

التصحيح المفصل لبكالوريا جوان 2016

الموضوع 01

الدورة الاستثنائية

الأستاذ: شداني عبد المالك

التقيط

المحور: الأعداد المركبة

تصحيح التمرين الأول (4 نقاط)

1) أ) التحقق أن $P(2\sqrt{3}) = 0$: $P(2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3})^3 - 24\sqrt{3} = 24\sqrt{3} - 24\sqrt{3} = 0$

ب) إيجاد العددين a و b :

$$(z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz - 2\sqrt{3}z^2 - 2a\sqrt{3}z - 2\sqrt{3}b$$

$$= z^3 + (a - 2\sqrt{3})z^2 + (b - 2a\sqrt{3})z - 2\sqrt{3}b$$

بالمطابقة مع عبارة $P(z)$ نجد :
$$\begin{cases} a - 2\sqrt{3} = 0 \\ b - 2a\sqrt{3} = 0 \\ -2\sqrt{3}b = -24\sqrt{3} \end{cases}$$
 ومنه نجد :
$$\begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ b = 12 \end{cases}$$

ج) حلول المعادلة $P(z) = 0$:

$P(z) = 0$ يكافئ $(z - 2\sqrt{3})(z^2 - 2\sqrt{3}z + 12) = 0$ يكافئ $\begin{cases} z = 2\sqrt{3} \\ z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0 \end{cases} \dots (\diamond)$

- حلول المعادلة $(\diamond)$:

لدينا: $\Delta = -36$ ومنه : $z_1 = \frac{-2\sqrt{3} + i\sqrt{36}}{2} = -\sqrt{3} + 3i$ و $z_2 = -\sqrt{3} - 3i$

الخلاصة: حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي : $S = \{2\sqrt{3}; -\sqrt{3} + 3i; -\sqrt{3} - 3i\}$

2) أ) كتابة على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3i}{-\sqrt{3} - 3i + \sqrt{3} - 3i} = \frac{3\sqrt{3} - 3i}{-6i} = \frac{3\sqrt{3}i + 3}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ب) تبين أنه يوجد دوران r مركزه A ويحول B إلى C :

ليكن r دوران معادته المركبة من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\begin{cases} r(A) = A \\ r(B) = C \end{cases}$ ومنه

$$\alpha = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ أي } z_C - z_A = \alpha(z_B - z_A) \text{ ومنه } \begin{cases} z_A = \alpha z_A + \beta \dots (1) \\ z_C = \alpha z_B + \beta \dots (2) \end{cases}$$

بما أن يوجد عدد مركب وحيد α غير معدوم و $|\alpha| = \left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 1$ فإنه يوجد دوران r

مركزه A ويحول B إلى C وزاويته $\theta = \arg \alpha = \arg \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{\pi}{3}$

ج) طبيعة المثلث ABC :

مما سبق نستنتج أن $\begin{cases} AB = AC \\ (\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ ومنه المثلث ABC متقايس الاضلاع.
(د) تعيين z_D :

$z_D = z_C + z_{\overline{AB}}$ معناه $\overline{AB}$ شعاعه C صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overline{AB}$ معناه
ومنه $z_D = z_C + z_B - z_A$ وعليه نجد $z_D = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 3i + \sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3} - 6i$ أي $z_D = 2\sqrt{3} - 6i$
- تحديد طبيعة الرباعي ABCD :

لدينا، $\begin{cases} z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = -6i \\ z_{\overline{CD}} = z_D - z_C = -6i \end{cases}$ ومنه $\overline{AB} = \overline{CD}$ إذن ABDC متوازي أضلاع

بما له ضلعان متجاوران متساويان $AB = AC$ فإن ABDC معين

(3) تعيين (Γ) :

$\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2\pi k$ تكافئ $\arg(z) - \arg(\bar{z}) = 2\pi k$ مع $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $\arg(z) = \arg(\bar{z}) + 2\pi k$

ومنه (Γ) مجموعة النقط M من المستوي هي حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O

التقيط

تصحيح التمرين الثاني (نقاط) المحور: الهندسة الفضائية

(1) أ) التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) :

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من (Δ) ومنه $\overline{AM} = k \times \vec{u}$ مع $k \in \mathbb{R}$

ومنه نجد : $\begin{cases} x = 1 + kt \\ y = k \\ z = 2 - k \end{cases} / k \in \mathbb{R}$ تمثيل وسيطى للمستقيم (Δ) .

