

التمرين الاول: المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

نتكن النقط A, B, C لواحقها على الترتيب: $z_A = 1+i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1-i$ ، $z_C = 2z_B$

(1) مثل النقط A, B, C

(2) اكتب كل من z_A و z_B ، $z_A \times z_B$ على الشكل المثلثي.

(3) اكتب $z_A \times z_B$ على الشكل الجبري

(4) استنتج القيم المضبوطة لكل من: $\cos \frac{\pi}{12}$ ، $\sin \frac{\pi}{12}$

(5) $M(x; y)$ نقطة ذات الاحقة Z

$\triangleright (F)$ مجموعة النقط M من المستوي حيث: $|Z - 1 - i\sqrt{3}| = |Z - 1 + i|$

• عين طبيعة مجموعة النقط (F)

(6) (T) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\text{Arg}(\bar{Z} - 1 - i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

• هل النقطة C تنتمي الى (T) .

(7) عين طبيعة مجموعة النقط (T) .

التمرين الثاني: نعتبر في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد متجانس

نتكن النقط $A(1,1,1)$ ، $B(3,2,0)$

(1) اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل B و عمودي على المستقيم (AB)

(2) اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) ذات المركز A و نصف القطر AB

(3) ليكن المستوي (Q) ذو المعادلة: $x - y + 2z + 4 = 0$

- هل المستوي (Q) مماس لسطح الكرة (S)

(4) بين ان المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (Q) هي النقطة $C(0,2,-1)$

(5) بين ان (P) و (Q) متقاطعان وفق المستقيم (Δ) حيث تمثيله الوسيط $t \in \mathbb{R}$ Δ : $\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$

(6) تحقق ان A لا تنتمي الى المستقيم (Δ)

(7) ليكن (R) المستوي الذي يشمل A ويحوي على المستقيم (Δ) هل المستوي (R) هو المستوي المحوري للقطعة $[BC]$

اذا كانت الاجابة بنعم ماذا تمثل النقطة B بالنسبة الى C

التمرين الثالث:

(I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = \begin{cases} -x + x(\ln x + 1) & \text{اذا كان } x > 0 \\ 0 & \text{اذا كان } x = 0 \end{cases}$$

- (1) احسب نهايات الدالة g عند $+\infty$
- (2) عين اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول التغيرات.
- (3) احسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x اشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x+1}{x} + \frac{\ln x}{x}$

(C_f) هو التمثيل البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (o, \vec{i}, \vec{j})

- (1) احسب نهايات الدالة f على اطراف مجموعة التعريف ثم فسر هندسيا النتائج
 - (2) بين انه من أجل كل قيم x من \mathbb{R} ان: $f'(x) = \frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right)$
 - (3) استنتج ان الدالة f متزايدة تماما على $]0; 1[$ و متناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$ ثم شكل جدول التغيرات
 - (4) عين حسب قيم x اشارة $f(x) - 1$ ثم فسر هندسيا النتيجة
 - (5) اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الإحداثيات $A(1; y)$
 - (6) اثبت ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 < \alpha \leq 1$
 - (7) أشئ كل من (C_f) و (T)
 - (8) m عدد حقيقي موجب تماما
- ❖ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة: $e^{f(x)} = m$.
- مساعدة: $e^{-1} = 0.36$

بالتوفيق استاذ المادة: ز. أسامة

العمل المستمر والمنظم هو بداية النجاح

التمرين الاول:

$$Z_C = 2Z_B = 2 - 2i, Z_B = 1 - i, Z_A = 1 + i\sqrt{3}$$

تمثيل النقط:

$$Z_A = 1 + i\sqrt{3} \text{ صورة العدد المركب: } A(1; \sqrt{3})$$

$$Z_B = 1 - i \text{ صورة العدد المركب: } B(1; -1)$$

$$Z_C = 2 - 2i \text{ صورة العدد المركب: } C(2; -2)$$

تمثل النقط A, B, C في المستوي المنسوب الى معلم م.م $(o; \vec{i}; \vec{j})$

كتابة كل من z_A, z_B, z_C على الشكل المثلي

$$Z_B = \sqrt{2}(\cos -\frac{\pi}{4} + i \sin -\frac{\pi}{4}), Z_A = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$$

$$|Z_A \times Z_B| = |Z_A| \times |Z_B| = 2\sqrt{2} \text{ بالنسبة لـ } z_A \times z_B : \\ \text{Arg}(Z_A \times Z_B) = \text{Arg}(Z_A) + \text{Arg}(Z_B) \\ = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

$$Z_A \times Z_B = 2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$$

اكتب $z_A \times z_B$ على الشكل الجبري:

$$z_A \times z_B = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$$

$$\text{استنتاج القيم المضبوطة لكل من: } \cos \frac{\pi}{12}, \sin \frac{\pi}{12}$$

