الإجابة النموذجية لموضوع امتحان البكالوريا دورة: **2016**

اختبار مادة: **الرياضيات** الشعبة: رياضيات المدة : **04** سا و **30** د

| العلامة | | عناصر الإجابة ( الموضوع الأوّل ) |
|---|---|---|
| مجموع | مجزأة | |
| 04,5 | | **التمرين الأوّل: ( 04,5 نقطة)** |
| | $0,25$ | 1.أ) $\overrightarrow{AB}(1;-2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-1;1)$ غير مرتبطين خطيا |
| | $0,75$ | ب) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ و $x+3y+5z-4=0$ معادلة للمستوي $(ABC)$. |
| | $0,25\times 2$ | 2.أ) $(P): x+3y+z-6=0$ و الشعاعين $\vec{n}$ و $\vec{n}_P$ غير مرتبطين خطيا. |
| | $0,50\times 2$ | ب) $D\in(\Delta)$ و $\vec{u}$ شعاع توجيه له. |
| | $0,25$ | جـ) $(\lambda\in\mathbb{R})$ , $\begin{cases} x=-3\lambda+\frac{1}{2} \\ y=\lambda+2 \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}(\Delta)$ . |
| | $0,75$ | د) $(H\in(\Delta))$ و $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$ و $d(A;(\Delta))=AH=\frac{\sqrt{14}}{4}$ . |
| | $0,25$ | 3. أ) $G(-6;5;-1)$. |
| | $0,25$<br>$0,25$ | ب) $(\Gamma): x^2+y^2+z^2+6x-6y-7=0$.<br>$(\Gamma): (x+3)^2+(y-3)^2+z^2=25$.<br>$(\Gamma)$ سطح كرة مركزها $\Omega(-3;3;0)$ و نصف قطرها 5. |
| | $0,25$ | جـ ) $d(\Omega;(ABC))=\frac{2}{\sqrt{35}}$ و $\frac{2}{\sqrt{35}}<5$ ، $(\Gamma)$ يقطع $(ABC)$ وفق دائرة . |
| 02,75 | | **التمرين الثاني: ( 04,5 نقطة)** |
| | $0,50$ | 1.$u_1$ و $u_2$ حلا المعادلة $x^2-e^4(1+e^3)x+e^{11}=0$ ، $\Delta=\left[e^4(e^3-1)\right]^2$<br>$u_1<u_2$ منه $u_1=e^4$ و $u_2=e^7$ و $q=e^3$ |
| | $0,25$ | 2.أ) $u_n=e^{3n+1}$. |
| | $0,50$ | ب) $S_n=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$. |
| | $0,50$ | 3. أ) $2S_n=a_n(3n-4)+14$ .<br>تبيان أن: $PGCD(2S_n,a_n)=PGCD(a_n,14)$. |
| | $0,25$ | ب) القيم الممكنة لـ $PGCD(2S_n,a_n)$ هي 1 ، 2 ، 7 ، 14. |
| | $0,75$ | جـ) $n=14k+4$ و $k\in\mathbb{N}$ . |

| العلامة | | عناصر الإجابة ( الموضوع الأوّل ) |
|---|---|---|
| مجموع | مجزأة | |
| 01,75 | 0,50 | .4 $k \in \mathbb{N}$ <table><tr><td>$n$</td><td>$3k$</td><td>$3k+1$</td><td>$3k+2$</td></tr><tr><td>الباقي</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr></table> |
| | 0,75 | .5 $n=35p$ حيث $p \in \mathbb{N}$ |
| | 0,50 | .6 $1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$. |
| 04,5 | | **التمرين الثالث: ( 04,5 نقطة)** |
| | 0,50 | 1.أ) $z_1 = 2+i$ و $z_2 = 2-i$ . |
| | 0,50 | ب) $z' = 1+i\sqrt{3}$ و $z'' = 1+i\left(\sqrt{3}-2\right)$ |
| | 0,25 | 2.أ) $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ . |
| | 0,50 | ب) $\theta = \frac{\pi}{12}$ . |
| | 0,25 | جـ) $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n = \cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)$ . |
| | 0,50 | د) $n=24p$ و $p \in \mathbb{N}$ . |
| | 0,25 | 3.أ) $z_D = 1+i\left(\sqrt{3}-2\right)$ |
| | 0,25 | ب) الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع. |
| | 0,50<br>0,25 | جـ) - $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$ .<br>- التشابه المباشر مركزه $E$ نسبته 2 و $\frac{\pi}{2}$ زاوية له . |
| | 0,25 | 4.أ) $z_I = 2$ . |
| | 0,25 | ب) $\left\|z_E - z_I\right\| = 1$ . |
| | 0,25 | $(\Gamma)$ هي الدائرة التي مركزها $I$ و نصف قطرها 1. |
| 01 | | **التمرين الرابع: ( 06,50 نقطة )** |
| | 0,50 | I) 1. $g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$ ، $g$ متزايدة تماما على المجال. |
| | 0,50 | 2. المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ يُحقّق : $0,52 < \alpha < 0,53$.<br>$g(0,52) \approx -0,04$ و $g(0,53) \approx 0,01$ |