ب) تبيان أن (Δ) و (Δ') ليسا من المستوي :

لدينا، $\vec{u}(2; 1; -1)$ و $\vec{v}(1; 1; 1)$ أشعة توجيه المستقيمين (Δ) و (Δ') على الترتيب

نلاحظ أن $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1}$ وبالتالي الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا أي (Δ) و (Δ')

ليسا متوازيان وعليه فإنهما ليسا من نفس المستوي أو متقاطعان في نقطة H

- لتكن $H(x; y; z)$ نقطة التقاطع فهي تحقق $\begin{cases} 1 + 2k = \lambda & (1) \\ k = 4 + \lambda & (2) \\ 2 - k = 2 + \lambda & (3) \end{cases}$

ب طرح (1) من (2) نجد: $k = -5$ وبتعويضها في (1) نجد، $\lambda = -9$

من أجل $k = -5$ نجد: $H(-9; -5; -6)$ ومن أجل $\lambda = -9$ نجد $H(-9; -5; -7)$

نلاحظ أن H ليست وحيدة وعليه نستنتج أن (Δ) و (Δ') ليسا من المستوي.

(2) أ) تبيان أن $B(-1; 3; 1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ') :

- لدينا من أجل $\lambda = -1$ نلاحظ أن $B \in (\Delta')$... (1)

- لدينا $\overline{AB}(-2; 3; -1)$ و $\vec{v}(1; 1; 1)$ حيث $\vec{v}$ شعاع توجيه المستقيم (Δ')

أي $\overline{AB} \perp \vec{v}$ أي $\overline{AB} \cdot \vec{v} = -2 + 3 - 1 = 0$... (2)

من (1) و (2) نجد $B(-1; 3; 1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ')

ب) التحقق أن (AB) عمودي على (Δ) و (Δ') :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} \perp \vec{u} \\ \overline{AB} \perp \vec{v} \end{array} \right. \text{ إذن } \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} \cdot \vec{u} = (-2 \times 2) + (3 \times 1) + (-1 \times -1) = -4 + 3 + 1 = 0 \\ \overline{AB} \cdot \vec{v} = (-2 \times 1) + (3 \times 1) + (-1 \times 1) = -2 + 3 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

ولذلك (AB) عمودي على (Δ) و (Δ').

ج) استنتاج المسافة بين (Δ) و (Δ') : $d[(\Delta);(\Delta')] = AB = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

3 أ) إثبات أن N تنتمي إلى المستقيم (Δ') :

بوضع $\lambda = -2 + t$ نجد : $\left\{ \begin{array}{l} 4 + \lambda = 4 - 2 + t = 2 + t \\ 2 + \lambda = 2 - 2 + t = t \end{array} \right.$ إذن $N \in (\Delta')$

- كتابة عبارة h(t) بدلالة t :

$$h(t) = AN^2 = (t-3)^2 + (2+t)^2 + (t-2)^2 = 3t^2 - 6t + 17$$

ب) استنتاج قيمة العدد الحقيقي t التي من أجلها المسافة AN أصغر ما يمكن :

من أجل كل عدد حقيقي t لدينا : $h'(t) = 6t - 6$

t	$-\infty$	1	$+\infty$
h'(t)	-	○	+
h(t)	$+\infty$	14	$+\infty$

جدول تغيرات الدالة h :

نلاحظ أن الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى قيمتها $d=14$ من أجل $t=1$

إذن المسافة AN^2 تكون أصغر ما يمكن من أجل $t=1$ وعليه نستنتج أن لمسافة AN

تكون أصغر ما يمكن من أجل $t=1$

- المقارنة بين القيمة الحدية الصغرى لـ h و AB :

القيمة الحدية الصغرى لـ h تساوي AB^2 .

تصحيح التمرين الثالث (5 نقاط)

1 أ) تبين أن f متزايدة تماماً على I :

من أجل كل عدد حقيقي x من I نجد : $f'(x) = \frac{169}{(9x+13)^2}$

نلاحظ أن $f'(x) > 0$ على المجال I ومنه الدالة f متزايدة تماماً على I.

ب) تبين أنه من أجل $x \in I$ فإن $f(x) \in I$:

ليكن $x \in I$ معناه $0 \leq x \leq 4$ ومنه $f(0) \leq f(x) \leq f(4)$ لأن f دالة متزايدة تماماً على I

$$\frac{52}{49} \leq 4 \quad \text{ومنه} \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{52}{49}$$

$$f(x) \in I \quad \text{ومنه} \quad 0 \leq f(x) \leq 4$$

2 أ) البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 4$:

$$P(n): 0 \leq u_n \leq 4$$

المرحلة 01: من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 4$ ومنه $0 \leq u_0 \leq 4$ ومنه $P(0)$ محققة

المرحلة 02: من أجل n عدد طبيعي ، نفرض صحة $P(n): 0 \leq u_n \leq 4$

ونبرهن صحة $P(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 4$

لدينا من فرضية التراجع، $0 \leq u_n \leq 4$ أي $u_n \in I$ ومنه حسب (1) ب) نجد: $f(u_n) \in I$ أي $0 \leq u_{n+1} \leq 4$ ومنه $P(n+1)$ محققة .
الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 4$ ،
ب) دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{13u_n}{9u_n + 13} - u_n = \frac{-9u_n^2}{9u_n + 13}$$

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \text{بما أن } 0 \leq u_n \leq 4 \text{ نجد: } \begin{cases} -144 \leq -9u_n^2 \leq 0 \\ 13 \leq 9u_n + 13 \leq 49 \end{cases}$$

ومن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

- بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فإنها متقاربة .