بالمطابقة بين الشكل الجبري والشكل المثلي لـ $z_A \times z_B$

$$\text{إن: } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}, \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

تعين طبيعة مجموعة النقط: $(F) : |Z - 1 - i\sqrt{3}| = |Z - 1 + i|$

$$|Z - Z_A| = |Z - Z_B| \text{ اي } |Z - (1 + i\sqrt{3})| = |Z - (1 - i)|$$

$AM = BM$ ومنه (F) هي محور القطعة المستقيمة $[BC]$

$(T) : \text{مجموعة النقط: } \text{Arg}(\overline{Z} - 1 - i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$C \in (T)$ معناه المساواة $\text{Arg}(\overline{Z_C} - 1 - i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ محققة

$$\text{Arg}(\overline{(2 - 2i)} - 1 - i) = \text{Arg}(2 + 2i - 1 - i) \\ = \text{Arg}(1 + i) \text{ نتأكد:} \\ = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

ان: $C \in (T)$ صحيح

تعين طبيعة مجموعة النقط: (T)

$$\text{Arg}(\overline{Z} - 1 - i) = \text{Arg}(\overline{Z} - 1 + i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$-\text{Arg}(Z - 1 + i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{Arg}(Z - (1 - i)) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$(\overline{U}; \overline{BM}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

ومنه M هي نصف المستقيم $\{B\} - [BM]$ الذي يشمل النقطة C

اي $\{B\} - [BC]$ الذي ميله $-\frac{\pi}{4}$.

التمرين الثاني: لتكن النقط: $A(1, 1, 1), B(3, 2, 0)$

المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل B و عمودي على المستقيم (AB) :

معناه: $\overline{AB}(2; 1; -1)$ شعاع ناظمي لـ (P) ويشمل B معناه:

هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $\overline{BM} \cdot \overline{AB} = 0$

$$\text{اي: } (P): 2x + y - z - 5 = 0$$

معناه: $\overline{AB}(2; 1; -1)$ شعاع ناظمي لـ (P) معناه معادلة (P)

من الشكل: $2x + y - z + d = 0, (P)$

ويشمل B معناه: $d = -5$

اي معادلة المستوي (P) هي $(P): 2x + y - z - 5 = 0$.

المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) ذات المركز A و نصف القطر AB

لتكن $M(x; y; z)$ من الفضاء تنتمي الى (S) معناه:

$$AM = AB = \sqrt{6} \text{ ومنه مباشرة بعد الحساب نجد:}$$

$$(S): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 6$$

هل المستوي (Q) مماس لسطح الكرة (S) : نعم

التبرير: $d(A; (Q)) = AB = \sqrt{6}$

بين ان المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (Q) هي النقطة

$$C(0, 2, -1)$$

1) نتأكد من ان $C \in (Q)$ و $AC = \sqrt{6} = d(A; (Q))$

2) نتأكد من ان: $C \in (Q)$ و $\overline{AC} \parallel \vec{n}_Q$.

تبيان ان (P) و (Q) متقاطعان وفق المستقيم (Δ) حيث تمثله

الوسيطي

3- استنتاج ان الدالة f متزايدة تماما على $]0;1[$ ومتناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

(1ط) ندرس اشارة $\frac{-\ln x}{x^2}$ فنحصل على النتيجة مباشرة .

(2ط) نستنتج من اشارة $g(\frac{1}{x})$ لأن $\frac{1}{x} > 0$ ، فان $x \in]1;+\infty[$:

$g(x) > 0$ أي $x \in]1;+\infty[$ أي $\frac{1}{x} \in]0;1[$ فان $x \in]0;1[$: $g(\frac{1}{x}) > 0$

و $x \in]0;1[$ فان $g(x) < 0$ أي $\frac{1}{x} \in]1;+\infty[$

أي $x \in]1;+\infty[$ فان $g(\frac{1}{x}) < 0$ ومه : ان الدالة f متزايدة تماما على $]0;1[$ و متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

4 - اشارة : $f(x) - 1$

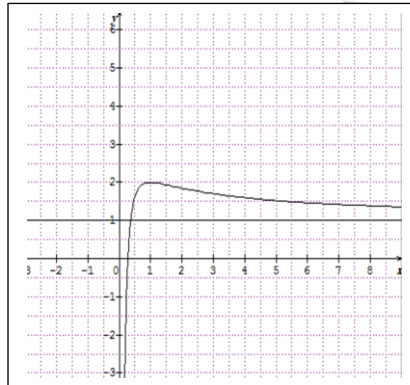
$x \in]e^{-1};+\infty[$ لما $f(x) - 1 > 0$ أي (C_f) فوق المستقيم $y = 1$

