الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الــــوادي — ثانويات: 19 مارس 1962 - عبد العزيز الشريف
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — متقن ميلودي العروسي
الشعبة: علوم تجريبية — (دورة: ماي 2015)

اختبار في مادة الرياضيات — المـدة: 03 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضــوع الأول

التمرين الأول :(04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(-1;0;1)$ ، $B(1;1;0)$ و $C(0;-1;-4)$.

و ليكن (Δ) المستقيم المعرف بتمثيله الوسيطي التالي : $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+3\ ;\ t\in\mathbb{R} \\ z=-t+1 \end{cases}$

(P) المستوي المعرف بتمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=\alpha+\beta+3 \\ y=-\alpha+2 \quad ;\ \alpha\in\mathbb{R}\ ,\ \beta\in\mathbb{R} \\ z=\alpha+2\beta \end{cases}$

أجب بصحيح أو خطأ على الجمل التالية مع التعليل:

1. النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (Δ)
2. المستوي (P) له معادلة ديكارتية من الشكل $2x+y+z-8=0$
3. المستقيم (Δ) يعامد المستوي (P)
4. النقطة B تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AC]$

التمرين الثاني:(4.5 نقط)

I) حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة: $(z+2)(z^2+2-2\sqrt{3}i)=0$

II) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها:

$z_A=-2$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=-z_B$.

1. بين أن $|z_A-z_B|^2+|z_A-z_C|^2=|z_B-z_C|^2$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC
2. أثبت ان النقط A ، B و C تنتمي الى نفس الدائرة ، يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها
3. أ عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتحاكي الذي مركزه O نسبته -1
   ب ما طبيعة الرباعي $ABDC$
4. بين ان C صورة B بتحويل نقطي مركزه A يطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة
5. نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z $(z\neq-2)$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\dfrac{iz-\sqrt{3}+i}{z+2}$
   أ اثبت أن $\arg(z')=\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)+\dfrac{\pi}{2}$
   ب عين مجموعة النقط M بحيث يكون z' تخيلي صرف موجب تماما

<u>التمرين الثالث</u> (4,5 نقط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = e^3 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = e^{-3} - 1 + e^{-3}u_n$

1. احسب u_1 ، u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > -1$.

2. أ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

ب استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{1}{2}v_n - 1$

أ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0

ب أكتب بدلالة n ، كلا من v_n و u_n ، ثم أحسب من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

ج- عين مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $v_n > 2\times 10^{-3}$

4. أ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \cdots + \frac{u_n}{v_n}$

ب ليكن الجداء P_n حيث $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots\ldots \times v_n$

بين أن: $\ln(P_n) = \frac{n+1}{2}(2\ln 2 + 6 - 3n)$ ثم استنتج P_n بدلالة n

<u>التمرين الرابع</u> (07نقط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

2. ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

3. احسب من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x) + f(-x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

4. أ بين أن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,1 < \alpha < 1,2$

ب من أجل اي قيمة للعدد الحقيقي m يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x) = m$

5. أ بين أنه من كل عدد حقيقي x فان: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$

ب بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + \ln 4$ و المستقيم (Δ') ذوالمعادلة $y = x + 2 + \ln 4$ مستقيمان مقاربان للمنحنى (C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى كل منهما

6. ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f)

7. ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما ، $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = \lambda$

أ اعتمادا على السؤال (5 أ) بين أن : $A(\lambda) = 2\lambda - 2\ln\left(\frac{2e^\lambda}{e^\lambda + 1}\right)$

ب عين قيمة العدد λ بحيث يكون $A(\lambda) = 1$.

الموضـــوع الثاني

التمرين الأول :(04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(2;1;-4)$ ، $B(-2;2;-1)$ و $C(0;3;-4)$

والمستوي (P) الذي معادلته $x-y+z+1=0$

1. بين أن النقط A ، B و C تعين مستوي (Q) بحيث الشعاع $\vec{n}(1;1;1)$ ناظميا له ، ثم اكتب معادلة ديكارتية لــ (Q)

2. بين أن (P) و (Q) غير متوازيين و غير متعامدين

3. عين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q)

4. لتكن $\Omega(1;0;1)$ نقطة من الفضاء

أ. بين ان النقطة Ω متساوية البعد عن المستويين (P) و (Q)

ب. عين معادلة سطح الكرة (S) ذو المركز Ω و المماس لــ (P) و (Q)

ج. عين احداثيات النقطتين D و H نقطتي التماس بين (S) و (P) و بين (S) و (Q) على الترتيب

5. لتكن $E\left(-\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$ هي المسقط العمودي لـ Ω على المستقيم (Δ) ، احسب المسافة بين Ω و (Δ)

التمرين الثاني :(4,5 نقط)

I) حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $(z+2)(z^2+z+1)=0$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، D ، E ذات اللواحق

$$z_A=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad ، \quad z_B=\overline{z_A} \quad ، \quad z_C=-2 \quad ، \quad z_D=2(1+\sqrt{3})i \quad ، \quad z_E=\overline{z_D}$$

1. اكتب $(-z_A)$ على الشكل الاسي ثم علم النقط A ، B ، C ، D ، E

2. ليكن R التحويل النقطي الذي يحول $M(z)$ الى $M'(z')$ حيث : $\frac{z'+2}{z+2}=-z_A$

أ. ما طبيعة التحويل R و حدد عناصره المميزة

ب. لتكن النقطة F حيث : $R(D)=F$ ، بين أن $z_F=1+\sqrt{3}i$

ج. اكتب العدد $\frac{z_E-z_F}{z_D-z_F}$ على الشكل الجبري ثم استنتج ان المستقيمين (FD) و (EF) متعامدان

