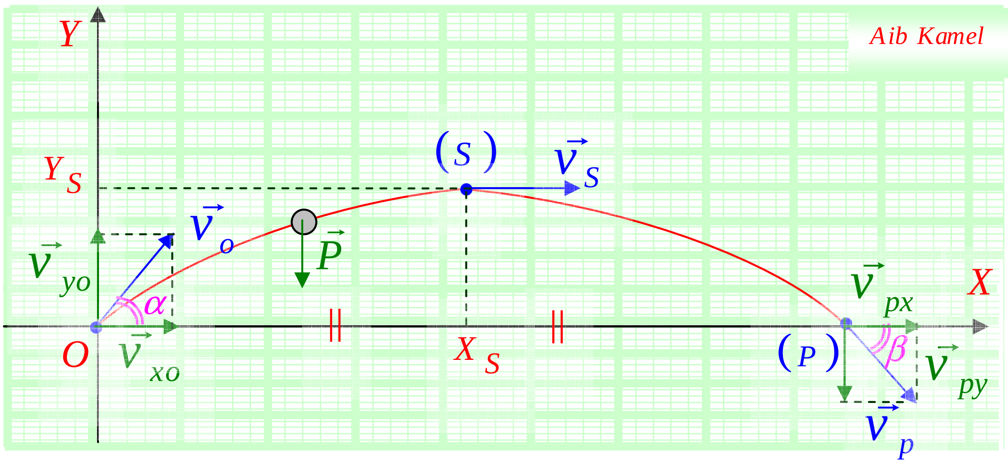
** السرعة الموافقة : من العلاقة (2) $v(t)=-10\cdot(8,05)+40=0 \leftarrow v(8,05)=-40\ m/s$.

4– تطبيقات :

4–1– تطبيق القانون الثاني لنيوتن :

4–1–1– حركة قذيفة بسرعة ابتدائية غير شاقولية :

نقذف جسم بسرعة ابتدائية $\{\vec{v}_o\}$ كماهو موضح في الشكل، نختار معلما $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بحيث يكون متواجد في المستوي (XOY)



نحدد الشروط الإبتدائية :

$\{x_o=0\ ,\ y_o=0\}$ ، $\{v_{xo}=v_o\cos\alpha\ ,v_{yo}=v_o sin\alpha\}$

ونمثل القوى المؤثرة :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\sum\vec{F}=m\cdot\vec{a} \Leftarrow \vec{P}=m\ \vec{a}$ بالإسقاط:

** على المحور $\overrightarrow{OX}$: $0=m\ a_x \Leftarrow a_x=0$................$(1)$

حركة مستقيمة منتظمة $v_x=cte$

معادلة السرعة : من العلاقة (1) $\longleftarrow v_x(t)=v_{xo}=v_o\cos\alpha$ ....(2)

معادلة المسافة : من العلاقة (2) $\longleftarrow x(t)=v_o\cos\alpha\ t$ ....(3)

** على المحور $\overrightarrow{OY}$:

نجد : $-m\ g=m\ a_y \Leftarrow \longleftarrow a_y=-g$ ....$(1)'$

حركة مستقيمة متغيرة بانتظام $a_y=cte$.

معادلة السرعة : من العلاقة $(1)'$ $\longleftarrow v_y(t)=-g\ t+v_o\cos\alpha$ ....$(2)'$.

معادلة المسافة : من العلاقة $(2)'$ ⟵ $y(t)=-\frac{1}{2}g\,t^2+v_o\cos\alpha\ t$ ....$(3)'$.

** معادلة المسار : ($y(t)$ بدلالة $x(t)$) : من العلاقة (3) ⟵ $t=\frac{x(t)}{v_o\cos\alpha}$.

بالتعويض في العلاقة $(3)'$ ⟵ $y(t)=-\frac{g}{2v_o^2\cos^2\alpha}x^2(t)+tg\alpha\ x(t)$

** الذروة (S) : ⟵ $v_y(S)=0$

من العلاقة $(2)'$: ⟵ $v_y(S)=-g\,t+v_o\cos\alpha=0$ ⟵ $t_S=\frac{v_o\cos\alpha}{g}$ يعطي : $\left\{\cos\alpha\sin\alpha=\frac{\sin2\alpha}{2}\right\}$

بالتعويض في (3) و $(3)'$ نجد احداثيات الذروة (S) : $S:\left(\frac{v_o^2}{2g}\sin2\alpha\ ,\ \frac{v_o^2}{2g}\sin\alpha\right)$

** المدى (p) : ⟵ في هذه الحالة $y(p)=0$.

من العلاقة $(3)'$ ⟵ $y(p)=-\frac{1}{2}g\,t^2+v_o\cos\alpha\ t=0$ ⟵ بنفس الطريقة نجد : $p:\left(\frac{v_o^2}{g}\sin2\alpha\ ,\ 0\right)$.

<u>تمرين تدريبي :</u> تقذف كرة نحو العلى بالسرعة $v_o=20\ m/s$ شعاعها يصنع زاوية $\alpha=45^o$ مع الأفق .

– أكتب المعادلات الزمنية للحركة ثم استنتج : المدى الشاقولي و الأفقي لهذه الكرة .

– أوجد سرعة و زاوية السقوط .