(3) تبيان أن $u_n \neq 0$: نستعمل البرهان بتراجع ، نضع $u_n \neq 0 : P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n=0$ ، $u_0 = 4$ ومنه $u_0 \neq 0$ وعليه $P(0)$ محققة .

المرحلة 02: من أجل عدد طبيعي n ، نفرض صحة $u_n \neq 0 : P(n)$

ونبرهن صحة : $u_{n+1} \neq 0 : P(n+1)$

$$\text{من فرضية التراجع، } u_n \neq 0 \text{ وعليه } \begin{cases} 13u_n \neq 0 \\ 9u_n + 13 \neq 0 \end{cases} \text{ ومنه } \frac{13u_n}{9u_n + 13} \neq 0 \text{ أي } u_{n+1} \neq 0$$

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \neq 0$

(4) أ) برهان أن المتتالية (v_n) حسابية :

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = 2 + \frac{13}{u_{n+1}} = 2 + \frac{13}{\frac{13u_n}{9u_n + 13}} = 2 + \frac{13(9u_n + 13)}{13u_n} = 2 + \frac{9u_n + 13}{u_n} = 2 + 9 + \frac{13}{u_n} = 9 + v_n$$

$$v_0 = 2 + \frac{13}{u_0} = 2 + \frac{13}{4} = \frac{21}{4} \quad \text{ومن المتتالية حسابية أساسها } r=9 \text{ وحدها الأول}$$

$$v_n = v_0 + nr = \frac{21}{4} + 9n$$

ب) كتابة v_n بدلالة n : من أجل $n \in \mathbb{N}$ ،

ج) إستنتاج عبارة u_n :

$$\text{لدينا، } v_n = 2 + \frac{13}{u_n} \text{ ومنه } \frac{13}{u_n} = v_n - 2 \text{ ومنه } u_n = \frac{13}{v_n - 2} \text{ وعليه } u_n = \frac{13}{\frac{21}{4} + 9n + 2}$$

$$\text{ومنه } u_n = \frac{13}{21 + 36n - 8} \text{ ومنه } u_n = \frac{52}{36n + 13}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{52}{36n + 13} = 0$$

— حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

(I) 1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} [-1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)] = -\infty$$

اتجاه التغير: من أجل كل عدد حقيقي من $]-1; +\infty[$ ،
 نلاحظ أن $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]-1; +\infty[$.
 جدول التغيرات:

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α :

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[-0,34; -0,33]$ ولدينا ،
 $\begin{cases} g(-0,34) = \\ g(-0,33) = \end{cases}$

بما أن $g(-0,34) \times g(-0,33) < 0$ فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$

(3) إشارة $g(x)$: بقراءة جدول تغيرات الدالة g نلخص اشارتها كما يلي :

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	-	○	+

(II) 1) أ) تبين أن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} \left[e(x+1) + \ln(x+1) \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{e}{y} + \frac{\ln y}{y^2} \right] = 0 \quad \text{حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) -$$

التفسير الهندسي :

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = -1$ (يوازي محور الترتيب)المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ بجوار $+\infty$ ب) حساب $f'(x)$:من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-e}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \times (x+1)^2 - 2(x+1)\ln(x+1) = \frac{-e}{(x+1)^2} + \frac{(x+1)[1 - \ln(x+1)]}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-e(x+1) + 1 - \ln(x+1)}{(x+1)^3} = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