3. لتكن G مرجح الجملة $\{(A,|z_A|);(B,|z_B|);(C,|z_C|)\}$

أ. عين z_G لاحقة G

ب. عين مجموعة النقط M حيث : $\overrightarrow{MG}=\lambda\overrightarrow{AB}$ لما يمسح λ مجموعة الاعداد الحقيقية

ج. اكتب معادلة ديكارتية لهذه المجموعة

<u>التمرين الثالث:</u>(4,5 نقط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = e^{\frac{-1}{2}}\sqrt{u_n}$

.1 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$

.2 أ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

ب- استنتج أن (u_n) متناقصة تماما

ج هل (u_n) متقاربة ؟ اذا كانت متقاربة فما هي نهايتها

.3 (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n}$

أ برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

.4 احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{1+\ln u_1} + \frac{1}{1+\ln u_2} + \cdots + \frac{1}{1+\ln u_n}$

<u>التمرين الرابع :</u>(07 نقط)

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)

.1 احسب نهايتي الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها

.2 أ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ فان: $f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$

ب ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

.3 اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

.4 بين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها

.5 بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3,9 < \alpha < 4$

.6 ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)

.7 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $f(x) = x - 3m$

.8 F دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $F(x) = (-3-x)\ln(x+1) + 3x$

أ بين ان F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$

ب لتكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = \alpha$

بين أن : $A(\alpha) = 4\left(\frac{\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha+1}\right)cm^2$ ثم اوجد حصرا لـ $A(\alpha)$

الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الـــــوادي — ثانويات: 19 مارس 1962 عبد العزيز الشريف
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — متقن ميلودي العروسي
الشعبة: علوم تجريبية — (دورة: ماي2015)

الاجابة النموذجية لامتحان الباكلوريا التجريبية

الموضـــوع الأول

التمرين الأول:(04 نقط)

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التعليل على الجمل التالية:

السؤال	الإجابة	التعليل
1. النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (Δ)	**خطأ**	لأن: $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1-0\\1-1\\0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{U}_{(\Delta)}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ إذن: $\overrightarrow{CB}\times\vec{U}_{(\Delta)}=0$ لكن $B\notin(\Delta)$
2. المستوي (P) له معادلة ديكارتية من الشكل $2x+y+z-8=0$	**خطأ**	لأن: لدينا $(P):\begin{cases}x=\alpha+\beta+3..(1)\\y=-\alpha+2\ldots\ldots(2)\\z=\alpha+2\beta\ldots\ldots(3)\end{cases}$ من (2) نجد $\alpha=2-y$ و بالتعويض في (1) نجد $\beta=x+y-5$ وبالتعويض في (3) نجد $z=2-y+2x+2y-10$ ومنه $(P):2x+y-z-8=0$
3. المستقيم (Δ) يعامد المستوي (P)	**صحيح**	لأن: لدينا $\vec{U}_{(\Delta)}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ و $\vec{n}_P\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ إذن $\frac{2}{2}=\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}$ أي $\vec{n}_P\parallel\vec{U}_{(\Delta)}$ ومنه $(\Delta)\perp(P)$
4. النقطة B تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة [AC]	**خطأ**	لأن: $BA\neq BC$ $BA=\sqrt{(-1-1)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{6}$ $BC=\sqrt{(0-1)^2+(-1-1)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{19}$

التمرين الثاني:(4.5 نقط) **I)** حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $(z+2)(z^2+2-2\sqrt{3}i)=0$

$\begin{cases}z+2=0\\z^2+2-2\sqrt{3}i=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}z=-2\\z^2=-2+2\sqrt{3}i\end{cases}$ نضع $w=\alpha+\beta i$ جذر لـ z^2 إذن $w^2=z^2$

ومنه يكون $\begin{cases}4=\alpha^2+\beta^2\ldots\ldots\ldots(1)\\-2=\alpha^2-\beta^2\ldots\ldots(2)\\2\sqrt{3}=2\alpha\beta\quad\ldots\ldots(3)\end{cases}$ بالجمع (1) و(2) نجد $2=2\alpha^2$ أي $\alpha=1$ أو $\alpha=-1$

وبالتعويض في المعادلة (3) نجد : إذا كان $\alpha = 1$ فإن $\beta = \sqrt{3}$

وإذا كان $\alpha = -1$ فإن $\beta = -\sqrt{3}$ وبالتالي $w_1 = 1+\sqrt{3}i$ و $w_2 = -1-\sqrt{3}i$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(z+2)(z^2+2-2\sqrt{3}i)=0$ هي: $S = \{-2, -1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i\}$

(II

6. بين أن $|z_A - z_B|^2 + |z_A - z_C|^2 = |z_B - z_C|^2$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC :

$|z_A - z_B|^2 + |z_A - z_C|^2 = |z_B - z_C|^2$ تكافئ $BA^2 + CA^2 = CB^2$

ولدينا : $A(-2;0)$ و $B(-1;-\sqrt{3})$ و $C(1;\sqrt{3})$ إذن $BA^2 = 4$ و $CA^2 = 12$ و $CB^2 = 16$

أي $4 + 12 = 16$ إذن المثلث ABC قائم في A

7. أثبت أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة ، يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يكافئ أن $|z_A| = |z_B| = |z_C|$

$|z_A| = |-2| = 2$ و $|z_B| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ و $|z_C| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

وبما أن ABC قائم في A فإن $[BC]$ قطر للدائرة المحيطة به أي مركزها هو منتصف $[BC]$: $\left(\frac{-1+1}{2}; \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}\right)$

إذن مركزها هو $O(0;0)$ ونصف قطرها $OC = OB = 2$

8. أ. عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتحاكي الذي مركزه O نسبته -1

