ثانوية : ماحي محمد البليدة

إمتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي

2015/05/18

القسم : 3ع ت

اختبار في مادة : الرياضيات

المدة : 3 ساعات ونصف

على كل مترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين .

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط C,B,A لواحقها على الترتيب $z_A=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$.

1- أ) بين أن : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب) عين طبيعة المثلث ABC .

ج) عين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC .أرسم (C).

2- أ) عين الطبيعة والعناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$.

ب) تحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ).

3- ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ) عين صورة النقطة B بالدوران R .

ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

ج) عين صورة المجموعة (Γ) بالدوران R.

التمرين الثاني :(05نقاط)

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;4;-5)$, $B(3;2;-4)$, $C(5;4;-3)$ و $D(-2;8;4)$ و الشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$.

1) بيَن أنَ $x-2z-11=0$ معادلة للمستوي (ABC).

2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) المار من النقطة D والموازي للشعاع $\vec{u}$.

3) ليكن (P) المستوي ذي المعادلة $x-y-z=7$.

أ) بين المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases}x=11+2t\\y=4+t\\z=t\end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$

ب) أثبت أن (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي .

4) تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$. تحقق أن النقطة E تنتمي إلى (Δ) و أن F تنتمي إلى (T).

5) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث ، $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

أ) جد بدلالة α معادلة ديكارتية للمجموعة (S) و استنتج أنَ (S) مستو يطلب تعيين شعاع ناظمي له .

ب) عين قيمة α حتى يكون (S) المستوي المحوري للقطعة $[FE]$.

التمرين الثالث :(04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة .

ج) هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$.

ب) أحسب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$.

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الرابع :(07 نقاط)

- **الجزء الأول :**

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2-2\ln x$.

1- أدرس تغيرات الدالة g .

2- استنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في المجال $]0;+\infty[$.

- **الجزء الثاني :**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=1-x-\frac{2}{x}(1+\ln x)$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ، $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2- أ) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1-x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .

ج) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $0.41<\alpha<0.42$.

د) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

ذ) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .

3- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$(E): f(x)=m-x$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نقاط)

1.حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$

2. المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$,

A و B نقطتان لاحقتاهما $z_A=2\sqrt{3}-2i$ و $z_B=2\sqrt{3}+2i$ على الترتيب .

أ) أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب) علم النقطتان A و B.

ت) برهن أن المثلث OAB متقايس الأضلاع.

3. نسمي النقطة C ذات اللاحقة $z_C=-8i$ و النقطة D صورتها بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.

- علم النقطتان C و D .ثم برهن أن لاحقة النقطة D هي $z_D=4\sqrt{3}+4i$.

4.برهن أن النقطة D هي صورة النقطة B بتحاك h مركزه O يطلب تعيين نسبته .

5. أحسب النسبة $\frac{z_A-z_D}{z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAD .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A(0;4;1)$ ، $B(1;3;0)$ ، $C(2;-1;-2)$ و $D(7;-1;4)$.

1.بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.

2. (Δ) مستقيم يشمل النقطة D و $\vec{u}\left(2;-1;3\right)$ شعاع توجيه له .

أ – برهن أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC).

ب- إستنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

جـ -أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) .

د- عين إحداثيات النقطة H ،نقطة تقاطع المستقيم (Δ)و المستوي (ABC)

3) ليكن المستوي (P) الذي معادلته $x+y+z=0$ و المستوي (Q) الذي معادلته $x+4y+2=0$.

أ– برهن أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان .

ب- تحقق أن المستقيم (D') ، مستقيم تقاطع (P) و (Q) تمثيله الوسيطي : $t\in\mathbb{R}$, $\begin{cases}x=-4t-2\\y=t\\z=3t+2\end{cases}$

جـ - هل المستقيم (D') و المستوي (ABC) متقاطعان أم متوازيان ؟

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1.لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-x\ln(x)$

- أدرس تغيرات الدالة f

2. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\dfrac{e^n}{n^n}$.

أحسب الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغيرها و نهايتها .

3.(v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$بـ: $v_n=\ln(u_n)$

أ- أثبت أن $v_n=n-n\ln(n)$.