| عناصر الإجابة ( الموضوع الأوّل ) | العلامة مجزأة | العلامة مجموع |
|---|---|---|
| .3 $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \alpha & & +\infty \\ \hline g(x) & & - & 0 & + & \end{array}$ | $0,25$ | |
| II) .1 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ . | $0,25 \times 2$ | |
| .2 أ) $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{x^2}$ . | $0,50$ | |
| ب) جدول تغيرات الدالة $f$ . | $0,25$ | |
| جـ) $f(\alpha) = 2\left(\dfrac{1}{\alpha} - \alpha\right)$ و $2,71 < f(\alpha) < 2,81$. | $0,25 \times 2$ | |
| .3 أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + x] = 0$ ، $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta): y = -x$. | $0,25 \times 2$ | |
| ب) وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$. | $0,25$ | |
| جـ) $(T): y = -x + 2\sqrt{e}$ . | $0,50$ | |
| .4 إنشاء $(T)$ و $(\Delta)$ و $(C_f)$. | $0,50$ | |
| .5 المناقشة بيانيا:<br>– إذا كان $m \leq 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلا وحيدا.<br>– إذا كان $0 < m < 2\sqrt{e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلّين متمايزين.<br>– إذا كان $m = 2\sqrt{e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلا مضاعفا.<br>– إذا كان $m > 2\sqrt{e}$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلولا. | $0,50$ | $05,50$ |
| III) .1 الدالة $h: x \mapsto f(x) + x$ موجبة تماما على المجال $\left[e^n; e^{n+1}\right]$ من أجل كل عدد طبيعي $n$. | $0,25$ | |
| .2 $u_0$ يشير إلى مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = e$ . | $0,25$ | |
| .3 $u_n = 2n + 4$. | $0,50$ | |
| .4 $S_n = n^2 + 5n + 4$ . | $0,25$ | |