$(z_D - z_O) = -(z_A - z_O)$ نستلزم إن $z_D = -z_A = 2$

ب. ما طبيعة الرباعي $ABDC$

لدينا $\begin{cases} OA = OD \\ OA = OB = OC \end{cases}$ إذن $OA = OD = OB = OC$ و $AD = BC$

ومنه الرباعي $ABDC$ هو مستطيل (القطران متناصفان ومتقايسان)

9. بين ان C صورة B بتحويل نقطي مركزه A يطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة

اي $(z_C - z_A) = a(z_B - z_A)$ نستلزم أن $a = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ وبعد التبسيط نجد $a = \sqrt{3}i$ ومنه التحويل النقطي الذي

مركزه A ويحول B الى C هو تشابه نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\arg(\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ومركزه $A(-2;0)$

ت $z' = \frac{iz - \sqrt{3} + i}{z+2}$: اثبت أن $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM})$

أي $z' = \frac{iz - \sqrt{3} + i}{z+2}$ ومنه $z' = \frac{i(z + \sqrt{3}i + 1)}{z+2}$ إذن $z' = i\frac{(z-(-1-\sqrt{3}i))}{(z-(-2))}$ $z' = i\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right)$

وبالتالي $\arg(z') = \arg(i) + \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right)$ أي $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$

ث عين مجموعة النقط M بحيث يكون z' تخيلي صرف موجب تماما

z' تخيلي صرف موجب تماما يكافئ $\arg(z') = \frac{\pi}{2}$ أي $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = 0 + K2\pi$ ومنه مجموعة النقط M هي:

$\{(AB) - [AB]\}$

التمرين الثالث (4,5 نقط) نعتبر المتتالية (u_n) : $\begin{cases} u_0 = e^3 - 1 \\ u_{n+1} = e^{-3} - 1 + e^{-3}u_n \end{cases}$

.4 احسب u_1 ، u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > -1$.

$$U_1 = e^{-3} - 1 + e^{-3}U_0 = e^{-3} - 1 + e^{-3}(e^3 - 1) = 0$$
$$U_2 = e^{-3} - 1 + e^{-3}U_1 = e^{-3} - 1 + e^{-3}(0) = e^{-3} - 1$$

- البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n $u_n > -1$

- من اجل $n = 0$: $U_0 > -1$ أي $e^3 - 1 > -1$ القضية صحيحة
- نفرض أن $u_n > -1$ ونثبت صحة القضية $U_{n+1} > -1$
- لدينا : $U_n > -1$ بضرب الطرفين في (e^{-3}) نجد : $e^{-3}\,U_n > -e^{-3}$

وبإضافة العدد $(e^{-3} - 1)$ إلى الطرفين نجد: $e^{-3} - 1 + e^{-3}U_n > -1$ أي $U_{n+1} > -1$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n > -1$

.5 أ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

لدينا : $U_{n+1} - U_n = e^{-3} - 1 + e^{-3}U_n - U_n = (e^{-3} - 1)(1 + U_n)$

إذن: $U_{n+1} - U_n < 0$ لان : $\begin{cases} 1 + U_n > 0 \text{ أي } u_n > -1 \\ e^{-3} - 1 < 0 \end{cases}$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما

ب استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد (-1) إذن فهي متقاربة و نهايتها هي l حيث:

$$\lim_{x\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{x\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} f(l) = l$$

ومنه $f(l) = l$ تكافئ : $e^{-3} - 1 + e^{-3}l = l$ إذن : $l = -1$ وبالتالي $\lim_{x\to+\infty} U_n = -1$

.6 نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{1}{2}v_n - 1$

أ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 :

لدينا $u_n = \frac{1}{2}v_n - 1$ إذن : $V_n = 2U_n + 2$ ومنه $V_{n+1} = 2U_{n+1} + 2 = 2(e^{-3} - 1 + e^{-3}U_n) + 2$

أي $V_{n+1} = 2e^{-3} + 2e^{-3}U_n$ وبأخذ (e^{-3}) عامل مشترك نجد $V_{n+1} = e^{-3}(2U_n + 2)$ أي $V_{n+1} = e^{-3}V_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $(q = e^{-3})$ وحدها الاول: $V_0 = 2U_0 + 2 = 2e^3$

ب أكتب بدلالة n ، كلا من v_n و u_n ، ثم أحسب من جديد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$V_n = 2e^3 \times (e^{-3})^n$ و $U_n = \frac{1}{2}(2e^3 \times (e^{-3})^n) - 1 = e^3 \times (e^{-3})^n - 1$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} (e^3 \times (e^{-3})^n - 1) = -1$

ج- عين مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $v_n > 2\times10^{-3}$

$v_n > 2\times10^{-3}$ تكافئ أن $2e^3 \times (e^{-3})^n > 2 \times 10^{-3}$ أي $e^{3-3n} > 10^{-3}$ وباستعمال خصائص الدالة ln نجد:

$3 - 3n > -3ln10$ وبعد التبسيط نجد $n < (3ln10) + 1$ و $(3ln10) + 1 \approx 7.9$ أي

$n = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

5. أ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$

لدينا: $S_n = \left(U_0 \times \frac{1}{V_0}\right) + \left(U_1 \times \frac{1}{V_1}\right) + \cdots\cdots + \left(U_n \times \frac{1}{V_n}\right)$ ولدينا $u_n = \frac{1}{2}v_n - 1$

إذن : $S_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{V_0}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{V_1}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{V_n}\right)$

أي : $S_n = -\left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \cdots\cdots + \frac{1}{V_n}\right) + (n+1)\frac{1}{2}$

$$= -\left(\frac{1}{2e^3} \times (e^3)^0 + \frac{1}{2e^3} \times (e^3)^1 + \cdots\cdots + \frac{1}{2e^3} \times (e^3)^n\right) + (n+1)\frac{1}{2}$$