ب- باستعمال الدالة f ، أدرس إتجاه تغير (v_n) ثم أستنتج أن (u_n) متناقصة .

جـ - استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $0\prec u_n\leq e$

د- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و عين نهايتها .

التمرين الرابع : (06 نقاط)

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $g(x)=x+1-e^x$

ا). ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

ب). استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)\leq 0$

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=(-2x^2-x+1)e^{-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

أ) : احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب). بملاحظة أن : $f(x)=\left(-2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)x^2e^{-x}$ ، أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

جـ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\left(2x^2-3x-2\right)e^{-x}$ ، عين إشارة $f'(x)$

د) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-(1-2x)=(1-2x)\times g(x)\times e^{-x}$

جـ) استنتج وضعية المنحنى (C_f)بالنسبة للمماس(T) .

4) أ) ادرس تقاطع المنحنى (C_f) ومحور الفواصل

ب) ارسم (C_f) و (T) على المجال $[-1;+\infty[$.

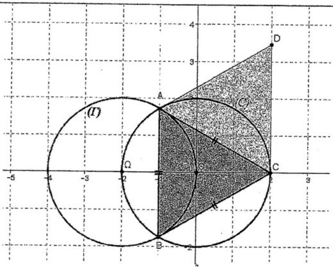
5) F الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $\mathrm{F}(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$

عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

التصحيح	العلامة
التمرين الأول	04 نقاط
I. حل المعادلة $(E):(z-2)(z^2+2z+4)=0$: $(z-2)(z^2+2z+4)=0$ يكافئ $z-2=0$ أو $z^2+2z+4=0$ • $z-2=0$ معناه $z=2$	0.25
• حل المعادلة $z^2+2z+4=0...(*)$ - حساب المميز : $\Delta=2^2-4\times1\times4=4-16=-12$ نضع $\Delta=12i^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ - المعادلة $(*)$ تقبل حلين مركبين متمايزين هما : $z_1=\dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_2=\dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$ • مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S=\left\{2,-1+i\sqrt{3},-1-i\sqrt{3}\right\}$	.25 + 0.25
II. لدينا : $z_A=-1+i\sqrt{3}, z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=2$ **1- أ) تبيان أنّ :** $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ • لدينا : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2}=\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\dfrac{\left(-3-i\sqrt{3}\right)\left(-3-i\sqrt{3}\right)}{\left(-3+i\sqrt{3}\right)\left(-3-i\sqrt{3}\right)}$ - ومنه $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{9+6i\sqrt{3}-3}{12}=\dfrac{6}{12}+i\dfrac{6\sqrt{3}}{12}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ - أي $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ لانّ : $\left\|\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right\|=\left\|\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ - $Arg\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$	0.5
ب) تعيين طبيعة المثلث ABC : • لدينا : $\left\|\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right\|=1$ ومنه $\dfrac{CB}{CA}=1$ أي $CB=CA$ • ولدينا : $Arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ أي $\left(\overline{CA};\overline{CB}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ ومنه ABC مثلث متقايس الأضلاع	0.25

ج) **تعيين مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث ABC :** • لدينا : $\|z_A\|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2=OA$ $\|z_B\|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2=OB$ و $\|z_C\|=\sqrt{(2)^2}=\sqrt{4}=2=OC$ • وبالتالي : $OA=OB=OC=2$ أي النقط B,A و C تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $r=2$	0.25
2- أ) **تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق:** $2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$ $2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$ معناه $2(x+iy+x-iy)+x^2+y^2=0$ ومنه $x^2+y^2+4x=0$ وبالتالي : $(x+2)^2+y^2=4$ أي أنّ (Γ) هي دائرة مركزها النقطة $\Omega(-2;0)$ ونصف قطرها $r=2$.	0.5
ب) **التحقق من أنّ A و B تنتميان إلى (Γ):** - لدينا : $\Omega A=\|z_A-z_\Omega\|=\|-1+i\sqrt{3}+2\|=\|1+i\sqrt{3}\|=2=r$ - ولدينا : $\Omega B=\|z_B-z_\Omega\|=\|-1-i\sqrt{3}+2\|=\|1-i\sqrt{3}\|=2=r$ وبالتالي A و B تنتميان إلى (Γ).	0.5
3- لدينا R دوران مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$. أ) **تعيين صورة النقطة B بالدوران R:** • لدينا : $R(B)=B'$ معناه $z_{B'}=az_B+b$ • ولدينا : $a=cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}$ أي $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ • ولدينا كذلك : $b=(1-a)z_A=\left(1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1+i\sqrt{3})=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1+i\sqrt{3})$ أي $b=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}=1+i\sqrt{3}$ • إذن : $z_{B'}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1-i\sqrt{3})+1+i\sqrt{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}+1+i\sqrt{3}$ أي $z_{B'}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}+1+i\sqrt{3}=2=z_C$ ومنه $R(B)=C$	0.5
ب) **تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R:** $z_D=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C+1+i\sqrt{3}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times2+1+i\sqrt{3}=2+2i\sqrt{3}$ أي $z_D=2+2i\sqrt{3}$	0.25