ج) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

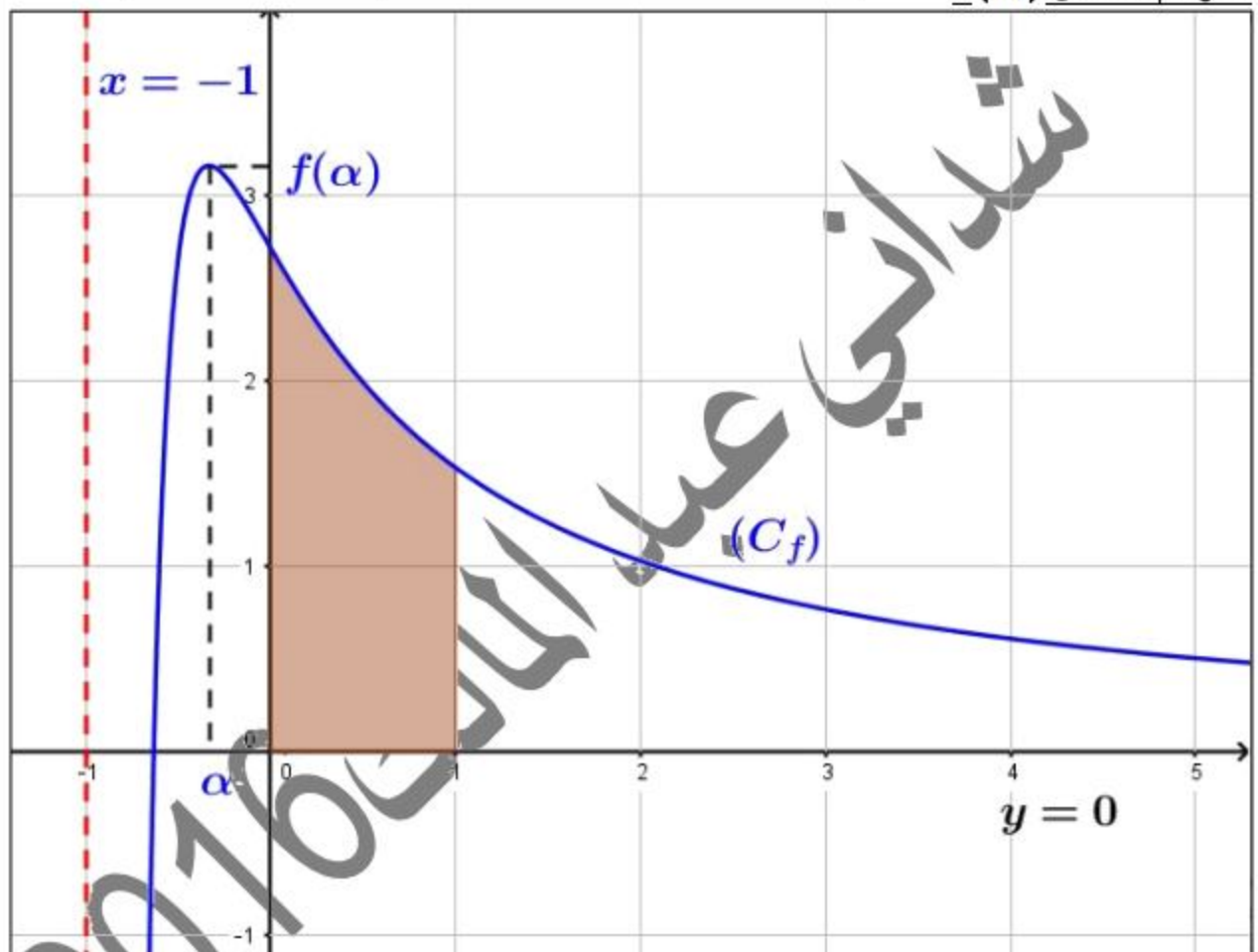
لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ لأن $(x+1)^3 > 0$ على $]-1; +\infty[$
ومنه: f دالة متزايدة تماما على $]-1; \alpha]$ و متناقصة تماما على $[\alpha; +\infty[$.

جدول التغيرات:

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$		$f(\alpha)$	

$-\infty \swarrow \quad \searrow 0$

د) رسم المنحنى (C_f) :



2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$ ،

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)] \right)' &= \left(\frac{-1}{x+1} \right)' [1 + \ln(x+1)] + [1 + \ln(x+1)]' \left(\frac{-1}{x+1} \right) \\
 &= \frac{1}{(x+1)^2} [1 + \ln(x+1)] + \frac{1}{x+1} \times \frac{-1}{x+1} \\
 &= \frac{1}{(x+1)^2} [1 + \ln(x+1) - 1] \\
 &= \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

منه الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على $]-1; +\infty[$

(ب) حساب مساحة الحيز:

مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي $x=0$ و $x=1$ هي :

$$S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] dx = \left[e \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} (1 + \ln(x+1)) \right]_0^1$$

$$= e \ln 2 - \frac{1}{2} (1 + \ln 2) + 1$$

$$= \frac{1}{2} + \left(e + \frac{1}{2} \right) \ln 2 \quad \text{u.a}$$

(3) أ) تبين أن k دالة زوجية :

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;1[$ فإن $-x$ من $]-1;1[$ ولدينا،
 $k(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = k(x)$ إذن k دالة زوجية .

(ب) كيفية إستنتاج المنحنى (C_k) انطلاقاً من (C_f) :

لدينا ، $k(x) = f(-|x|) = \begin{cases} f(-x) & ; x \in [0;1[\\ f(x) & ; x \in]-1;0] \end{cases}$ ومنه نستنتج ما يلي :

(C_k) ينطبق على (C_f) على المجال $]-1;0]$

- وبما أن k دالة زوجية فإن منحناها يكون متناظر بالنسبة لمحور الترتيب .
 رسم (C_k) :

(ج) المناقشة البيانية حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $k(x) = m$:

حلول المعادلة $k(x) = m$ يعود الى تعيين فواصل
 نقاط تقاطع (C_k) مع المستقيم ذي المعادلة $y = m$

المناقشة:

$m > f(\alpha)$: المعادلة لا تقبل حلول

$m = f(\alpha)$: المعادلة تقبل حلين مضاعفين مختلفين في

الإشارة

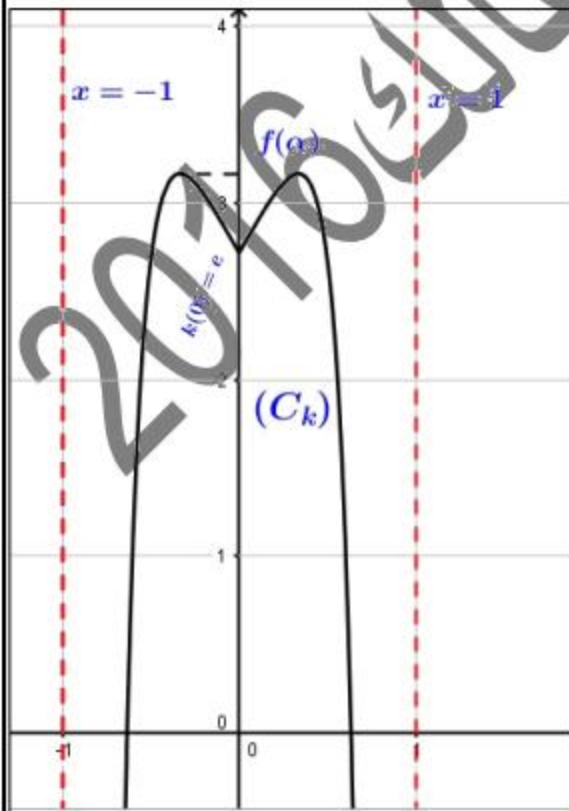
$e < m < f(\alpha)$: المعادلة تقبل أربعة حلول منها

حلين موجيين و حلين سالبين

$m = e$: المعادلة تقبل ثلاثة حلول منها، حل

موجب و حل معدوم و حل سالب .

$m < e$: المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة



0000000000000000

التصحيح المفصل لبيكالوريا جوان 2016

الأستاذ: شداني عبد المالك

الدورة الاستثنائية

الموضوع 02

التقيط

المحور: الهندسة الفضائية

تصحيح التمرين الأول (5 نقاط)

1) أ) تبين أن النقط A, B, C تعين مستويا :

لدينا، $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ومنه نلاحظ أن $\frac{-2}{-5} \neq \frac{-2}{-2} \neq \frac{5}{2}$ وبالتالي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و

$\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وعليه النقط A, B, C تعين مستويا

ب) تبين أن المعادلة $2x - 7y - 2z - 3 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

لدينا، $\begin{cases} 2x_A - 7y_A - 2z_A - 3 = 4 - 7 + 6 - 3 = 0 \\ 2x_B - 7y_B - 2z_B - 3 = 0 + 7 - 4 - 3 = 0 \\ 2x_C - 7y_C - 2z_C - 3 = -6 + 7 + 2 - 3 = 0 \end{cases}$ ومنه إحداثيات النقط A, B, C تحقق

المعادلة $2x - 7y - 2z - 3 = 0$ إذن فهي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2) كتابة المعادلة الديكارتية للمستوي (P) :

لدينا المستوي (P) يعامد المستقيم (BC) معناه $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

وعليه : $-3x - 3z + d = 0$ مع $d \in \mathbb{R}$ معادلة ديكارتية لـ (P)

- بما أن $A \in (P)$ نجد : $-3x_A - 3z_A + d = 0$ أي $d = -3$

إذن معادلة المستوي (P) هي $-3x - 3z - 3 = 0$ أو $x + z + 1 = 0$

3) أ) التمثيل الوسيط للمستقيم (D) تقاطع المستويين (ABC) و (P) :

لدينا، $\begin{cases} 2x - 7y - 2z - 3 = 0 & (1) \\ x + z + 1 = 0 & (2) \end{cases}$ مستقيم تقاطع المستويين (ABC) و (P) معناه يحقق

من (2) نجد : $x = -z - 1$

ومنه من (1) نجد : $2(-z - 1) - 7y - 2z - 3 = 0$ أي $-7y = 4z + 5$ أي $y = -\frac{4}{7}z - \frac{5}{7}$

بوضع $z = t$ نجد : $\begin{cases} x = -t - 1 \\ y = -\frac{4}{7}t - \frac{5}{7} \\ z = t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (D)

ب) تبين أن (D) عمود في المثلث ABC :

لدينا : $A \in (P)$ و $A \in (ABC)$ إذن : $A \in (D)$

- $(D) \perp (BC)$ لأن $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ حيث $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{4}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (D)

ومنه المستقيم (D) عمود في المثلث ABC ويشمل النقطة A

4) أ) التأكد أن الجملة المعطاة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

(Δ) متوسط المتعلق بالضلع [AC] في المثلث ABC معناه :

(Δ) يشمل $I\left(-\frac{1}{2}; 0; -2\right)$ منتصف القطعة [AC] و النقطة المقابلة للضلع [AC] وهي B

نستنتج ان $\overline{BI}\left(-\frac{1}{2}; 1; -4\right)$ شعاع توجيه المستقيم (Δ) و عليه نجد أن الجملة :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = -2 - 4k \end{cases} \quad / k \in \mathbb{R}$$

تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

ب) تبين أن (Δ) و (D) يتقطعان في نقطة G :

لدينا، $\overline{BI}\left(-\frac{1}{2}; 1; -4\right)$ و $\overline{u}\left(-1; \frac{4}{7}; 1\right)$ أشعة توجيه المستقيمين (Δ) و (D) على الترتيب

بما أن $\frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{\frac{4}{7}} \neq \frac{-4}{1}$ معناه أن الشعاعين $\overline{BI}$ و $\overline{u}$ غير مرتبطين خطياً أي (Δ) و (D) ليسا متوازيان أي أنهما ليسا من نفس المستوي أو متقطعان في نقطة .