وبالتالي : $S_n = -\left[\frac{1}{2e^3} \times \frac{(e^3)^{n+1} - 1}{e^3 - 1}\right] + (n+1)\frac{1}{2} = \frac{1 - (e^3)^{n+1}}{2e^3(e^3-1)} + \frac{n+1}{2}$

ب ليكن الجداء P_n حيث $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

بين أن: $\ln(P_n) = \frac{n+1}{2}(2\ln 2 + 6 - 3n)$ ثم استنتج P_n بدلالة n

لدينا : $P_n = V_0 \times V_1 \times \cdots\cdots \times V_n$ إذن $\ln(P_n) = \ln(V_0 \times V_1 \times \cdots\cdots \times V_n)$

وحسب خصائص الدالة $\ln$ يصبح $\ln(P_n) = \ln(V_0) + \ln(V_1) + \cdots\cdots + \ln(V_n)$

إي: $\ln(P_n) = \ln(2e^3 \times (e^{-3})^0) + \ln(2e^3 \times (e^{-3})^1) + \cdots\cdots + \ln(2e^3 \times (e^{-3})^n)$

$$= (\ln 2 + \ln e^3 + \ln(e^{-3})^0) + (\ln 2 + \ln e^3 + \ln(e^{-3})^1) + \cdots\cdots + (\ln 2 + \ln e^3 + \ln(e^{-3})^n)$$

$$= (\ln 2 + 3)(n+1) + \ln(e^{-3})^{0+1+2+\cdots\cdots+n}$$

ومنه $\ln(P_n) = (\ln 2 + 3)(n+1) + \ln(e^{-3})^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)} = (\ln 2 + 3)(n+1) - 3n\left(\frac{n+1}{2}\right)$

وبأخذ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ عامل مشترك نجد $\ln(P_n) = \left(\frac{n+1}{2}\right)(\ln 2 + 6 - 3n)$ و هو المطلوب

وباستعمال خصائص الدالة e نجد : $e^{\ln(P_n)} = e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)(\ln 2 + 6 - 3n)}$ أي

$$P_n = e^{(n+1)(\ln 2)} \times e^{3(n+1)} \times e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)(-3n)} = 2^{n+1} \times (e^3)^{(n+1)} \times (e^{-3})^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

وبالتبسيط نجد : $P_n = (2e^3)^{n+1} \times (e^{-3})^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}$

التمرين الرابع (07نقط): $f(x) = x - 4 + \frac{2}{e^x + 1}$

8. احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

9. ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها: نحسب الدالة المشتقة وندرس إشارتها:

$$f'(x) = 1 + \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$$

لدينا من اجل كل $x \in \mathcal{R}$ فإن $f'(x) > 0$, ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathcal{R}$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

10. احسب من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x)+f(-x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا:

$$f(x)+f(-x)=x+ln4+\frac{2}{e^{x}+1}+(-x)+ln4+\frac{2}{e^{-x}+1}=2ln4+\frac{2}{e^{x}+1}+\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}$$

وبتوحيد المقامات نجد: $f(x)+f(-x)=2ln4+\frac{2e^{x}+1}{e^{x}+1}=2ln4+2$

ومنه نستنتج أن النقطة $(0\,;ln4+1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

11. أ بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}1<\alpha<1{,}2$

- الدالة f دالة معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على $\mathcal{R}$ إذن فهي حتما معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1.1\ ,\ 1.2]$
- ولدينا $\begin{cases} f(1.1)=2.985 \\ f(1.2)=3.049 \end{cases}$ اي $f(1.1)<3<f(1.2)$
- إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن العادلة $f(x)=3$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in\,]1.1\ ,\ 1.2[$

ب من أجل اي قيمة للعدد الحقيقي m يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x)=m$

لدينا: $f(x)+f(-x)=2ln4+2$ أي $f(\alpha)+f(-\alpha)=2ln4+2$ ولدينا $f(\alpha)=3$

إذن: $f(\alpha)+f(-\alpha)=2ln4+2$ تكافئ: $3+f(-\alpha)=2ln4+2$ ومنه $f(-\alpha)=-1+2ln4$

12. أ بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x فان: $f(x)=x+2+\ln 4-\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}$

$$f(x)=x+2+ln4-\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}=x+ln4+\frac{2e^{x}+2-2e^{x}}{e^{x}+1}=x+ln4+\frac{2}{e^{x}+1}=f(x)$$

ب بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+\ln 4$ و المستقيم (Δ') ذوالمعادلة $y=x+2+\ln 4$ مستقيمان مقاربان للمنحنى (C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى كل منهما:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+ln4)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e^{x}+1}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+2+ln4)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-2e^{x}}{e^{x}+1}\right)=0 \end{cases}$$