<u>الحل :</u> – المعادلات الزمنية :

** شعاع السرعة : $\vec{v}:\left(v_x(t)=v_o\cos\alpha=10\sqrt{2}\ ,\ v_y(t)=-g\,t+v_o\sin\alpha=-9,8t+10\sqrt{2}\right)$.

** شعاع الموضع : $\overrightarrow{OM}:\left(x(t)=v_o\cos\alpha\,t=10\sqrt{2}\ t\ ,\ y(t)=-\frac{1}{2}g\,t^2+v_o\sin\alpha\,t=-4,9\,t^2+10\sqrt{2}\ t\right)$.

** الذروة: $v_y(S)=0$ ⟵ $-9,8\,t_S+10\sqrt{2}=0$ ⟵ $t_S=1,44\ s$ ⟵ $S:\left(x(s)=20,3\ ,\ y(s)10,14\right)m$.

** المدى : $x(p)=2x(s)$ ⟵ $p:\left(x(s)=40,6\ ,\ y(p)=0\right)m$.

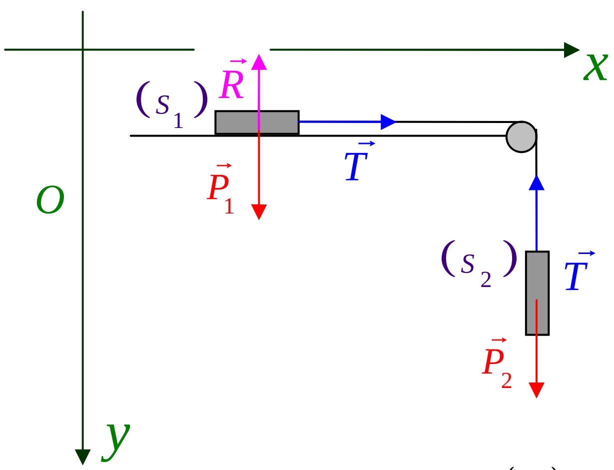
** سرعة السقوط : المدى ⟵ $y(p)=-4,9\,t^2+10\sqrt{2}\ t=0$ ⟵ $t=2,87$ أو $t=0$ (نقطة القذف)

بالتعويض في معادلات السرعة : $\vec{v}_p:\left(v_x(p)=10\sqrt{2}\ ,\ v_y(t)=14\right)m/s$

طويلة شعاع السرعة $v_p=\sqrt{\left(10\sqrt{2}\right)^2+(14)^2}$ ومنه : $v_p\approx20\ m/s$

زاوية السقوط β : $tg\beta=\frac{v_{by}}{v_{bx}}$ ⟵ $tg\beta=\frac{14}{10\sqrt{2}}\approx1$ ⟵ $\beta=45^o$.

4–1–2– حركة مركز عطالة جسم على مستوي :



نحقق الجملة المبينة على الشكل ، باهمال قوى الإحتكاك و اختيار المرجع السطحي المناسب .

** نمثل القوى على الجسمين (S_1) و (S_2) :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

** (S_1) : $m_1\vec{g}+\vec{R}+\vec{T}=m_1\cdot\vec{a}$ ** (S_2) : $m_2\vec{g}+\vec{T}=m_2\cdot\vec{a}$

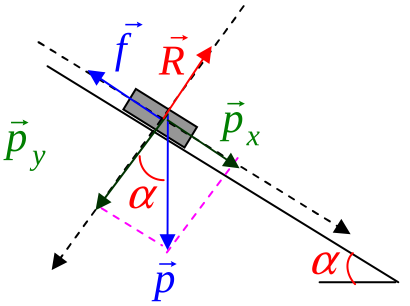
بالإسقاط على محوري الحركة :

$(S_1):\begin{cases}m_1\,g-R=0\\ T=m_1\,a\ \ ....(1)\end{cases}$ $(S_2):m_2\,g-T=m_2\,a$..............(2)

يجمع (1) و (2) نجد $(m_1+m_2)a = m_2 g \Leftarrow$ $a = \dfrac{m_2}{(m_1+m_2)} g =$ ثابت .

و عليه فإن حركة الجسمين حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

4-1-3- حركة مركز عطالة جسم على مستوي :



يتحرك جسم صلب كتلته m مركزعطالته G ابتداءا من السكون

بوجود قوى احتكاك على مستوى مائل بزاوية α على الأفق و نحاول

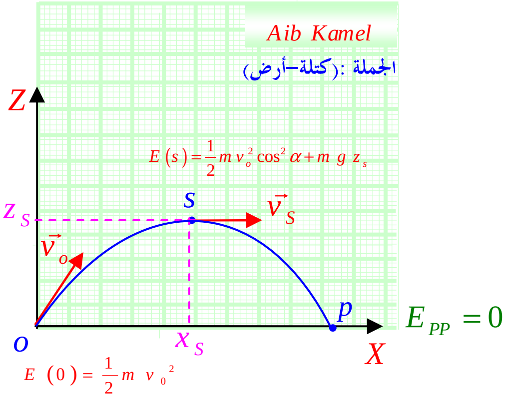
دراسة حركته باختيار معلم مناسب .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \vec{F} = m\cdot\vec{a} \Leftarrow \vec{P}+\vec{R}+\vec{f} = m\cdot\vec{a}$