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k = -t - 1 & (1) \\ k = -\frac{4}{7}t - \frac{5}{7} & (2) \\ -2 - 4k = t & (3) \end{cases}$$

- لكن $G(x; y; z)$ نقطة تقاطع المستقيمين فهي تحقق

بجمع (1) و (3) نجد: $-\frac{5}{2} - \frac{9}{2}k = -1$ ومنه $k = -\frac{1}{3}$

من (3): $t = -2 - 4\left(-\frac{1}{3}\right)$ أي $t = -\frac{2}{3}$

ومن أجل $(t; k) = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ نجد: $G\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

ج) تبين أن المثلث ABC متساوي الساقين:

لدينا، $\overline{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ و $\overline{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\overline{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ومنه $\begin{cases} AB = \sqrt{33} \\ AC = \sqrt{33} \\ BC = 3\sqrt{2} \end{cases}$ ، المثلث ABC متساوي الساقين

د) ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث ABC :

بما أن المثلث ABC متساوي الساقين فإن المستقيم (D) يكون متوسط المتعلق بالضلع [BC] في المثلث ABC و عليه النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC لأن نقطة تقاطع

متوسطات (Δ) و (D)

5) تعيين مجموعة النقط (E) :

$\|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\| = 3$ تكافئ $\|3\overline{MG}\| = 3$ تكافئ $MG = 1$ ومنه مجموعة (E) للنقط

M من الفضاء هي سطح الكرة ذات المركز G ونصف القطر 1 .

- 1) أ، إثبات ان المعادلة (E) تكافئ $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$:
 لدينا، $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=2\bar{z}^3-2\bar{z}^2+2\bar{z}+5\bar{z}^2-5\bar{z}+5=3\bar{z}^3+3\bar{z}^2-3\bar{z}+5$
 ومنه (E) تكافئ $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$
 ب) حلول المعادلة (E) :

$$\begin{cases} 2\bar{z}+5=0 \\ \bar{z}^2-\bar{z}+1=0 \end{cases} \quad (\diamond) \text{ تكافئ } (2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$$

$$\bullet \quad 2\bar{z}+5=0 \text{ يكافئ } \bar{z}=-\frac{5}{2} \text{ أي } z=-\frac{5}{2}$$

$$\bullet \text{ حلول المعادلة } (\diamond) : \text{ لدينا، } \Delta=-3 \text{ ومنه } \bar{z}_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ و } \bar{z}_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ وعليه}$$

$$\text{نجد أن : } z_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ و } z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{الخلاصة : حلول المعادلة (E) هي : } S=\left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

- 2) أ) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسّي :

$$\text{لدينا، } |z_A|=1 \text{ و } \arg z_A=-\frac{\pi}{3} \text{ ومنه } z_A=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$|z_B|=1 \text{ و } \arg z_B=\frac{\pi}{3} \text{ ومنه } z_B=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

- ب) إنشاء النقط A, B, C و D :

- ج) إثبات أن $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$:

$$z_B - z_C = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_B(z_A - z_C) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i - \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{منه : } z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$$

$$\text{د) طبيعة المثلث } ABC : \text{ لدينا، } z_B - z_C = z_B(z_A - z_C) \text{ منه } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = z_B = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ منه } z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$$

$$\text{وعليه نجد : } \begin{cases} BC = AC \\ (\overline{CA}; \overline{CB}) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ إذن المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع}$$

- 3) إنشاء النقط F وتحديد طبيعة المثلث AFC :

$$\begin{cases} CF = 2CA \\ (\overline{CA}; \overline{CF}) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ منه } \begin{cases} S\left(C; \frac{\pi}{3}; 2\right) \\ S(A) = F \end{cases} \text{ لدينا،}$$

$$\text{بما أن } (\overline{CA}; \overline{CB}) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k / k \in \mathbb{Z} \text{ نستج أن النقط } C, B \text{ و } F \text{ على إستقامية}$$

$$\text{بما أن } CA = CB \text{ فإن } CF = 2CB \text{ أي } B \text{ منتصف القطعة } [CF] \text{ وهم}$$

• تحديد طبيعة المثلث AFC :

لدينا مما سبق : $BC = BA = BF$ معناه B مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACF ذات القطر [CF] وعليه ينتج لنا أن المثلث ACF قائم في A

4) تعيين مجموعة النقط (Γ) :

$$z + 1 = kz_B \quad z - z_C = ke^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{مع } k \text{ يتغير في } \mathbb{R}_+$$