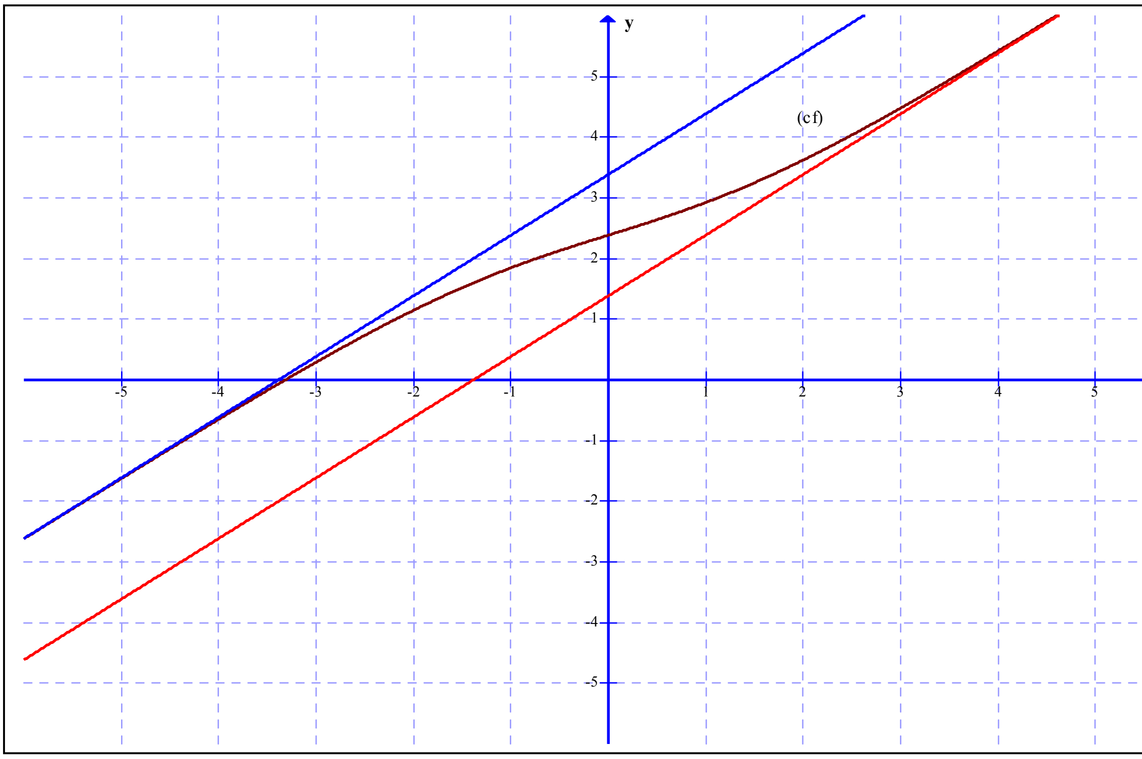
ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+\ln 4$ هو مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$

و المستقيم (Δ') ذوالمعادلة $y=x+2+\ln 4$ هو مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$

- لدينا $\begin{cases} f(x)-(x+ln4)=\frac{2}{e^{x}+1}>0 \\ f(x)-(x+2+ln4)=\frac{-2e^{x}}{e^{x}+1}<0 \end{cases}$

ومنه (C_f) فوق (Δ) وتحت (Δ')

.13 ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f):



.14 اعتمادا على السؤال (5 أ) بين أن : $A(\lambda) = 2\ln\left(\frac{2e^{\lambda}}{e^{\lambda}+1}\right)$

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda}[f(x) - y]dx = \int_0^{\lambda}\left[x + 2 + ln4 - \frac{2e^{x}}{e^{x}+1} - (x + ln4)\right]dx$$

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} 2dx - \int_0^{\lambda} \frac{2e^{x}}{e^{x}+1}dx = [2x]_0^{\lambda} - 2[ln(e^{x}+1)]_0^{\lambda} = 2\lambda - 2ln\left(e^{\lambda}+1\right) + 2ln2$$

أي $A(\lambda) = 2\lambda + 2ln2 - 2ln\left(e^{\lambda} + \mathbf{1}\right)$ وبما أن $\lambda = lne^{\lambda}$ تصبح:

$A(\lambda) = 2\left[lne^{\lambda} + ln2 - ln\left(e^{\lambda}+1\right)\right]$ وباستعمال خصائص الدالة ln نجد

$$A(\lambda) = 2\left[ln2e^{\lambda} - ln\left(e^{\lambda}+1\right)\right] = 2ln\left(\frac{2e^{\lambda}}{e^{\lambda}+1}\right)$$

ب عين قيمة العدد λ بحيث يكون $A(\lambda) = 1$.

$A(\lambda) = 1$ تكافئ $2ln\left(\frac{2e^{\lambda}}{e^{\lambda}+1}\right) = 1$ أي $ln\left(\frac{2e^{\lambda}}{e^{\lambda}+1}\right) = \frac{1}{2}$ وباستعمال خصائص الدالة e نجد :

$\frac{2e^{\lambda}}{e^{\lambda}+1} = e^{\frac{1}{2}}$ وبعد التبسيط نجد $e^{\lambda} = \frac{-e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}-2}$ إذن $\lambda \approx 1.54$

الموضـــوع الثاني

التمرين الأول :(04 نقط)

$A(2;1;-4)$ ، $B(-2;2;-1)$ و $C(0;3;-4)$

والمستوي (P) الذي معادلته $x-y+z+1=0$

.5 بين أن النقط A ، B و C تعين مستوي (Q) بحيث الشعاع $\vec{n}(1;1;1)$ ناظميا له ، ثم اكتب معادلة ديكارتية لـ (Q)

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-2\\2-1\\-1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-2\\3-1\\-4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ ولدينا : $\frac{-4}{-2}\neq\frac{1}{2}\neq\frac{3}{0}$ إذن : $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$

كذلك $\begin{cases}\vec{n}\times\overrightarrow{AB}=1\times(-4)+1\times1+1\times3=0\\ \vec{n}\times\overrightarrow{AC}=1\times(-2)+1\times2+1\times0=0\end{cases}$

وبالتالي معادلة (Q): $x+y+z+d=0$ وبما إن: $A\epsilon(Q)$ وبالتعويض باحداثياتها نجد:

$(Q)\ :\ x+y+z+1=0$

.6 بين أن (P) و (Q) غير متوازيين و غير متعامدين

لدينا: $\vec{n}_Q\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{n}_P\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ إذن $\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{1}$ و $1\times1+1\times(-1)+1\times1\neq0$