0.25



- **استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$:**

الرباعي $ABCD$ معين لأنّ :

- $ABCD$ متوازي أضلاع لأن : $z_{\overrightarrow{AB}} = -1+i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$ و

$z_{\overrightarrow{DC}} = 2+2i\sqrt{3}-2 = 2i\sqrt{3}$

أي $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} = 2i\sqrt{3}$

- ولدينا : $BC = CD$ لأن $R(B) = C$ و $R(C) = D$

0.25

ج) صورة (Γ) بالدوران R :

هي $(\mathcal{C})$ لأنّ $R(\Omega) = O$ و $R(B) = C$

05 نقاط — التمرين الثاني

$A(1;4;-5), B(3;2;-4), C(5;4;-3), D(-2;8;4)$ و $\vec{u}(1;5;-1)$

1) تبيان أنّ $x - 2z - 11 = 0$ معادلة للمستوي (ABC):

0.5

نعوض بإحداثيات النقط C, B, A في المعادلة السابقة نجد :

$$\begin{cases} 1-2(-5)-11 = 11-11 = 0 \\ 3-2(-4)-11 = 11-11 = 0 \\ 5-2(-3)-11 = 11-11 = 0 \end{cases}$$

ومنه $x - 2z - 11 = 0$ معادلة للمستوي (ABC)

2) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (T) المار من النقطة D والموازي للشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$:

0.5

- أي $\vec{u}(1;5;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (T).

$$(T) : \begin{cases} x = t-2 \\ y = 5t+8 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ y = -t+4 \end{cases}$$

<table>
<tr>
<td>0.5</td>
<td>
3) لدينا : $(P): x-y-z=7$
أ) تبيان أن المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم $(t\in\mathbb{R})$ $(\Delta): \begin{cases} x=11+2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$
• نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة (ABC) نجد : $11+2t-2t-11=0$ ومنه $0t=0$.
• نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة (P) نجد : $11+2t-4-t-t-7=0$ أي $0t=0$
وبالتالي (Δ) محتوى في كل المستويين (ABC) و (P) فهما إذن متقاطعان وفق المستقيم (Δ).
</td>
</tr>
<tr>
<td>01</td>
<td>
ب) اثبات أنّ (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي :
• لدينا : $\vec{u}(1;5;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (T)
• ولدينا $\vec{u'}(1;-1;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).
• لدينا : $\frac{1}{1}\neq\frac{5}{-1}\neq\frac{-1}{-1}$ وبالتالي $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطيا أي أنّ (T) و (Δ) غير متوازيين . فهما إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي .
نحل الجملة $\begin{cases} 11+2t=t'-2 \ldots(1) \\ 4+t=5t'+8 \ldots(2) \\ t=-t'+4 \ldots(3) \end{cases}$
لدينا : $\begin{cases} t=-t'+4 \\ 4-t'+4=5t'+8 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t=-t'+4 \\ 6t'=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} t=4 \\ t'=0 \end{cases}$
- بالتعويض في المعادلة (1) نجد : $11+2(4)=0-2$ (مستحيلة) ومنه (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي .
</td>
</tr>
<tr>
<td>0.5</td>
<td>
4) لدينا : $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$.
• التحقق من أنّ $E\in(\Delta)$:
نعوض بإحداثيات النقطة E في جملة التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد : $\begin{cases} 3=11+2t \\ 0=4+t \\ t=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-4 \\ t=-4 \\ t=-4 \end{cases}$
ومنه $E\in(\Delta)$
</td>
</tr>
<tr>
<td>0.5</td>
<td>
• التحقق من أنّ $F\in(T)$:
نعوض بإحداثيات النقطة F في جملة التمثيل الوسيطي لـ (T) نجد : $\begin{cases} -3=t-2 \\ 3=5t+8 \\ 5=-t+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=-1 \end{cases}$
ومنه $F\in(T)$
</td>
</tr>
</table>