بالإسقاط على $\begin{cases} m\ g\ \sin\alpha - f = m\ a..............(\overrightarrow{x\ x'}) \\ R - m\ g\ \cos\alpha = 0..............(\overrightarrow{y\ y'}) \end{cases} \Leftarrow$ و منه : $a = g\ \sin\alpha - \dfrac{f}{m}$

في غياب الإحتكاك : $a = g\ \sin\alpha$ حركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

4-2- تطبيق مبدأ انحفظ الطاقة :



** مثال : طاقة قذيفة نختار المعلم المناسب و كذلك الجملة المناسبة (كتلة- أرض)

- الطاقة الحركية $E_C = \dfrac{1}{2} m v^2$ - الطاقة الكامنة الثقلية : $E_{PP} = m\ g\ z$.

في حقل منتظم للجاذبية g طاقة الجملة $E = E_C + E_{PP}$

و منه $E = \dfrac{1}{2} m v^2 + m\ g\ z$

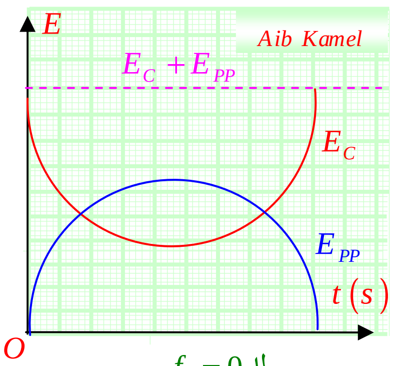
** لما $z = 0$: $E(0) = \dfrac{1}{2} m v_0^2$

** عند الذروة $(v_x = v_o \cos\alpha\ ,\ v_z = 0)$: $E(s) = \dfrac{1}{2} m v_o^2 \cos^2\alpha + m\ g\ z_s$

بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة : $E(0) = E(s)$ ومنه $\dfrac{1}{2}\cancel{m} v_o^2 \cos^2\alpha + \cancel{m}\ g\ z_s = \dfrac{1}{2}\cancel{m} v_0^2$

$$z_S = \frac{v_o^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

في حالة تكون فيها قوى الإحتكاك غير مهملة نجد $E(s) = E(0) - |W_m|$



لما $f = 0$

5- حدود ميكانيك نيوتن :

5-1- النسبية بين غاليلي و انشتاين : يبقى ميكانيك نيوتن صالحا للتطبيق على الأجسام التي لها سرعات أقل بكثير من سرعة الضوء ، بحيث يقوم على أساس أن زمن ملاحظة الظاهرة يوافق تماما زمن حدوثها ، وهذا لا يحدث في العالم اللامتناهي الكبر و الصغر .

مثلا : قوة التجاذب الميكانيكي و الكهربائي بين بروتون و الكترون بحيث :

$$m_e = 9,1\times10^{-31} kg \quad , \quad m_p = 1,67\times10^{-27} kg \quad , \quad |e| = |-e| = 1,6\times10^{-19} C$$

$$\begin{cases} F_g = G \times \dfrac{m_p \cdot m_e}{d^2} \quad , \quad G = 6,67\times10^{-11} \\ F_e = K \times \dfrac{|e|\times|-e|}{d^2} \quad , \quad K = 9\times10^{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{F_g}{F_e} = 4,4\times10^{-40}$$

**قوة التجاذب الميكانيكي F_g تكون ضعيفة جدا أمام قوة التجاذب الكهربائي فيمكن إهمالها في العالم الميكروسكوبي .

5-2- حدود ميكانيك نيوتن :

5-2-1-طاقة الجملة كوكب-قمر: عند توازن قمر صناعي حول الأرض تكون سرعته $v = \sqrt{g \cdot r}$ فيصبح له طاقة حركية $E_C = \frac{1}{2} m v^2$ بحيث تزداد بزيادة ارتفاعه r .

5-2-2- طاقة الجملة بروتون-الكترون : حسب ميكانيك نيوتن يمكن للإلكترون أن يرسم حول النواة مدارات مختلفة مما يعطي الجملة طاقات حركية مختلفة ، إلا أن الدراسات التجريبية لطيف ذرة الهيدروجين تبين أن أطياف الإصدار و الإمتصاص تكون ذات أطول موجات محدودة تماما ، مما يبين ان الطاقة مكممة و لايمكن أن تكون مستمرة .

** عندما ينتهي ميكانيك نيوتن عند حدود معينة يظهر الميكانيك النسبي و ميكانيك الكم ، اذا ميكانيك نيوتن يكتمل بتدعيم ميكانيك الكم لتفسير بعض الظواهر .

5-3- تفسيربعض الظواهر الفيزيائية :

5-3-1- مفهوم الفوتون : تفسر الأطياف الذرية بأن الضوء ذو طبيعة جسيمية موجية ، فالضوء الوحيد اللون يتكون من حبيبات من الطاقة (كمات) تدعى الفوتونات (لا كتلة و لا شحنة) ، بحيث طاقة الفوتون $E = h\,\upsilon = \frac{h\,c}{\lambda}$

h : ثابت بلانك $\left(h = 6,62\times10^{-34}\right)$ ، υ : تواتر الإشعاع ، λ : طول الموجة .