أي $\vec{n}_P \nparallel \vec{n}_Q$ و $\vec{n}_Q$ لايعامد $\vec{n}_P$

.7 عين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q)

لدينا : $\begin{cases}x-y+z+1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ x+y+z+1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$ بالجمع (1) و (2) نجد $x=-z-1$

وبالتعويض في (2) نجد $y=0$ وبوضع $z=t$ يكون التمثيل الوسيطي :

$(\Delta):\begin{cases}x=-t-1\\ y=0\\ z=t\end{cases}$ حيث $t\,\epsilon\,\mathcal{R}$

.8 لتكن $\Omega(1;0;1)$ نقطة من الفضاء : أ بين ان النقطة Ω متساوية البعد عن المستويين (P) و (Q)

$$\begin{cases}d(\Omega;\ (P))=\frac{|1\times1+0\times(-1)+1\times1+1|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\\ d(\Omega;\ (Q))=\frac{|1\times1+0\times1+1\times1+1|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\end{cases}$$

ب عين معادلة سطح الكرة (S) ذو المركز Ω و المماس لـ (P) و (Q)

$$(S):(x-1)^2+(y)^2+(z-1)^2=3$$

ج عين احداثيات النقطتين D و H نقطتي التماس بين (S) و (P) و بين (S) و (Q) على الترتيب

لدينا: $\vec{n}_P$ شعاع توجيه للمستقيم (ΩD) و $\vec{n}_Q$ شعاع توجيه للمستقيم (ΩH) إذن:

$(\Omega H): \begin{cases} x = t' + 1 \\ y = t' \\ z = t' + 1 \end{cases}$ و $(\Omega D): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases}$ إذن: $\begin{cases} \overrightarrow{\Omega M} = t\overrightarrow{\Omega D} \\ \overrightarrow{\Omega M} = t'\overrightarrow{\Omega H} \end{cases}, (t, t') \epsilon \mathcal{R}^2$

أي $D(t+1, -t, t+1)$ و $H(t+1, t, t+1)$ وبالتعويض :

- احداثيات النقطة D في معادلة (P) نجد $t = -1$ إذن $D(0,1,0)$
- احداثيات النقطة H في معادلة (Q) نجد $t' = -1$ إذن $H(0,-1,0)$

.6 لتكن $E\left(-\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$ هي المسقط العمودي لـ Ω على المستقيم (Δ) ، احسب المسافة بين Ω و (Δ)

نتأكد اولا من انتماء E إلى (Δ) ثم نتأكد من أن $\overrightarrow{E\Omega} \perp \vec{U}_{(\Delta)}$

$\begin{cases} -\frac{1}{2} = -t - 1 \quad ; t = -\frac{1}{2} \\ 0 = 0 \\ -\frac{1}{2} = t \end{cases}$ **يعني** $E\epsilon(\Delta)$ ومنه $E\epsilon(\Delta)$

$\overrightarrow{E\Omega}\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2} \\ 0-0 \\ 1+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ و $\vec{U}_{(\Delta)}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ إذن $\overrightarrow{E\Omega} \times \vec{U}_{(\Delta)} = 0$ وبالتالي: $\overrightarrow{E\Omega} \perp \vec{U}_{(\Delta)}$

<u>التمرين الثاني</u>: (4,5 نقط)

(I حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $(z+2)(z^2+z+1)=0$

$\begin{cases} z + 2 = 0 \\ z^2 + z + 1 = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} z = -2 \\ z^2 + z + 1 = 0 \end{cases}$

$z^2 + z + 1 = 0$ نحسب المميز Δ نجد $\Delta = -3 = 3i^2$ ومنه $z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ و $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة : $S = \left\{-2, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$

(II $z_A = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -2$ ، $z_D = 2(1+\sqrt{3})i$ ، $z_E = \overline{z_D}$

.4 اكتب $(-z_A)$ على الشكل الأسي ثم علم النقط A ، B ، C ، D ، E

لدينا $z_A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ إذن: $-z_A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ومنه $|-z_A| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

$\arg(-z_A): \begin{cases} \cos\vartheta_{-z_A} = \frac{1}{2} \\ \sin\vartheta_{-z_A} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \vartheta_{-z_A} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ ومنه $-z_A = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

.5 $\dfrac{z'+2}{z+2}=-z_A$ **أ.** ما طبيعة التحويل R و حدد عناصره المميزة:

من العبارة : $\dfrac{z'+2}{z+2}=-z_A$ نجد $\left(z'-(-2)\right)=-z_A\left(z-(-2)\right)$

أي $(z'-z_C)=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-z_C)$ ومنه التحويل R هو دوران مركزه C وزاويته $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

ب لتكن النقطة F حيث : $R(D)=F$ ، بين أن $z_F=1+\sqrt{3}i$

$(z_F-z_C)=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_D-z_C)$ إذن $z_F=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_D-z_C)+z_C$ وبعد التبسيط نجد $z_F=1+i\sqrt{3}$

ج اكتب العدد $\dfrac{z_E-z_F}{z_D-z_F}$ على الشكل الجبري ثم استنتج أن المستقيمين (FD) و (EF) متعامدان

$$\frac{z_E-z_F}{z_D-z_F}=\frac{(-2-2\sqrt{3}i)-(1+\sqrt{3}i)}{(-2+2\sqrt{3}i)-(1+\sqrt{3}i)}=\frac{-3-3\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i}=\frac{(-3-3\sqrt{3}i)\times(-3+\sqrt{3}i)}{(-3+\sqrt{3}i)\times(-3+\sqrt{3}i)}=\sqrt{3}i$$