5) لدينا : $(S): \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha\left(\alpha\in\mathbb{R}\right)$ **أ) تعيين معادلة ديكارتية للمجموعة (S) بدلالة α** • لدينا : $\overrightarrow{ME}\left(3-x;-y;-4-z\right)$ و $\overrightarrow{FE}\left(6;-3;-9\right)$ $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ معناه $6(3-x)-3(-y)-9(-4-z)=\alpha$ أي $18-6x+3y+36+9z=\alpha$ ومنه $-6x+3y+9z+54-\alpha=0$ • **طبيعة المجموعة (S) : هي مستو شعاع ناظمي له $\vec{n}(-6;3;9)$**	0.5
ب) تعيين قيمة α بحيث يكون (S) المستوي المحوري للقطعة $[FE]$: • لدينا (S) المستوي المحوري للقطعة $[FE]$ معناه (S) يمر من منتصف $[FE]$ وليكن I - إذن $x_I=\frac{x_E+x_F}{2}=\frac{3-3}{2}=0$ $y_I=\frac{y_E+y_F}{2}=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2}$ $z_I=\frac{z_E+z_F}{2}=\frac{-4+5}{2}=\frac{1}{2}$	0.5
- بالتعويض في المعادلة السابقة نجد : $-6\times0+3\times\frac{3}{2}+9\times\frac{1}{2}+54-\alpha=0$ أي $9+54-\alpha=0$ وبالتالي $\alpha=63$	0.5

التمرين الثالث	04 نقاط
• لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$ **1- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$** - لدينا : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$	0.25
2- أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$ نسمي $P(n)$ هذه الخاصية . 1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ و $0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_0<\frac{1}{2}$ اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$. 2- نفرض صحة $P(k)$ أي نفرض أنّ : $0<u_k<\frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(k+1)$ أي نبرهن أنّ : $0<u_{k+1}<\frac{1}{2}$. - لدينا : $0<u_k<\frac{1}{2}$ ومنه $0<2u_k<1$ أي $1<2u_k+1<2$	0.75

	وبالتالي $\frac{1}{2}<\frac{1}{2u_k+1}<1$ إذن $-1<-\frac{1}{2u_k+1}<-\frac{1}{2}$ وأخيرا : $0<1-\frac{1}{2u_k+1}<\frac{1}{2}$ أي $0<u_{k+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $P(k+1)$ صحيحة. 3- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.
0.25 0.5	**ب) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي** n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ • لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{2u_n+1}-u_n=\frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$. • **تبيان أن المتتالية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متزايدة :** ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$ - لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ولدينا : $0<u_n<\frac{1}{2}$ ومنه $-1<-2u_n<0$ أي $0<1-2u_n<1$ وبالتالي : $0<u_n(1-2u_n)<\frac{1}{2}$ - ولدينا : $1<\frac{1}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ ومنه $0<\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}<\frac{1}{2}$ - أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.
$0.25+0.25$	ج) **دراسة تقارب المتتالية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **:** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\frac{1}{2}$. • **تعيين نهاية المتتالية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **:** $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$
0.5	3- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$ أ) **اثبات أن المتتالية** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **هندسية :** • لدينا : $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$ أي $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}=\frac{3\times 3^n\times\frac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\frac{2u_n}{2u_n+1}-1}=\frac{\frac{6\times 3^n\times u_n}{2u_n+1}}{\frac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}$ ومنه $v_{n+1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{\cancel{2u_n+1}}\times\frac{\cancel{2u_n+1}}{2u_n-1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{2u_n-1}=6v_n$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$