5-3-2- فرضية بور و سويات الطاقة : تدور الإلكترونات في الذرة على مدارات معينة (مكممة) تدعى المدارات المستقرة (سويات الطاقة) ،

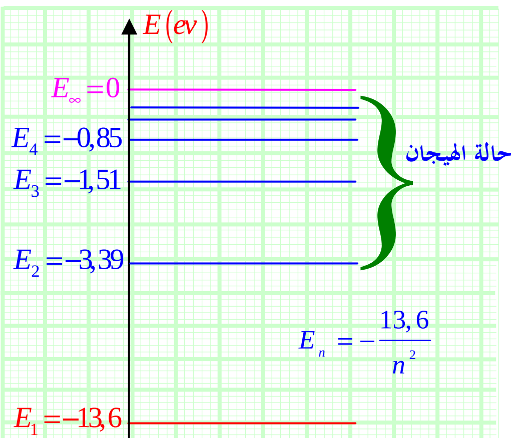
عندما تقفز الإلكترونات من سوية طاقة إلى سوية طاقة أدنى فإنها تشع كما واحدا تعطى طاقته بالفرق بين طاقتي السويتين :

$$\Delta E = E_2 - E_1 = h\,\upsilon$$

** و عند الإمتصاص يكون العمل عكسي

** تعطى طاقة السويات في ذرة الهيدروجين بالعلاقة :

$E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ بحيث سوية الطاقة الأساسية $E_o = -13,6\ ev$



سويات الطاقة في ذرة الهيدروجين

6- تمارين :

1- التمرين الأول :

يسقط مظلي في اللحظة $t=0$ بسرعة ابتدائية معدومة ، ويصل إلى سرعة ثابتة قيمتها $6,5\ m/s$.

1- مثل القوى المؤثرة على المظلي ومظلته.

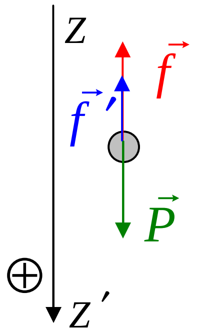
2- بإهمال دافعة أرخميدس واعتبار قوى الاحتكاك من الشكل $f=kv^2$ ، أوجد المعادلة التفاضلية لحركة المظلي مع مظلته .

3- برر ثبات سرعة المظلي بعد بلوغه السرعة الحدية $6,5\ m/s$.

4- باعتبار كتلة المظلي مع مظلته هي $M=90\ kg$ وتسارع الجاذبية $g=9,8\ m/s^2$ حدد عبارة قوة الأحتكاك f .

5- إذا كانت عبارة السرعة في المجال الزمني $0\le t\le 5s$ من الشكل $v=2\sqrt{t}$ ، أوجد المسافة التي قطعها المظلي خلال السقوط الذي دام $5\ min$ كاملة .

** حل التمرين الأول :



1- تمثيل القوى كما في الشكل :

2- المعادلة التفاضلية :

بتطبيق نظرية مركز العطالة $m\vec{a}=\Sigma\vec{F}$ أي $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{f}+\vec{f'}$

بإهمال دافعة أرخميدس والاسقاط على المحور الشاقولي النازل فإن:

$m\ddot{x}=mg-kv^2$ ومنه $\dfrac{d^2x}{dt^2}=g-\dfrac{k}{m}(\dfrac{dx}{dt})^2$

3- في بداية سقوط جملة المظلي مع مظلته تتزايد سرعة الجملة فتتزايد قوة الأحتكاك حتى تصبح شدتها مساوية لشدة قوة ثقلها أي : $(f=mg)$ ومنه $\Sigma\vec{F}=m\vec{a}=\vec{0}$ وعليه $v=cte$ وفق مبدأ العطالة .

4- عند بلوغ السرعة الحدية : $mg-kv^2=0 \Leftrightarrow k=\dfrac{mg}{v^2}=20.9kg/m$ و منه $f=20,9v^2$

5- المسافة المقطوعة : $x=x_1+x_2$ ومنه : $x=\int_0^5 v_1dt+v_2t_2$ أي : $x=\int_0^5 2\sqrt{t}dt+6,5t_2$

نجد : $x=\left[2.\dfrac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^5+6.5(60x5-5)$ ومنه : $x=14.9+1917.5\approx 1932m$

2- التمرين الثاني :

قمر اصطناعي $Spot4$ كتلته $m=2800Kg$ يرسم مسار دائري نصف قطره r بالنسبة لمركز الأرض حيث $r=(832+R_T)Km$

1 – أذكر عبار قوة الجذب العام التي تطبقها الأرض على القمر الصناعي .

2 – بين أن حركة القمر الصناعي دائرية منتظمة .

3 – بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في المرجع المركزي الأرضي أوجد العبارة الحرفية للسرعة الخطية v للقمر الصناعي في مداره ثم أحسب قيمتها .

4 – هل سرعة القمر الصناعي في مداره تتعلق بكتلته أم بارتفاعه ؟ .

5 – أوجد عبارة دور هذا القمر الصناعي T حول الأرض بدلالة ثابت الجذب العام G وكذا كتلة الأرض M_T و نصف قطر مداره r . هل يمكن اعتبار هذا القمر الصناعي جيو مستقر ؟ .