لدينا العدد $\dfrac{z_E-z_F}{z_D-z_F}=\sqrt{3}i$ نستلزم إن $\arg\left(\dfrac{z_E-z_F}{z_D-z_F}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ أي $(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE})=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$

وبالتالي $(FE)\perp(FD)$

.6 لتكن G مرجح الجملة $\{(A,|z_A|);(B,|z_B|);(C,|z_C|)\}$ **أ.** عين z_G لاحقة G:

إذن G مرجح الجملة : $\{(A,1),(B,1),(C,2)\}$ ومنه : $z_G=\dfrac{1\times z_A+1\times z_B+2\times z_C}{1+1+2}=\dfrac{-5}{4}$

ب عين مجموعة النقط M حيث : $\overrightarrow{MG}=\lambda\overrightarrow{AB}$ لما يمسح λ مجموعة الأعداد الحقيقية

$\overrightarrow{MG}=\lambda\overrightarrow{AB}$ لما λ يمسح المجموعة $\mathbb{R}$ فإن تمثل مستقيم يشمل G و الشعاع $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه له

ج اكتب معادلة ديكارتية لهذه المجموعة :

لدينا : $\overrightarrow{MG}=\lambda\overrightarrow{AB}$ أي $\begin{pmatrix}\frac{-5}{4}-x\\0-y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

نجد $y=-\sqrt{3}\lambda$ و $x=\dfrac{-5}{4}$ وهي معادلة مستقيم موازي لمحور التراتيب

التمرين الثالث:(4,5 نقط): نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $\begin{cases}u_1=e^2\\u_{n+1}=e^{\frac{-1}{2}}\sqrt{u_n}\end{cases}$

.4 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n>\dfrac{1}{e}$

- من اجل $n=1$: $U_1>\frac{1}{e}$ أي $e^2>\frac{1}{e}$ القضية صحيحة
- نفرض أن $u_n>\dfrac{1}{e}$ ونثبت صحة القضية $U_{n+1}>\frac{1}{e}$
- لدينا : $U_n>\frac{1}{e}$ بإدخال الجذر التربيعي على الطرفين نجد : $\sqrt{U_n}>\frac{1}{\sqrt{e}}$

وبضرب الطرفين في العدد $\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$ نجد: $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{U_n}>\frac{1}{\sqrt{e}}e^{-\frac{1}{2}}$ أي $U_{n+1}>\frac{1}{e}$ إذن من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n>\dfrac{1}{e}$

5. أ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

لدينا $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{U_n}}{U_n}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{U_n}}$ إذن $\frac{U_{n+1}}{U_n}<1$ تعني أن :

$\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{U_n}}<1$ وبتربيع الطرفين نجد : $\frac{\frac{1}{e}}{U_n}<1$ وبما إن $u_n>\frac{1}{e}$ فإن $\frac{\frac{1}{e}}{U_n}<1$ وبالتالي : $\frac{U_{n+1}}{U_n}<1$

ب- استنتج أن (u_n) متناقصة تماما

بما أن $\frac{U_{n+1}}{U_n}<1$ أي $U_{n+1}<U_n$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة

ج هل (u_n) متقاربة ؟ اذا كانت متقاربة فما هي نهايتها

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد $(\frac{1}{e})$ إذن فهي متقاربة و نهايتها هي l حيث:

$$\lim_{x\to+\infty} U_{n+1}=\lim_{x\to+\infty} U_n=\lim_{x\to+\infty} f(l)=l$$

ومنه $f(l)=l$ تكافئ: $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{l}=l$ إذن: $l=\frac{1}{e}$ وبالتالي $\lim_{x\to+\infty} U_n=\frac{1}{e}$

6. (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $v_n=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{u_n}$

أ برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

لدينا $v_n=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{u_n}$ إذن : $V_{n+1}=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{U_{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln U_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{U_n}\right)$

أي $V_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}\ln\sqrt{U_n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln\sqrt{U_n}$ وبأخذ $\left(\frac{1}{2}\right)$ عامل مشترك نجد

$V_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\ln\sqrt{U_n}\right)$ أي $V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\left(q=\frac{1}{2}\right)$ وحدها الاول: $V_1=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{U_1}=\frac{3}{2}$

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

$V_n=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ و لدينا $V_n=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{U_n}$ إي $V_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln U_n$ إذن $\ln U_n=2V_n-1$ ومنه

نستلزم أن : $U_n=e^{2V_n-1}$ وبالتالي $U_n=e^{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}$

5. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{1}{1+\ln u_1}+\frac{1}{1+\ln u_2}+\cdots+\frac{1}{1+\ln u_n}$

لدينا $V_n=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{U_n}$ أي $V_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln U_n$ وبالتالي $2V_n=1+\ln U_n$

إذن $S_n=\left(\frac{1}{1+\ln U_1}\right)+\left(\frac{1}{1+\ln U_2}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{1+\ln U_n}\right)$

وتعويض $(2V_n=1+\ln U_n)$ نجد $S_n=\left(\frac{1}{2V_1}\right)+\left(\frac{1}{2V_2}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2V_n}\right)$

أي : $S_n = \left(\frac{1}{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}}\right) + \left(\frac{1}{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\right)$

ومنه $S_n = \left(\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\right) + \left(\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-(n-1)}\right)$

إذن $S_n = \left(\frac{1}{3}\times(2)^{0}\right) + \left(\frac{1}{3}\times(2)^{1}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{3}\times(2)^{(n-1)}\right)$

وبالتالي : $S_n = \frac{1}{3}\times\frac{2^n-1}{2-1} = \frac{(2^n-1)}{3}$

التمرين الرابع: (07 نقط)

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$

9. احسب نهايتي الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{2x-(x+1)\ln(x+1)}{x+1} = -\infty$$