	وحدها الأول $v_0=\dfrac{3^0\times u_0}{2u_0-1}=\dfrac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1}=\dfrac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\dfrac{1}{3}$.
0.25	**ب) حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n :** • لدينا : $v_n=v_0\times q^n=-\dfrac{1}{3}\times 6^n$
0.5	• **استنتاج أنّ :** $u_n=\dfrac{2^n}{3+2^{n+1}}$ - لدينا : $v_n=\dfrac{3^n u_n}{2u_n-1}$ ومنه $2u_nv_n-v_n=3^nu_n$ أي $2u_nv_n-3^nu_n=v_n$ - ومنه $(2v_n-3^n)u_n=v_n$ وبالتالي : $u_n=\dfrac{v_n}{2v_n-3^n}$ إذن : $u_n=\dfrac{-\frac{1}{3}\times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3}\times 6^n\right)-3^n}=-\dfrac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}$ ومنه $u_n==-\dfrac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}=\dfrac{2^n\times 3^n}{2\times 3^n\times 2^n+3\times 3^n}$ أي $u_n=\dfrac{2^n}{2^{n+1}+3}=\dfrac{2^n}{3+2^{n+1}}$
0.5	• حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{2^n}{2^{n+1}+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\dfrac{1}{2}$
07 نقاط	التمرين الرابع
0.25 + 0.25	• **الجزء الأول :** • لدينا : $g(x)=x^2-2\ln x$ **1- دراسة تغيرات الدالة g :** • **حساب النهايات :** - $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-2\ln x\right)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ - $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-2\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$
0.25	• **حساب المشتقة :** $g'(x)=2x-2\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}=\dfrac{2(x+1)(x-1)}{x}$
0.25	• **دراسة إشارة المشتقة :** جدول: x : 0 ، 1 ، $+\infty$ — $g'(x)$: ‖ ، $-$ ، 0 ، $+$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

0.5	• جدول التغيرات : $\begin{array}{c|c} x & 0 \qquad 1 \qquad +\infty \\ \hline g'(x) & \| \quad - \quad 0 \quad + \\ \hline g(x) & \| +\infty \searrow 1 \nearrow +\infty \end{array}$
0.25	2- استنتاج إشارة $g(x)$: $\begin{array}{c|c} x & 0 \qquad +\infty \\ \hline g(x) & \| \quad + \end{array}$
0.25 + 0.25	• **الجزء الثاني :** - لدينا : $f(x)=1-x-\frac{2}{x}(1+lnx)$ 1- أ) حساب النهايات : - $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1-x-\frac{2}{x}(1+lnx)\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}(1+lnx)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2}{x}(1+lnx)\right)=-\infty\end{cases}$ - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x-\frac{2}{x}(1+lnx)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x-\frac{2}{x}-2\frac{lnx}{x}\right)=-\infty$ لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty\end{cases}$
0.5	ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$: • لدينا : $f'(x)=-1-2\left[-\frac{1}{x^2}(1+lnx)+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}\right]=-1-2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{lnx}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)$ اي $f'(x)=\frac{-x^2+2lnx}{x^2}=-\frac{g(x)}{x^2}$
0.25	ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f : بما أنّ $g(x)>0$ فإنّ $f'(x)<0$ $\begin{array}{c|c} x & 0 \qquad +\infty \\ \hline f'(x) & \| \quad - \end{array}$