6 – ما هو القانون الذي يمكن استنتاجه من عبارة الدور السابقة ؟ .

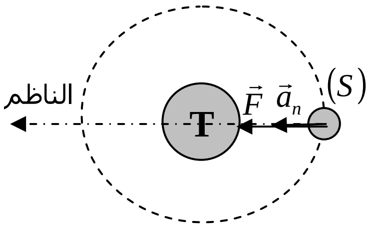
يعطى : $G=6.67x10^{-11}N.m^2/Kg^2$ و $R_T=6400Km$ و $M_T=6x10^{24}Kg$.

**حل التمرين الثاني :

1 – عبارة قوة الجذب العام التي تطبقها الأرض على القمر : $\rightarrow(1)$ $\quad F_{T/S} = Gx\dfrac{M_T.m}{r^2}$

2– بمأن القمر الصناعي يخضع إلى قوة وحيدة جاذبة مركزية موجهة نحو مركز الأرض و هي قوة الجذب العام التي تطبقها الأرض ، فالتسارع المكتسب يكون ناظميا $(\vec{a}_n)$ و منه الحركة دائرية منتظمة.

3 – العبارة الحرفية للسرعة : الجملة المدروسة هي القمر الصناعي (S) و المرجع مركزي أرضي نعتبره غاليليا ، تكون القوة المطبقة هي قوة جذب الأرض للقمر .



بتطبيق قانون نيوتن الثاني : $\sum\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{T/S} = m\vec{a}$

بالاسقاط على الناظم نجد أن : $Gx\dfrac{M_T.m}{r^2} = ma_n \Rightarrow G\dfrac{M_T}{r^2} = \dfrac{V^2}{r}$

و منه نجد : $V = \sqrt{\dfrac{G.M_T}{r}}$ $\quad\rightarrow(2)$

قيمتها : $V = \sqrt{\dfrac{6.67x\,10^{-11}x\;6x\,10^{24}}{(832+6400)x\,10^3}} \longrightarrow V \approx 7.4Km/S$

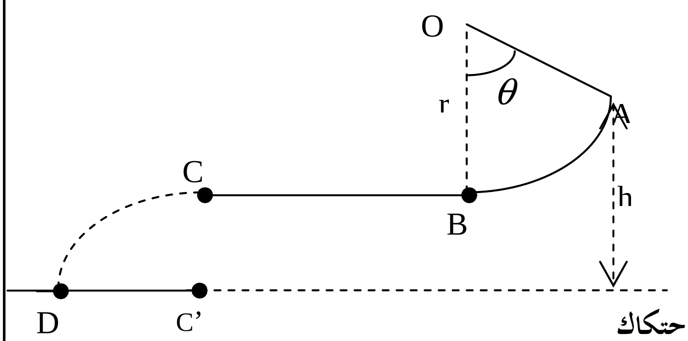
4 – حسب العلاقة (2) نلاحظ أن عبارة السرعة لا تتعلق بكتلة القمر بل بارتفاعه عن سطح الأرض لأن : $r = R+h$

5 – عبارة دور القمر الصناعي : لدينا : $T = \dfrac{2.\pi r}{V} \Rightarrow (3)\leftarrow$ $\quad T = 2.\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{G.M_T}}$ قيمته : $T = 1.70h$

* لا يمكن اعتبار هذا القمر جيو مستقر لأن الدور المداري له غير مساوي لــ $T = 24h$.

يمكن كتابة العلاقة (3) على النحو التالي : $T^2 = 4.\pi^2 x\dfrac{r^3}{G.M_T} \longrightarrow \dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4.\pi^2}{G.M_T}$ و هو قانون كيبلر الثالث

2– التمرين الثالث :



يتزلق جسم صلب (S) ، يمكن اعتباره نقطيا، كتلته $m = 0.05\,kg$ على مسار ABC يقع في المستوى الشاقولي.

AB قوس من دائرة مركزها O و نصف قطرها $r = 0.50\,m$ ،وحيث $\theta = 60°$ ، نعتبر الإحتكاكات مهملة على هذا الجزء.

BC طريق أفقي طوله $BC = 1m$ ، توجد على هذا الجزء قوى احتكاك تكافئ قوة وحيدة و معاكسة لجهة حركة (S) و نعتبرها ثابتة ونرمز لها بــ $\vec{f}$.

ندفع الجسم (S) من النقطة A بسرعة ابتدائية مماسية للمسار عند النقطة A $\|\vec{V}_A\| = 12m.s^{-1}$.

1. أحسب القيمة $\|\vec{V}_B\|$ لسرعة الجسم (S) عند النقطة B.

2. يصل (S) إلى النقطة C بسرعة $\|\vec{V}_C\| = 2{,}50m.s^{-1}$.

– أحسب قيمة قوة الاحتكاك $\vec{f}$ على المسار BC .

3. يغادر (S) المسار BC عند النقطة C ليسقط في الهواء، بإهمال تأثير الهواء على الجسم (S):

أكتب معادلة مسار المتحرك في المعلم $(C\vec{x}, C\vec{y})$ معتبرا مبدأ الأزمنة لحظة مرور الجسم (S) بالنقطة C.