الإجابة النموذجية لموضوع امتحان البكالوريا دورة: 2016

اختبار مادة: الرياضيات الشعبة: رياضيات المدة : 04 سا و 30 د

| العلامة | | عناصر الإجابة ( الموضوع الثاني ) |
|---|---|---|
| مجموع | مجزأة | |
| 05 | | **التمرين الأوّل:** (05 نقاط ) |
| | 0,50 | 1) أ. $\overrightarrow{AB}(0;2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;-1)$ : $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$ ومنه $\alpha=1$ و $\beta=2$ . |
| | 0,50 | ب . $(ABC): 2x+y-2z+4=0$ . |
| | 0,25 | 2) أ . $\vec{n}\perp\vec{n}$ ، $\vec{n}\cdot\vec{n}_{(P)}=0$ . |
| | 0,50 | ب . $\begin{cases}x=t\\ y=-4t\ ;\ (t\in\mathbb{R})\\ z=2-t\end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$. |
| | 0,75 | جـ . المسافة بين النقطة $D$ و المستقيم $(\Delta)$ .<br>لدينا: $d(D;(Q))=4$ و $d(D;(P))=\sqrt{2}$ ومنه $d((\Delta);D)=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$ |
| | 0,25 | 3) أ. معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$: $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4^2$ . |
| | 0,25<br>0,50<br>0,25 | ب . إيجاد الطبيعة والخصائص المميزة لتقاطع المستوي $(Q)$ وسطح الكرة $(S)$<br>$d(D;(P))=\sqrt{2}<4$ إذن $(S)$ و $(P)$ يتقاطعان وفق دائرة مركزها نقطة تقاطع المستقيم العمودي على $(P)$ والمار من $D$ إذن إحداثياتها تحقق<br>$(3+t)+0(4)+(1+t)-2=0$ أي $t=-1$ وبالتالي $\omega(2;4;0)$<br>نصف قطرها : $r$ يحقق $r=\sqrt{4^2-(\sqrt{2})^2}$ أي $r=\sqrt{14}$ . |
| | 0,25 | 4) أ . المجموعة $(\Gamma)$: $MG_0=MG_1$ ومنه $(\Gamma)$ هي المستوي المحوري للقطعة $[G_0G_1]$ |
| | 0,25 | ب. كتابة $\overrightarrow{CG_\lambda}$ بدلالة $\overrightarrow{CH}$: $\overrightarrow{CG_\lambda}=\frac{1}{1+e^{\lambda}}\overrightarrow{CH}$ . |
| | 0,25<br>0,25 | جـ . مجموعة النقط $G_\lambda$ لما $\lambda\in\mathbb{R}$: لدينا $\lambda\in\mathbb{R}$ إذن $\frac{1}{1+e^{\lambda}}\in]0;1[$ .<br>مجموعة النقط هي قطعة المستقيم $[CH]$ باستثناء طرفيها $C$ و $H$ |
| | 0,25 | د. $G_\lambda$ منتصف القطعة المستقيمة $[CH]$ معناه $\overrightarrow{CG_\lambda}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CH}$ أي $e^{\lambda}=1$ فيكون بذلك $\lambda=0$ . |
| 01,50 | | **التمرين الثاني :** (04 نقاط ) |
| | 0,50 | I) 1) حل المعادلة $z^2-2z+2=0$ : $S=\{1-i;1+i\}$ |
| | 0,50 | 2) إيجاد $z_1$ و $z_2$ : $z_1=i\sqrt{2}$ و $z_2=-i\sqrt{2}$ |
| | 0,25<br>0,25 | II ) 1) كتابة $z_H$ على الشكل الأسي و استنتاج نوع المثلث $BEC$ .<br>$z_E=-1+i$ ، $z_H=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)=1.e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ ، المثلث $BEC$ متقايس الساقين $BC=BE$ |

| عناصر الإجابة ( الموضوع الثاني ) | العلامة مجزأة | العلامة مجموع |
|---|---|---|
| 2) أ. $z' = z_A z + z_B$ ، $\|z_A\| = \sqrt{2}$ إذن $S$ تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$<br>وقيس زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\frac{z_B}{1-z_A} = \frac{2}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}$ | 0,50<br>0,50 | 02,50 |
| ب. $CD = \|z_D - z_C\| = \|-2i\| = 2$ إذن مساحة الدائرة $4\pi\, ua$ | 0,25 | |
| جـ. $(\gamma')$ هي الدائرة ذات المركز $C'\left(-\sqrt{2};0\right)$ صورة $C$ ونصف قطرها $2\sqrt{2}$<br>مساحتها $(4\pi)\left(\sqrt{2}\right)^2 = 8\pi\, ua$ | 0,50<br>0,25 | |
| 3) مجموعة النقط $(\delta)$ حيث $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقيا سالبا تماما<br>$\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقيا سالبا تماما معناه قيس الزاوية $\left(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MB}\right) = \pi + 2k\pi \ / k \in \mathbb{Z}$<br>إذن $(\delta)$ القطعة المستقيمة $[CB]$ باستثناء طرفيها $B$ و $C$. | 0,50 | |
| <u>**التمرين الثالث:**</u> **( 04 نقاط )** | | 04 |
| 1) أ. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد $3^n$ على $11$ : $r \in \{1;3;4;5;9\}$ | 0,50 | |
| دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد $7^n$ على $11$ : $r' \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ | 0,75 | |
| ب. برهان أنه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ فإنّ: $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ تقبل القسمة على العدد $11$.<br>لدينا $2016 \equiv 3[11]$ إذن $2016^{5n+4} \equiv 3^{5n+4}[11]$ و منه: $2 \times 2016^{5n+4} \equiv 8[11] .....(1)$<br>لدينا $1437 \equiv 7[11]$ و منه $1437^{10n+4} \equiv 7^{10n+4}[11]$ أي: $1437^{10n+4} \equiv 3[11].....(2)$<br>من $(1)$ و $(2)$ نجد : $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 0[11]$. | 0,25<br>0,25<br>0,25 | |
| 2) أ. مجموعة حلول المعادلة $(E)$: $(x;y) = (3k+2;7k+2)\ , k \in \mathbb{N}$ | 0,50 | |
| ب. − القيم الممكنة للعدد $d$: $d \in \{1;2;4;8\}$.<br>− تعيين كل الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة $(E)$ من أجل $d = 4$.<br>$(x;y) = (24k' + 20; 56k' + 44)\ , k' \in \mathbb{N}$. | 0,50<br>0,50 | |
| جـ. $(x;y) = (30k+17;70k+37)\ , k \in \mathbb{N}$. | 0,50 | |
| <u>**التمرين الرابع:**</u> **( 07 نقاط )** | | 01 |
| I) أ. $\varphi(x) = e\left(\frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) - 1$ إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -1$. | $0,25 \times 2$ | |
| ب . اتجاه التغيّر : $\varphi'(x) = -(x-1)(x-2)e^{-x+1}$.<br>الدالة $\varphi$ متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $[2;+\infty[$<br>الدالة $\varphi$ متزايدة تماما على المجال $[1;2]$ . | 0,25<br>0,25 | |