• جدول تغيرات الدالة f : $\begin{array}{c\|c}x & 0 \qquad\qquad +\infty \\ \hline f'(x) & \| \qquad - \\ \hline f(x) & \| +\infty \searrow -\infty\end{array}$	0.5
2- أ) تبيان أنّ المستقيم $y=1-x$: (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$: • لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(1-x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x-\frac{2}{x}(1+lnx)-1+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x}(1+lnx)\right)$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(1-x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x}-2\frac{lnx}{x}\right)=0$ ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.	0.25
ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$. $f(x)-y=1-x-\frac{2}{x}(1+lnx)-1+x=-\frac{2}{x}(1+lnx)$ • **جدول إشارة الفرق :** $f(x)-y=0$ معناه $-\frac{2}{x}(1+lnx)=0$ ومنه $1+lnx=0$ أي $lnx=-1$ وبالتالي $x=e^{-1}$ $\begin{array}{c\|cccc}x & 0 & & e^{-1} & & +\infty \\ \hline 1+lnx & \| & - & 0 & + & \\ \hline f(x)-y & \| & + & 0 & - & \end{array}$ الوضع النسبي: (C_f) فوق (Δ) ؛ (C_f) يقطع (Δ) ؛ (C_f) تحت (Δ)	0.5
ج) تبيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.41<\alpha<0.42$: • لدينا f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0.41;0.42]$ • ولدينا : $f(0.41)=1-0.41-\frac{2}{0.41}(1+ln0.41)=0.06$ و $f(0.42)=1-0.42-\frac{2}{0.42}(1+ln0.42)=-0.05$ أي أنّ $f(0.41)\times f(0.42)<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.41<\alpha<0.42$	0.5

<table>
<tr><td>

د) تبيان أنّ المنحني $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا (T) يوازي (Δ):

- (T) يوازي (Δ) معناه معامل توجيه (T) يساوي -1 أي $f'(x_0)=-1$

ومنه $-\dfrac{x_0^2-2\ln x_0}{x_0^2}=-1$ أي $x_0^2-2\ln x_0=x_0^2$

وبالتالي $-2\ln x_0=0$ إذن $\ln x_0=0$ ومنه $x_0=1$

- (T) مماس للمنحني $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$

</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>

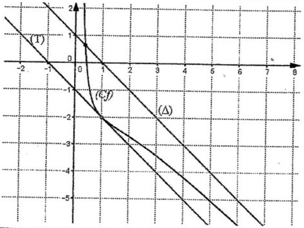
- **كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T):**

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=-1(x-1)+(-2)=-x+1-2=-x-1$

أي $(T): y=-x-1$

</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>

- **الرسم :**



</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>

4) المناقشة البيانية لحلول المعادلة $f(x)=m-x\ (m\in\mathbb{R})$:

- حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني $\left(C_f\right)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y=m-x$ الموازي لكل من (T) و (Δ)
- إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ المعادلة ليس لها حل .
- إذا كان $m=-1$ المعادلة تقبل حلا هو $x=1$.
- إذا كان $m\in]-1;1[$ المعادلة تقبل حلين موجبين .
- إذا كان $m\in[1;+\infty[$ المعادلة تقبل حلا موجبا .

</td><td>0.75</td></tr>
</table>

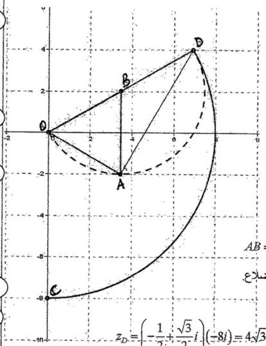
السلم	الإجابة النـــموذجية الموضوع الثاني	

حل التمرين الأول:

1.لدينا : $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$

01 $\Delta=-16=16i^2$ ، $z_1=\dfrac{4\sqrt{3}-4i}{2}=2\sqrt{3}-2i$

، $z_2=\overline{z_1}=2\sqrt{3}+2i$



01 2. أ) $z_B=2\sqrt{3}+2i=4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=4e^{i\frac{\pi}{6}}$

، $z_A=2\sqrt{3}-2i=\overline{z_B}==4e^{-i\frac{\pi}{6}}$

0.5 ب) أنظر الشكل

ت) لدينا : $OA=|z_A|=4$ ، $OB=|z_B|=4$

ث) ومن جهة أخرى :

$AB=|z_B-z_A|=\left|2\sqrt{3}+2i-(2\sqrt{3}-2i)\right|=|4i|=4$

ومنه $OA=OB=AB$ و المثلث OAB متقايس الأضلاع.

0.5 3.- تعليم النقطتان C و D أنظر الشكل.

0.5 - لدينا : $z'-0=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-0)$ ومنه : ، $z_D=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-8i)=4\sqrt{3}+4i$

0.5 4.نلاحظ أن : $z_D=2z_B$ و بعبارة أخرى : $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OB}$ و هذا يعني أن النقطة D هي صورة النقطة B بتحاك h

0.5 مركزه O و نسبته 2 .