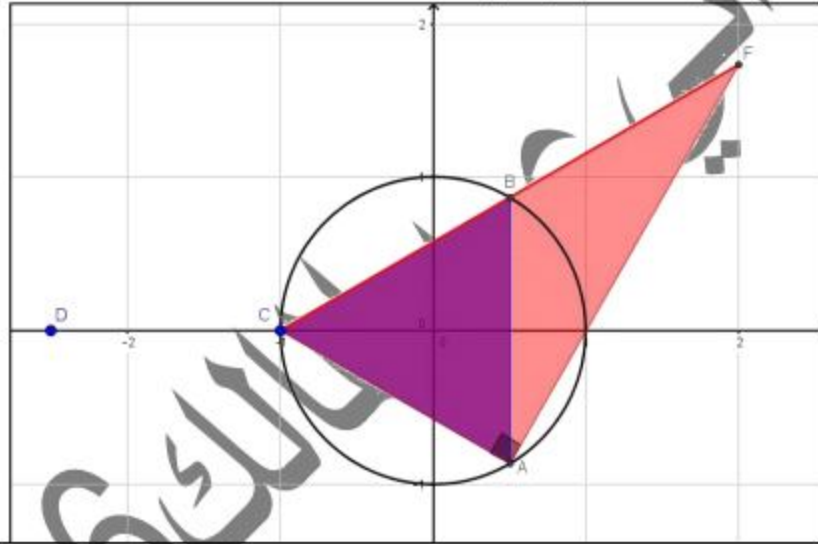
$$\arg(z - z_C) = \arg\left(ke^{i\frac{\pi}{3}}\right) \quad \text{يكافئ}$$

$$(\bar{u}; \overline{CM}) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{يكافئ}$$

منه مجموعة النقط (Γ) للنقط M من المستوي هي نصف مستقيم (D) الذي مبدؤه C و

موجه بالشعاع $\vec{w}$ حيث $(\bar{u}; \vec{w}) = \frac{\pi}{3}$ أي ان $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$

الرسم:



تصحيح التمرين الثالث (5 نقاط)

التقيط

المحور: المتتاليات العددية

1) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول:
من اجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} - 1}{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} + 2} = \frac{\frac{u_n - 1}{u_n + 3}}{\frac{4u_n + 8}{u_n + 3}} = \frac{u_n - 1}{4u_n + 8} = \frac{1}{4} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{1}{4} \times v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = -\frac{1}{2}$

2) أ) عبارة الحد العام v_n :

$$v_n = v_0 \times q = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = -\frac{1}{2 \times 4^n} \quad \text{من اجل كل عدد طبيعي } n$$

ب) إستنتاج عبارة u_n :

لدينا، $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ ومنه $(u_n + 2)v_n = u_n - 1$ أي $u_n v_n + 2v_n = u_n - 1$ أي

$$u_n = \frac{-2\left(-\frac{1}{2 \times 4^n}\right) - 1}{-\frac{1}{2 \times 4^n} - 1} \quad \text{وبتالي نجد: } u_n = \frac{-2v_n - 1}{v_n - 1} \quad \text{ومنه } (v_n - 1)u_n = -2v_n - 1$$

$$u_n = \frac{2 \times 4^n - 2}{2 \times 4^n + 1} \quad \text{وبعد التبسيط نجد:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \times 4^n - 2}{2 \times 4^n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \times 4^n \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}{2 \times 4^n \left(1 + \frac{1}{4^n}\right)} = 1 \quad \text{ج) حساب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n :$$

(3) أ) حساب المجموع S_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -\frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{2}{3} \left[1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right] = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{4^{n+1}} - 1\right]$$

$$\text{ب) التحقق ان: } \frac{1}{-u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$$

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n, \text{ لدينا } u_n = \frac{-2v_n - 1}{v_n - 1} \text{ و عليه } u_n + 2 = \frac{-2v_n - 1}{v_n - 1} + 2 = \frac{-3}{v_n - 1}$$

$$\text{ومنه: } \frac{1}{-u_n + 2} = \frac{v_n - 1}{-3} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$$

ج) إستنتاج حساب S'_n :

$$\begin{aligned} S'_n &= \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_0) + \frac{1}{3}(1 - v_1) + \dots + \frac{1}{3}(1 - v_n) \\ &= \frac{1}{3} \left[\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1} - (v_0 + v_1 + \dots + v_n) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[(n+1) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4^{n+1}} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

تصحيح التمرين الرابع (6 نقاط)

التقيط

المحور: الدالة الأسية

الجزء 1

1) أ) حساب $g'(x)$:

$$\text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ نجد: } g'(x) = 2e^x - 2x - 1$$

دراسة إتجاه تغير الدالة g'

$$\text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ نجد: } g''(x) = 2e^x - 2$$