| عناصر الإجابة ( الموضوع الثاني ) | العلامة | |
|---|---|---|
| | **مجزأة** | **مجموع** |
| جدول تغيرات الدالة $\varphi$ . | **0,25** | **06** |
| 2) بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا $\alpha$ يختلف عن 1 | **0,50** | |
| 3) إشارة $\varphi(x)$. | **0,25** | |
| II) 1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ | **0,25 × 2** | |
| ب) $f'(x)=(3-2x)e^{-x+1}$ . إشارة $f'(x)$ : $-\infty$ + $\frac{3}{2}$ (0) − $+\infty$<br>الدالة $f$ متزايدة تماما على $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$ و متناقصة تماما على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.<br>جدول التغيّرات | **0,25**<br>**0,25**<br>**0,25** | |
| 2) المنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ لهما نفس المماس $(T)$<br>أي : $\begin{cases} f(1)=g(1)=1 \\ f'(1)=g'(1)=1 \end{cases}$ و منه المنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ لهما نفس المماس $(T)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1<br>$(T): y=x$ | **0,25**<br>**0,25** | |
| 3) رسم $(T)$ و $(C_f)$ | **0,50** | |
| 4) أ) تبيان أنّ: $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$ | **0,25** | |
| ب. دراسة إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ : $-\infty$ − $\frac{1}{2}$ (0) + $1$ (0) + $\alpha$ (0) − $+\infty$<br>– الوضع النسبي لـ $(C_f)$ و $(C_g)$. | **0,25**<br>**0,25** | |
| جـ. الدالة: $\int_1^x f(t)\,dt=-(2x+1)e^{-x+1}+3$ . | **0,25** | |
| د. المساحة : $\mathrm{A}=\int_1^2\big(f(x)-g(x)\big)dx=3-\dfrac{5}{e}-\ln 3$ . | **0,25** | |
| III) 1) $f''(x)=(2x-5)e^{-x+1}$ و $f'''(x)=-(2x-7)e^{-x+1}$ ،<br>$f^{(4)}(x)=(2x-9)e^{-x+1}$ | **0,25** | |
| – التخمين: $f^{n}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$ | **0,25** | |
| 2) البرهان بالتراجع أنّ: من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$ ،<br>$f^{n}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$ | **0,50** | |
| 3) أ. حساب : $u_{k+1}+u_k=2(-1)^k$ | **0,25** | |
| ب. $u_1+u_2+\cdots+u_{2n}=(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots+(u_{2n-1}+u_{2n})=-2n$ | **0,25** | |

**ملاحظة:** تقبل جميع الطرق الممكنة للحل.