5. لدينا : $\dfrac{z_A-z_D}{z_A}=\dfrac{2\sqrt{3}-2i-\left(4\sqrt{3}+4i\right)}{2\sqrt{3}-2i}=\dfrac{-2\sqrt{3}-6i}{2\sqrt{3}-2i}=-i\sqrt{3}$ ومنه :

0.5 $\arg\left(\dfrac{z_A-z_D}{z_A}\right)=\arg\left(-i\sqrt{3}\right)=-\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$ أي : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{DA}\right)=\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AD}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$

و المثلث OAD قائم في A .

حل التمرين الثاني :

1.بيان أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.

01 $\overrightarrow{AB}(1;-1;-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(2;-5;-3)$ و $\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{-5}{-1}$ ومنه الشعاعان غير مرتبطين خطيا و النقط ليست في استقامية

أعداد مركبة و تحويلات نقطية

الهندسة الفضائية

2. أ – البرهان أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC).

لدينا : $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=2\times1-1\times(-1)-1\times3=0$ و $\vec{u}.\overrightarrow{AC}=2\times2-1\times(-5)+3\times(-3)=0$ ومنه $\vec{u}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا فهو عمودي على المستوي (ABC). 0.5

ب- للمستوي (ABC) معادلة ديكارتية من الشكل : $2x-y+3z+d=0$ و بما أن $A\in(ABC)$ نجد : $d=1$ 0.75

ومنه معادلة المستوي (ABC) هي : $2x-y+3z+1=0$

جـ- كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ). $\begin{cases}x=7+2t\\y=-1-t\quad t\in\mathbb{R}\\z=4+3t\end{cases}$ 0.75

د- تعيين إحداثيات النقطة H ،نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (ABC)

بتعويض كلا من x ، y و z في معادلة المستوي نجد : $2(7+2t)-(-1-t)+3(4+3t)+1=0$ أي : $t=-2$.

و منه : $H(7+2\times(-2);-1+2;4+3\times(-2))$ أي : $H(3;1;-2)$ 0.5

3) أ– البرهان أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان .

لدينا : $\vec{n}_{(P)}(1;1;1)$ و $\vec{n}_{(Q)}(1;4;0)$ نلاحظ أنهما غير مرتبطين خطيا و بالتالي (P) و (Q) متقاطعان . 0.5

ب- لدينا : $\begin{cases}x+y+z=0\\x+4y+2=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x+t+z=0\\y=t\\x+4t+2=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=-4t-2\\y=t\\z=3t+2\end{cases}$ و $(t\in\mathbb{R})$ (بوضع $y=t$) 0.5

جـ- شعاع توجيه المستقيم (D') هو: $\vec{u}(-4;1;3)$ و لدينا : $\vec{u}.\vec{n}=-4\times2+1\times(-1)+3\times3=0$ و منه المستقيم (D') و المستوي (ABC) متوازيان و بالإضافة الى ذلك النقطة $E(-2;0;-2)$ من (D') من أجل $(t=0)$ لا تحقق معادلة (ABC) إذن هما متوازيان تماما. 0.5

حل التمرين الثالث :

- دراسة تغيرات الدالة f

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-\ln x)=-\infty$ 0.25

الدالة قابلة للإشتقاق على المجال و لدينا : $f'(x)=1-\left(1\times\ln x+\frac{1}{x}\times x\right)=-\ln x$ 0.25

$f'(x)=0$ معناه $-\ln x=0$ أي $x=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

0.5

2. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\frac{e^n}{n^n}$.

حساب الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 ثم وضع تخمينا حول إتجاه تغيرها و نهايتها .

$u_1=e\simeq2.71$ ، $u_2=\frac{e^2}{4}\simeq1.85$ ، $u_3=\frac{e^3}{27}\simeq074$ ، $u_4=\frac{e^4}{256}\simeq0.21$ ، $u_5=\frac{e^5}{3125}\simeq0.05$ 0.75

يظهر أن (u_n) متناقصة و نهايتها تؤول الى 0

3.أ- اثبات أن $v_n = n - n\ln(n)$.