4. في أي لحظة يصل (S) إلى الأرض علما أن A ترتفع عن الأرض بـ $h = 2m$ ؟

5. أحسب المسافة الأفقية $C'D$ حيث D هي النقطة التي يصطدم عندها الجسم (S) بالأرض . يعطى : $g = 10\,m.s^{-2}$

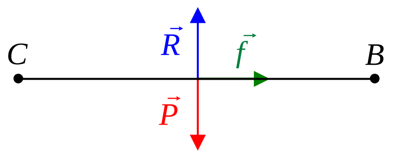
** حل التمرين الثالث :

1− حساب $\left\|\vec{V}_B\right\|$: بتطبيق مبدأ إنحفاظ الطاقة للجملة(جسم + أرض)

$$E_A + E_{reçue} - E_{cédée} = E_B \longleftarrow (\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A) + 0 - 0 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

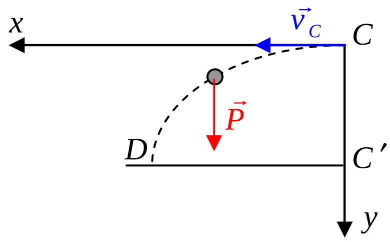
حيث: $h_A = r(1-\cos\theta)$ و منه: $v_B = \sqrt{2gr(1-\cos\theta)+v_A^2} \longrightarrow v_B = 12,20 m.s^{-1}$

2. شدة قوة الاحتكاك $\vec{f}$: حسب قانون الطاقة الحركية : $\frac{1}{2}mv_B^2 + 0 - f \times BC = \frac{1}{2}mv_C^2$



و منه: $f = \dfrac{\frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_C^2\right)}{BC} \longrightarrow f = 3,57N$.

3. معادلة المسار:



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} = m\vec{a}$

$C\vec{x}$: $\{x = v_c t = 2,50t.....(1)\ ,\ a_x = 0\}$

$C\vec{y}$: $\left\{y = \frac{1}{2}gt^2 = 5t^2.....(2)\ ,\ a_y = g\right\}$

من (1) و (2) $\Leftarrow$ $y = 0,8x^2$.

4. إيجاد اللحظة لما $h = 2m$.

$CC' = 2 - 0,25 = 1,75m$: عند $D \to y = 1,75m$ ومنه $\sqrt{\dfrac{1,75}{5}} = \sqrt{\dfrac{y_D}{5}} = y_D = 5t_D^2 \Rightarrow t_D$ $\Leftarrow$ $t_D \approx 0,59s$

5. حساب المسافة $C'D$:

لدينا $x = 2,5t$ $\Leftarrow$ $x_D = 2,5t_D$. ومنه $x_D = 2,5 \times 0,59$ $C'D \approx 1,48m$

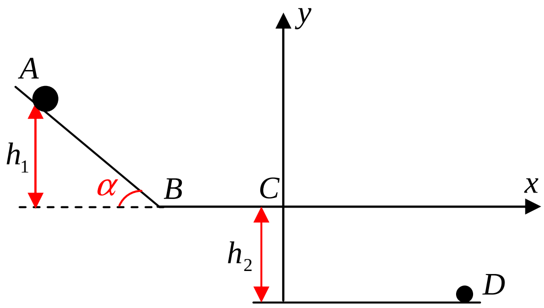
4− التمرين الرابع :

نأخذ المستوى الأفقي BC كمرجع لقياس الارتفاعات $(Z_C = 0, E_{pp} = 0)$.

1/ أعط عبارة الطاقة الكامنة الثقالية عند النقطة A وتحقق أن $\left(E_{pp} = 2.5x10^{-2}J\right)$

2 / استنتج عبارة طاقة الجملة عند A. ما قيمتها ؟

3/ استنتج مع التعليل قيمة طاقة الجملة عند B .



4/ بين أن عبارة سرعة الجسم عند B هي $V_B = \sqrt{2.g.AB.\sin\alpha}$.

دراسة حركة الجسم عند النقطة C:

نعتبر مبدأ الأزمنة لحظة مرور الجسم بالنقطة C. و نأخذ السرعة عند C : $V_0 = \sqrt{5}m/S$.

1/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم بعد مغادرته النقطة C. أوجد :

أ− العبارة الحرفية لكل من مركبتي شعاع التسارع a_x و a_y .

ب− عين عبارة كل من مركبتي شعاع السرعة V_x و V_y .

2/ تعطى مركبتا شعاع الموضع في المعلم (Cx, Cy) كالتالي:

$$\begin{cases} x = \left(\sqrt{2.g.AB.\sin\alpha}\right).t \rightarrow (1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 \rightarrow (2) \end{cases}$$

- استنتج معادلة المسار .

3/ ما هي المسافة AB الواجب اختيارها حتى يسقط الجسم عند D ذات الفاصلة $x_D = 57cm$.