إشارة $g''(x)$: $g''(x) \geq 0$ تكافئ $2e^x - 2 \geq 0$ يكافئ $e^x \geq 1$ يكافئ $x \geq 0$ ومنه نستنتج:

g' دالة متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ و متناقصة تماماً على $]-\infty; 0]$

ب) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) > 0$:

نلاحظ أن الدالة g' تقبل قيمة حدية صغرى قيمتها $g'(0) = 1$ ومنه:

من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) \geq 1$ و عليه فإن $g'(x) > 0$

ج) حساب نهايتي g عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(2\frac{e^x}{x^2} - 1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - x^2 - x) = -\infty$$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α :

$$\begin{cases} g(-1,38) = \\ g(-1,37) = \end{cases}$$

الدالة g مستمرة ورتيبة تماماً على $[-1,38; -1,37]$ ولدينا ،

بما أن $g(-1,38) \times g(-1,37) < 0$ فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $-1,38 < \alpha < -1,37$

3) إشارة $g(x)$:

مما سبق نلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	○	+

الجزء 02:

1) أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^x}{e^x - x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (x^2)}{e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} \right)} = +\infty$$

ب) حساب $f'(x)$:

من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2xe^x + x^2e^x)(e^x - x) - (e^x - 1)(x^2e^x)}{(e^x - x)^2} = \frac{xe^x [(2+x)(e^x - x) - x(e^x - 1)]}{(e^x - x)^2} \\ &= \frac{xe^x [2e^x - 2x + xe^x - x^2 - xe^x + x]}{(e^x - x)^2} \\ &= \frac{xe^x (2e^x - x^2 - x)}{(e^x - x)^2} = \frac{xe^x g(x)}{(e^x - x)^2} \end{aligned}$$

ج) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $xg(x)$ لأن $\begin{cases} e^x > 0 \\ (e^x - x)^2 > 0 \end{cases}$ على $\mathbb{R}$

ونلخصها في الجدول التالي :

f دالة متناقصة تماما على المجال $[\alpha; 0]$
 f دالة متزايدة تماما في المجالين $]-\infty; \alpha]$ و $[0; +\infty[$

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
x	-		-	+
g(x)	-	○	+	+
f'(x)	+	○	-	+

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
f'(x)	+	○	-	+
f(x)		$f(\alpha)$		

(2) أ) حساب $f(\alpha)$:

لدينا، $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 e^\alpha}{e^\alpha - \alpha}$ ومن جهة أخرى $g(\alpha) = 0$ أي $2e^\alpha - \alpha^2 - \alpha$ أي $e^\alpha = \frac{\alpha^2 + \alpha}{2}$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2 \left(\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} \right)}{\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} - \alpha} = \frac{\alpha^2 (\alpha^2 + \alpha)}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{\alpha - 1} = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$$

ومنه نجد:

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا، $-1,37 < \alpha < -1,38$ منه $-2,37 < \alpha - 1 < -2,38$ ومنه $\frac{2}{-2,37} < \frac{2}{\alpha - 1} < \frac{2}{-2,38}$
 من جهة أخرى: $(-1,37)^2 < \alpha^2 < (-1,38)^2$ ومنه

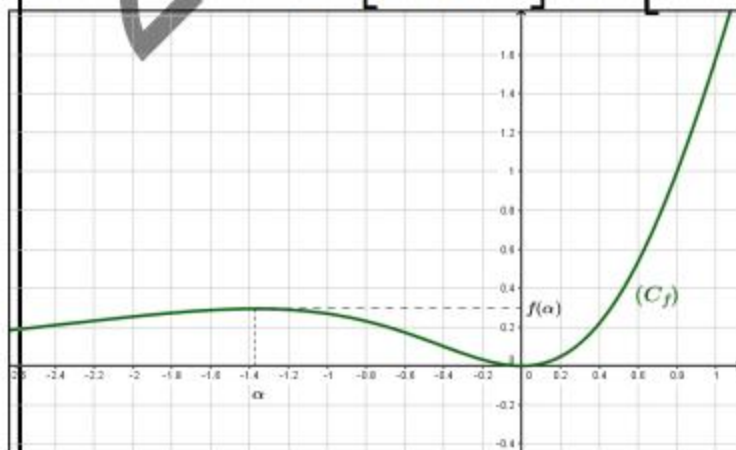
$$(-1,37)^2 + 2(-1,38) + 2 < \alpha^2 + 2\alpha + 2 < (-1,38)^2 + 2(-1,37) + 2$$

$$(-1,37)^2 + 2(-1,38) + 2 + \frac{2}{-2,37} < \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1} < (-1,38)^2 + 2(-1,37) + 2 + \frac{2}{-2,38}$$

وبعد الحساب نجد: $< f(\alpha) <$

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 e^x}{e^x - x} - x^2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 e^x - x^2 e^x - x^3}{e^x - x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} \left(\frac{-1}{1 - \frac{x}{e^x}} \right) = 0$$



التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) و

المنحنى (C) الممثل للدالة المربع

$x \mapsto x^2$ متقاربين عند $+\infty$

ج) إنشاء المنحنى (C_f) :