0.5 لدينا : $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\frac{e^n}{n^n}\right) = \ln e^n - \ln n^n = n\ln e - n\ln(n) = n - n\ln(n)$

المتتاليات العددية ،

ب- باستعمال الدالة f ،دراسة إتجاه تغير (v_n) ثم استنتاج أن (u_n) متناقصة .

0.75 من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا : $v_n = f(n)$ و الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و بالتالي (v_n) متناقصة تماما .

بما أن $u_n = e^{v_n}$ و الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن اتجاه تغير (u_n) هو اتجاه تغير (v_n)

أي : (u_n)متناقصة تماما .

جـ- استنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $0 \prec u_n \leq e$

0.5 المتتالية (u_n)متناقصة تماما و موجبة و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $0 \prec u_n \leq u_1 = e$ أي أن : (u_n)محدودة .

د- استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة و تعيين نهايتها .

0.5 المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} v_n = \lim_{x\to+\infty} f(n) = -\infty$ أي : $\lim_{x\to+\infty} \ln u_n = -\infty$ و بالتالي : $\lim_{x\to+\infty} u_n = 0$ $\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{v_n} = 0 \right.$ و $\left. f \right)$

<u>حل التمرين الرابع:</u>

I) درسة اتجاه تغير الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها. $g(x) = x + 1 - e^{x}$

01 $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x + 1 - e^x\right) = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$حيث : $g'(x) = 1 - e^x$ و التي تنعدم من أجل $x = 0$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow -\infty$

0.5 بما أن الدالة g تقبل قيمة حدية عظمى $g(0) = 0$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \leq 0$.

الدوال الأسية و حساب الدوال الأصلية

0.25 II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(-2x^2-x+1)e^{-x}$.

أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

0.5 ب). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\frac{x^2}{e^x}=-2\times 0=0$ ، $y=0$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f).

جـ) بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\left(2x^2-3x-2\right)e^{-x}$ ، تعيين إشارة $f'(x)$

01 الدالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f'(x)=(-4x-1)e^{-x}-e^{-x}\left(-2x^2-x+1\right)=\left(2x^2-3x-2\right)e^{-x}$

$f'(x)=0$ معناه : $2x^2-3x-2=0$ ، $\Delta=25\succ 0$ ، $x'=-\frac{1}{2}$ ، $x''=2$

د) تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

0.5

x	$-\infty$		$-1/2$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\frac{1}{2})$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	0

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$f(2)=-9e^{-2}=-\frac{9}{e^2}$

0.5 3) أ) تعيين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 : $y=-2x+1$

ب) من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x)-(1-2x)=(-2x+1)(x+1)e^{-x}-(1-2x)=(1-2x)\left[(x+1)e^{-x}-1\right]$

$f(x)-(1-2x)=(1-2x)\left(\frac{x+1}{e^x}-1\right)=(1-2x)\left(x+1-e^x\right)e^{-x}$

$f(x)-(1-2x)=(-2x+1)\,g(x)e^{-x}$

جـ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-2x+1)$

0.5

x	$-\infty$	0	$1/2$	$+\infty$
$-2x+1$	$+$	$+$	0	-
$g(x)$	-	0	-	-
$f(x)-(-2x+1)$	-	0	-	0	+
الوضعية النسبية	(C_f) تحت (T)	(C_f) تحت (T)	(C_f) فوق (T)

4) أ) دراسة تقاطع المنحنى (C_f) ومحور الفواصل

0.25 $f(x)=0$ معناه $-2x^2-x+1=0$ أي : $x=-1$ و $x=\frac{1}{2}$ ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما $x=-1$ و $x=\frac{1}{2}$.

ب) رسم (C_f) و (T) على المجال $[-1;+\infty[$.

5) F الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$

تعيين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

0.5 لدينا : $F'(x)=(2ax+b)e^{-x}-e^{-x}\left(ax^2+bx+c\right)=\left(-ax^2+(2a-b)x+b+c\right)e^{-x}$

بالمطابقة نجد : $a=2$ ، $b=5$ ، $c=4$ إذن : $F(x)=\left(2x^2+5x+4\right)e^{-x}$

0.75