** حل التمرين الرابع :

1 – عبارة الطاقة الكامنة الثقالية عند A : لدينا $E_{PP_A} = m.g.h_1$ حيث $(h_1 = AB\sin(\alpha))$

و منه : $E_{PP_A} = 0.010x\,10x\,0.5x\,\sin 30^\circ \longleftarrow E_{PP_A} = 2.5x\,10^{-2}J$

2 – عبارة طاقة الجملة عند A : $E_{m_A} = E_{PP_A} \Rightarrow E_{m_A} = E_{PP_A} + E_{C_A}$ لأن $(E_{C_A} = 0)$ و منه $E_{m_A} = 2.5x\,10^{-2}J$

3 – استنتاج طاقة الجملة عند B :

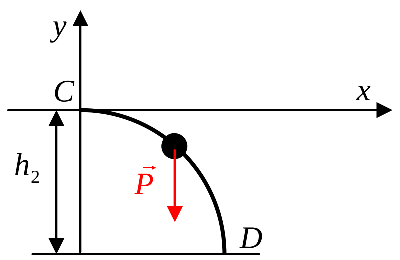
الاحتكاكات مهملة ، فالجملة شبه معزولة فهناك انحفاظ في الطاقة الميكانيكية أي أن : $E_{m_A} = E_{m_B} = 2.5x\,10^{-2}J$

4 – عبارة السرعة عند B : باعتبار المستوي الأفقي BC كمرجع لقياس الارتفاعات فإنه

حسب انحفاظ الطاقة نجد أن : $E_{PP_A} = E_{C_B} \Rightarrow m.g.AB\sin\alpha = \frac{1}{2}.m.v_B{}^2$ ومنه $v_B = \sqrt{2.g.AB\sin\alpha}$

–* دراسة حركة الجسم عند النقطة C :

1 – أ) العبارة الحرفية لمركبتي شعاع التسارع : الجملة المدروسة الجسم (S) و بإسناد الدراسة لمرجع غاليلي مرتبط بالأرض تكون القوة المطبقة هي $\vec{P}$ فقط .



بتطبيق قانون نيوتن الثاني : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m.\vec{a}$

بالاسقاط على المحور Cx :

$0 = m.a_x \Rightarrow a_x = 0$ حركة مستقيمة منتظمة .

بالاسقاط على المحور Cy :

$-p = m.a_y \Rightarrow a_y = -g = cst$ حركة مستقيمة متغيرة بالانتظام .

ب) عبارة مركبتي السرعة : $v_x = v_C$ و $v_y = -g.t$

2 – مسار الحركة : نستخرج الزمن من العلاقة (1) و تعويضها في العلاقة (2) نجد أن :

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x^2}{2.g.AB\sin\alpha}\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x\frac{x^2}{AB.\sin\alpha} \rightarrow (3)$$

و هي معادلة قطع مكافئ .

3 – المسافة AB من أجل $x_D = 0.57m$ بالتعويض في العلاقة (3) حيث $h_2 = -0.40m$ نجد :

$$h_2 = -\frac{1}{4}x\frac{x_D{}^2}{ABx\,0.5} \longrightarrow AB \approx 0.4m$$

6–التمرين السادس :

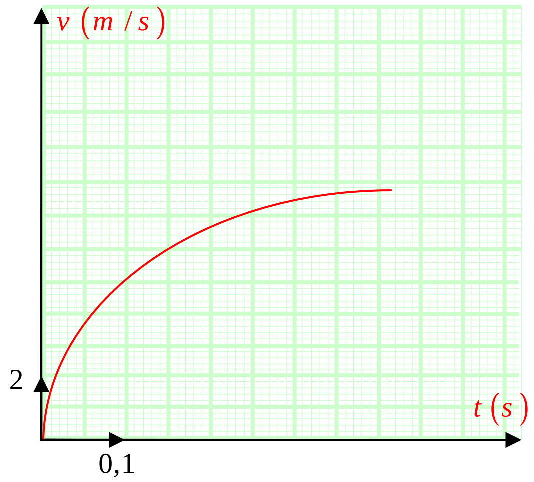
تسمح المعادلة التفاضلية $\frac{dx}{dt} + \alpha \cdot x = \beta$ بوصف عدد كبير من الظواهر الفيزيائية المتغيرة خلال الزمن: الشدة، التوتر، السرعة، مقدار يميز النشاط الإشعاعي.

نذكر أن هذه المعادلة رياضيا تقبل على الخصوص حلين هما:

$x(t) = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$....(1) إذا كان $\beta \neq 0$ و $x(t) = X_0 \cdot e^{-\alpha t}$....(2) إذا كان $\beta = 0$.

استغلت حركة سقوط كرة معدنية، كتلتها m ، في مائع كتلته الحجمية ρ_f بواسطة برمجية خاصة التي سمحت برسم تطور سرعة مركز العطالة بدلالة الزمن، فتم الحصول على المنحنى البياني التالي:

1– استغلال معادلة المنحنى البياني :



المعادلة الرياضية المرفقة بالمنحنى البياني تحقق العلاقة :

$v(t) = 1{,}14\cdot(1-e^{-\frac{t}{0{,}132}})$، حيث $v\ (t)$ مقدرة بالــ $m\cdot s^{-1}$

و الزمن t بالثانية s . هذه المعادلة تتطابق مع المعادلة رقم (1) .

أ/ عين قيمة كل من α و النسبة $\frac{\beta}{\alpha}$. أعط، بدون تبرير، وحدة النسبة $\frac{\beta}{\alpha}$.

ب/ أثبت أن المعادلة التفاضلية التي تقبل كحل المعادلة $v(t)$ تحقق الكتابة العددية التالية: $\frac{dv}{dt}+7{,}58v=8{,}64$.

2– دراسة الظاهرة الفيزيائية:

أ/ أحص القوى المطبقة على الكرة، ثم مثلها في شكل.

ب/ طبّق القانون الثاني لنيوتن على الجملة المتمثلة في الكرة.

3– الكرة المستعملة في تحقيق الدراسة هي كرة من فولاذ كتلتها $m=32g$ وحجمها V.

تسارع الجاذبية في مكان الدراسة هو $g=9{,}80m.s^{-2}$. تعطى قوى الاحتكاك المطبقة على الكرة بالعبارة: $\vec{f}=-k\cdot\vec{v}$.

أ/ باستعمال محور شاقولي موجه نحو الأسفل، أثبت أن المعادلة التفاضلية $v(t)$ تحقق : $\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=\left(1-\frac{\rho_f\cdot V}{m}\right)\cdot g$.

ب/ استنتج العبارة الحرفية للمعاملين α و β في المعادلة (1) .

ج/ ما هي قيمة المعامل β إذا كانت دافعة أرخميدس معدومة؟

باستعمال المعادلة الموجودة في السؤال **1**–ب ، بين أن هذه القوة يجب أخذها في الحسبان.

** حل التمرين السادس :

1.أ. عين قيمة كل من α و النسبة $\frac{\beta}{\alpha}$:

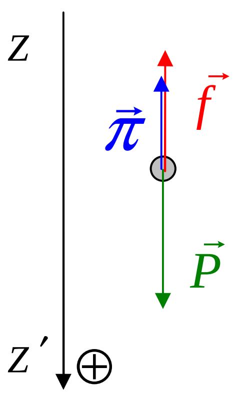
بمطابقة المعادلة $v(t)=1{,}14\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{0{,}132}}\right)$ مع المعادلة $x(t)=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\left(1-e^{-\alpha t}\right)$ ينتج: $\frac{\beta}{\alpha}=1{,}14$ و $\alpha=\frac{1}{0{,}132}$

الحد $\left(1-e^{-\frac{t}{0{,}132}}\right)$ في عبارة التسارع ليس له بعدا، إذن النسبة $\frac{\beta}{\alpha}$ متجانسة مع السرعة وبالتالي تقدر بوحدة السرعة أي $m.s^{-1}$.

ب. المعادلة $v(t)=1{,}14\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{0{,}132}}\right)$ هي حل لمعادلة تفاضلية من النوع : $\frac{dx}{dt}+\alpha\cdot x=\beta$

بالمطابقة $v \Leftrightarrow x$ ، أي: $\frac{dv}{dt}+\alpha\cdot v=\beta$ لكن: $\alpha=7{,}58$ و $\frac{\beta}{\alpha}=1{,}14$ أي $\beta=1{,}14\alpha$ إذن: $\beta=1{,}14\times7{,}58=8{,}64$

بتعويض α وβ بقيمتها نصل إلى العبارة المعطاة $\frac{dv}{dt}+7{,}58v=8{,}64$.



2.أ. الجملة المدروسة هي الكرة في المرجع الأرضي الذي نفترضه غاليليا.

القوى المطبقة على الكرة هي:

– الثقل $\vec{P}=m\cdot\vec{g}$، منحاها شاقولي و اتجاهها نحو الأسفل .

– دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ ، منحاها شاقولي و اتجاهها نحو الأعلى .

– قوى الإحتكاك $\vec{f}$، منحاها شاقولي و اتجاهها نحو الأعلى .

ب. بتطبيق قانون نيوتن الثاني: $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{f} + \vec{\pi} = m \cdot \vec{a_G}$

بالإسقاط على المحور الشاقولي الموجه نحو الأسفل: $P - f - \pi = m \cdot a$.

3.أ. بالتعويض عن f و π في العبارة الأخيرة، نجد : $m \cdot g - k \cdot v - \rho \cdot V \cdot g = m \cdot \frac{dv}{dt} \Leftarrow g(m - \rho \cdot V) - k \cdot v = \frac{dv}{dt}$

و بقسمة طرفي المعادلة على m ينتج : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v = \left(1 - \frac{\rho \cdot V}{m}\right).g$

ب. بمطابقة المعادلة السابقة مع المعادلة $\frac{dx}{dt} + \alpha \cdot x = \beta$ ، نجد: $\beta = \left(1 - \frac{\rho \cdot V}{m}\right).g$ و $\alpha = \frac{k}{m}$

ج. إذا كانت دافعة أرخميدس معدومة ، فإن: $\rho \cdot V = 0$ و منه : $\beta = \left(1 - \frac{0}{m}\right).g$ ، أي أن: $\beta = g$ ومنه: $\beta = 9,80\, m.s^{-2}$

** نلاحظ في المعادلة التفاضلية: $\frac{dv}{dt} + 7,58\, v = 8,64$ أن $\beta = 8,64\, m.s^{-2}$ إذن: $\beta \neq g \neq 9,80 m.s^{2}$

و عليه فإن يجب أخذ دافعة أرخميدس في الحسبان حيث تبلغ شدتها : $\pi = m \cdot (g - \beta) = 3,7 \times 10^{-2} N$