2. أ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ فان: $f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x+2-2x-x-1}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{(x+1)^2}$$

ب ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

$f'(x) = 0$ اي $1-x=0$ إذن $x=1$

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	

جدول التغيرات:

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(1)$	↘	$-\infty$

3. اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

$(\Delta): y = f'(0)(x-0) + f(0)$ إذن $y = x$

4. بين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها

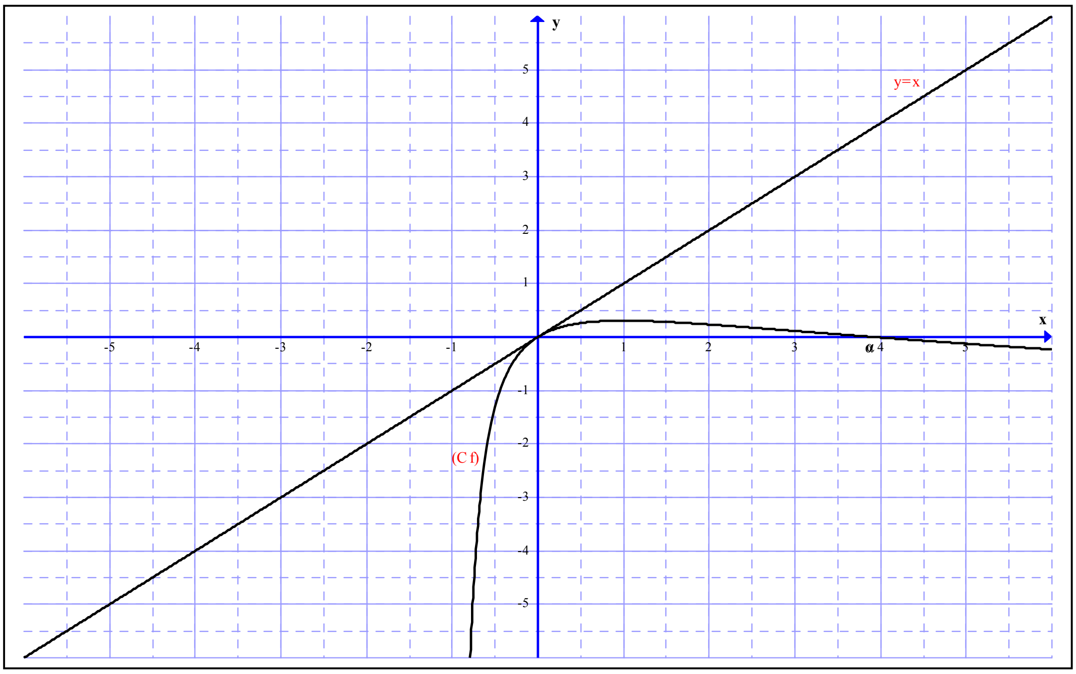
لدينا : $f'(x)=\frac{1-x}{(x+1)^2}$ إذن $f''(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x+1)^2}$ ومنه $f''(x)=0$ تعني إن $\begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$

ومنه من اجل كل $x\in]-1;+\infty[$ فإن (C_f) يقبل النقطة $(3,f(3))$ نقطة انعطاف

5. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3,9<\alpha<4$

- الدالة f دالة معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على $[1;+\infty]$ إذن فهي حتما معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[3.9\ ,\ 4]$
- ولدينا $\begin{cases} f(3.9)=0.002 \\ f(4)=-0.0094 \end{cases}$ أي $f(3.9)\times f(4)<0$
- إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن العادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]3.9\ ,\ 4[$

6. ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)



7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $f(x)=x-3m$

m	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=x-3m$	المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة	المعادلة تقبل حل مضاعف معدوم	المعادلة لا تقبل حل

8. F دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $F(x)=(-3-x)\ln(x+1)+3x$

ت بين ان F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$

$$F'(x)=-1\times \ln(x+1)+\frac{1}{x+1}\times(-3-x)+3=\frac{2x}{x+1}+\ln(x+1)=f(x)$$

إذن F دالة اصلية لـ $f(x)$

ب بين أن : $A(\alpha)=4\left(\frac{\alpha^2-3\alpha}{\alpha+1}\right)cm^2$ ثم اوجد حصرا لـ $A(\alpha)$

$$A(\alpha)=\int_0^\alpha [f(x)-y]dx=\int_0^\alpha f(x)\,dx=[F(x)]_0^\alpha=(-3-\alpha)\ln(\alpha+1)+3\alpha$$

ولدينا : $f(\alpha)=0$ إذن نجد : $\ln(\alpha+1)=\frac{2\alpha}{\alpha+1}$

ومنه $A(\alpha)=(-3-\alpha)\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)+3\alpha$ وبعد التبسيط نجد $A(\alpha)=\left(\frac{\alpha^2-3\alpha}{\alpha+1}\right)$

وبما إن وحد الطول هي $(2cm)$ فإن: $A(\alpha)=\left(\frac{\alpha^2-3\alpha}{\alpha+1}\right)\times 2^2=4\left(\frac{\alpha^2-3\alpha}{\alpha+1}\right)cm^2$

حصر $A(\alpha)$: لدينا $3.9<\alpha<4$ إذن $(3.9)^2<\alpha^2<(4)^2 \cdots\cdots\cdots (1)$

و $-3\times 4<-3\alpha<-3\times 3.9 \cdots\cdots\cdots (2)$

و $4.9<\alpha+1<5.9$ إذن : $\frac{1}{5.9}<\frac{1}{\alpha+1}<\frac{1}{4.9} \cdots\cdots\cdots (3)$

وبالتالي من : $[(3)\times((2)+(1))]$ نجد : $0.642<A(\alpha)<0.877$