$x \in]0;+e^{-1}[$ لما $f(x) - 1 < 0$ أي (C_f) تحت المستقيم $y = 1$

$x = e^{-1}$ لما $f(x) - 1 = 0$ أي (C_f) يقطع المستقيم $y = 1$

5- معادلة المماس (T) عند $A(1; y)$: $(T) : y = 2$

7- المناقشة البيانية: $m \in]0;+\infty[$ أي $f(x) = m$



لما $\ln m \in]-\infty;1[$

أي $m \in]0;e[$ حل وحيد موجب

لما $\ln m \in]1;2[$

أي $m \in]e;e^2[$ حلين موج

لما $\ln m = 2$ أي $m = e^2$

حل مضاعف موجب

لما $\ln m \in]2;+\infty[$ أي $m \in]e^2;+\infty[$ لا يوجد حلول.

$$g(x) = \begin{cases} -x + x(\ln x + 1) & \text{اذا كان } x > 0 \\ 0 & \text{اذا كان } x = 0 \end{cases}$$

1- حساب نهايات الدالة g عند $+\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty + \infty$ ت

ازالتها: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(-1 + \ln x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$

2- اتجاه تغير الدالة g :

المشتق: g دالة ق. و دالتها المشتقة هي : $g'(x) = \ln x + 1$

اشارة $g'(x) \geq 0$: فان $x \in [e^{-1}; +\infty[$

$g'(x) \leq 0$: فان $x \in]-\infty; e^{-1}]$

اتجاه التغير: لما $x \in]-\infty; e^{-1}[$ فان g دالة متناقصة تماما

لما $x \in [e^{-1}; +\infty[$ فان g دالة متزايدة تماما.

جدول التغيرات:

3- $g(1) = 0$ ومه اشارة $g(x)$ هي :

$x \in]1;+\infty[$ فان $g(x) > 0$ ، $x \in]0;1[$ فان $g(x) < 0$

لما $x = 1$ فان $g(x) = 0$

II) لتكن الدالة المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{x+1}{x} + \frac{\ln x}{x}$: $D_f =]0;+\infty[$

1- حساب نهايات الدالة f على اطراف مجموعة التعريف ثم فسر هندسيا

النتائج

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 1 \text{ لان } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} + \frac{\ln x}{x} = +\infty + \frac{-\infty}{0^+} = +\infty - \infty$$

$$\text{ازالتها: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}(x+1+\ln x) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

$y = 1$ م. موازي لمحور الفواصل بجوار $+\infty$ و $x = 0$ م م في جوار $-\infty$

تبيان انه من أجل كل قيم x من \mathbb{R} ان: $f'(x) = \frac{1}{x} g(\frac{1}{x})$

$$f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2} = \frac{1}{x} g(\frac{1}{x})$$

بعد الحساب نجد:

$$(\Delta) : \begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

(1ط) نتأكد من ان \overline{AB} ش نظ ل (P) و $\overline{n_Q}$ غير مرتبطان خطيا و

$$(\Delta) \subset (P) \text{ و } (\Delta) \subset (Q)$$

نعوض احداثيات المستقيم (Δ) في كل من (P) و (Q) نجد $0 = 0$

(2ط) نتأكد من ان \overline{AB} ش نظ ل (P) و $\overline{n_Q}$ غير مرتبطان خطيا

$$\text{ثم نحل الجملة : } \begin{cases} 2x + y - z - 5 = 0 \\ x - y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

ثم نضع $x = t$ او نضع $y = 12 - 5t$ مع $t \in \mathbb{R}$

تحقق ان A لا تنتمي الى المستقيم (Δ) : نجد ان: $t = 1 \neq \frac{11}{5} \neq 1$

اذن : A لا تنتمي الى المستقيم (Δ) .

(R) المستوي الذي يشمل A ويحوي على المستقيم (Δ) المستوي

(R) هو المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ نعم

(R) مستوي معرف بنقطة ومستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}(1; -5; -3)$

نختار نقطة من المستقيم ولتكن $E(0; 12; 4)$

$\overline{BC} \cdot \overline{AE} = 0$ و $\overline{BC} \cdot \overline{UE} = 0$ اذن $\overline{BC} \perp \overline{AE}$ ش نظ ل المستوي (R)

$I(\frac{3}{2}; 2; \frac{-1}{2})$ منتصف $[BC]$ اي يبقى التأكد من ان $I \in (R)$ نحسب

$\overline{BC} \cdot \overline{AI} = 0$ ومه $I \in (R)$ ومه (R) هو المستوي المحوري

للقطعة $[BC]$

ملاحظة يمكن ان نستعمل طرق اخرى للإثبات كأن تستعمل كتابة المعادلة بطريقة من الطرق.

المهم ان يكون I منتصف $[BC]$ ينتمي الى (R) و \overline{BC} مرتبط خطيا

مع الشعاع الناظمي ل (R) ، ، ، او نحسب $BM = CM$ نجدها هي

معادلة المستوي (R)

C هي نظيرة النقطة B بالتناظر المحوري بالنسبة للمستوي (R)

التمرين الثالث: لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: