تمرين 01 ☹

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

نعتبر النقطة $A(1;2;-3)$ والشعاع $\vec{u}(-4;2;1)$

1– أُكتب معادلة المستوي (P) الذي يشمل A ويعامد $\vec{u}$

2– تحقق أنّ النقطة $C(-1;1;1)$ لا تنتمي إلى المستوي (P).

3– احسب المسافة بين النقطة C والمستوي (P).

4– احسب المسافة بين النقطة $D(1;0;1)$ والمستوي (P) ماذا تستنتج ؟

الحل☺

1. كتابة معادلة المستوي (P) الذي يشمل A ويعامد $\vec{u}$

للمستوي (P) معادلة من الشكل $-4x+2y+z+d=0$ وبما أنّ $A\in(P)$ فإنّ $-4+4-3+d=0$ ومنه $d=3$

وعليه معادلة المستوي (P) هي $-4x+2y+z+3=0$.

2. التحقق أنّ النقطة $C(-1;1;1)$ لا تنتمي إلى المستوي (P).

لدينا $-4x_C+2y_C+z_C+3=4+2+1+3=10$ ومنه النقطة C لا تنتمي للمستوي (P).

3. حساب المسافة بين النقطة C والمستوي (P).

$$d\left(C;(P)\right)=\frac{\left|-4x_C+2y_C+z_C+3\right|}{\sqrt{(-4)^2+2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{21}}$$

4– حساب المسافة بين النقطة $D(1;0;1)$ والمستوي (P) ماذا تستنتج ؟

$d\left(D;(P)\right)=\dfrac{\left|-4(1)+2(0)+1+3\right|}{\sqrt{(-4)^2+2^2+1^2}}=\dfrac{0}{\sqrt{21}}=0$ و نستنتج أن النقطة D تنتمي للمستوي (P).

تمرين 02☹

يعطى المستويان (P_1) و (P_2) بمعادلتيهما: $x-2y+3z-4=0$ و $-2x+3y-z+2=0$

- هل المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان ؟ في حالة تقاطعهما عيّن التمثيل الوسيطي لمستقيم التقاطع

الحل☺

يعطى المستويان (P_1) و (P_2) بمعادلتيهما: $x-2y+3z-4=0$ و $-2x+3y-z+2=0$

- هل المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان ؟

لدينا $\vec{n}(1;-2;3)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P_1) و $\vec{n'}(-2;3;-1)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P_2).

ولدينا $\dfrac{3}{-2}\neq\dfrac{-2}{1}$ منه الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا إذن المستويان (P_1) و (P_2) متقاطعان حسب مستقيم (d)

تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (d).

المستقيم (d) معرف بالجملة التالية $\begin{cases}x-2y+3z-4=0..........(1)\\-2x+3y-z+2=0.......(2)\end{cases}$

بضرب المعادلة (1) بـالعدد 2 وبجمع المعادلتين نجد $-y+5z-6=0$ ومنه $y=5z-6$

وبتعويض في المعادلة (1) نجد $x-2(5z-6)+3z-4=0$ ومنه $x-7z+8=0$ أي $x=7z-8$

وبوضع $z=t$ نجد $\begin{cases} x=7t-8 \\ y=5t-6 \\ z=t \end{cases}$ حيث t عدد حقيقي.

تمرين 03☹

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$، نعتبر النقط:

$A(-1;-1;-1)$ ، $B(2;3;-2)$ ، $C(-1;3;-1)$ والشعاع $\vec{u}(-1;-2;-3)$.

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (OAB).

2) عيّن المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل C ويكون $\vec{u}$ شعاعا ناظميا له.

3) عيّن نقط تقاطع المستوي (OAB) والمستوي (P).

الحل☺

1) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستوي (OAB).

لدينا $\overrightarrow{OA}(-1;-1;-1)$ ، $\overrightarrow{OB}(2;3;-2)$ و $\frac{3}{-1}\neq\frac{2}{-1}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط A ، B و C تعين مستويا (OAB).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(OAB)$ يعني $\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

ومنه $\begin{cases} x=-\alpha+2\beta \\ y=-\alpha+3\beta \\ z=-\alpha-2\beta \end{cases}$ حيث α و β وسيطان حقيقيان.

2) تعيين المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل C ويكون $\vec{u}$ شعاعا ناظميا له.

المستوي (P) له معادلة من الشكل $-x-2y-3y+d=0$ ولدينا $C\in(P)$ تعني $1-6+3+d=0$ أي $d=2$

وعليه معادلة المستوي (P) هي $-x-2y-3y+2=0$.

3) تعيين نقط تقاطع المستوي (OAB) والمستوي (P).

نحل الجملة $\begin{cases} x=-\alpha+2\beta \text{..................}(1) \\ y=-\alpha+3\beta \text{..................}(2) \\ z=-\alpha-2\beta \text{..................}(3) \\ -x-2y-3y+2=0 \text{......}(4) \end{cases}$

نعوض كل من المعادلة (1) و (2) و (3) في المعادلة (4) نجد $\alpha-2\beta+2\alpha-6\beta+3\alpha+6\beta+2=0$

ومنه $6\alpha-2\beta+2=0$ أي $\beta=3\alpha+1$ وعليه $\begin{cases} x=-\alpha+2(3\alpha+1) \\ y=-\alpha+3(3\alpha+1) \\ z=-\alpha-2(3\alpha+1) \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=5\alpha+2 \\ y=8\alpha+3 \\ z=-7\alpha-2 \end{cases}$ حيث α عدد حقيقي

وهو تمثيل وسيطي لمستقيم التقاطع.

تمرين 04☹ (بكالوريا علوم تجريبية 2011)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، المستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له ؛ وليكن (Q) المستوي ذا المعادلة $x+2y-7=0$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

1. أُكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P).

2. أ - تحقق أنّ النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين (P) و (Q).

ب - بيّن أنّ المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له.

3. لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ - أُحسب المسافة بين النقطة C والمستوي (P)، ثمّ المسافة بين النقطة C والمستوي (Q).

ب - اثبت أنّ المستويين (P) و (Q) متعامدان .

جـ - استنتج المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ).

الحل☺

1. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

المستوي (P) له معادلة من الشكل $-2x+y+5z+d=0$ ولدينا $A\in(P)$ يعني $-2-2+5+d=0$ أي $d=-1$

وبالتالي $-2x+y+5z-1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

2. أ - التحقق أنّ النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين (P) و (Q).

لدينا $-2x_B+y_B+5z_B-1=2+4-5-1=0$ ومنه $B\in(P)$.

و لدينا $x_B+2y_B-7=-1+8-7=0$ ومنه $B\in(Q)$.

ب - تبيين أنّ المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له.

لدينا $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n}'(1;2;0)$ شعاع ناظمي لـ (Q) و $\frac{1}{2}\neq\frac{-2}{1}$ ومنه الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي المستويان (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

إذا كانت $M\in(\Delta)$ فإن إحداثياتها تحقق الجملة $\begin{cases}x+2y-7=0\\-2x+y+5z-1=0\end{cases}$ وبوضع $y=t$

تصبح الجملة $\begin{cases}x+2t-7=0..............(1)\\-2x+t+5z-1=0.....(2)\end{cases}$ من (1) نجد $x=-2t+7$ وبالتعويض في (2) نجد

$-2(-2t+7)+t+5z-1=0$ ومنه $z=-t+3$ إذن $(\Delta):\begin{cases}x=-2t+7\\y=t\\z=-t+3\end{cases}$ حيث t وسيط حقيقي.

3. لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ - حساب المسافة بين النقطة C والمستوي (P)، ثمّ المسافة بين النقطة C والمستوي (Q).

$$d(C;(P))=\frac{|-2(5)-2+5(-1)-1|}{\sqrt{4+1+25}}=\frac{18}{\sqrt{30}}=\frac{3\sqrt{30}}{5}\ ؛\ d(C;(Q))=\frac{|5+2(-2)-7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب - اثبت أنّ المستويين (P) و (Q) متعامدان.

لدينا $\vec{n}.\vec{n}'=-2\times1+1\times2+5\times0=0$ ومنه $\vec{n}\perp\vec{n}'$ وبالتالي المستويان (P) و (Q) متعامدان.

جـ - استنتج المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ)

المستويان (P) و (Q) متعامدان ومنه حسب نظرية فيتاغورس $d^2(C;(\Delta))=d^2(C;(P))+d^2(C;(Q))$

aziz_mus1@hotmail.fr

ومنه $d\left(C;(\Delta)\right)=\sqrt{d^2\left(C;(P)\right)+d^2\left(C;(Q)\right)}=\sqrt{\frac{270}{25}+\frac{180}{25}}=\sqrt{\frac{450}{5}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

تمرين 05☹ (بكالوريا علوم تجريبية 2014)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط:

$A(-1;1;3)$ ، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ ، $D(2;0;-1)$ والمستوي (P) ذا المعادلة : $2y+z+1=0$.

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases}x=-1\\y=2+\beta\\z=1-2\beta\end{cases}$ حيث β وسيط حقيقي.

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) ؛ ثمّ تحقق أنّ المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P) .

2) بيّن أنّ المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

3) أ) احسب المسافة بين النقطة A والمستوي (P) .

ب) بيّن أنّ D نقطة من (P) ؛ وأنّ المثلث BCD قائم .

4) بيّن أنّ $ABCD$ رباعي وجوه، ثمّ احسب حجمه.

الحل☺

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط:

$A(-1;1;3)$ ، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ ، $D(2;0;-1)$ والمستوي (P) ذا المعادلة : $2y+z+1=0$.

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases}x=-1\\y=2+\beta\\z=1-2\beta\end{cases}$ حيث β وسيط حقيقي.

1) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC).

لدينا $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (BC).

من أجل نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (BC) لدينا $\overrightarrow{BM}=t\overrightarrow{BC}$ حيث t عدد حقيقي.

ومنه $\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=-1+2t\end{cases}$ حيث t عدد حقيقي.

التحقق أنّ المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).

لدينا $2y_B+z_B+1=2(0)-1+1=0$ ومنه $B\in(P)$

ولدينا $2y_C+z_C+1=2(-1)+1+1=0$ ومنه $C\in(P)$ وبالتالي المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).

2) تبيين أنّ المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

لدينا $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (BC) و $\vec{u}(0;1;-2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

و $\frac{0}{1}\neq\frac{1}{-1}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي المستقيمان (Δ) و (BC) غير متوازيين

ندرس التقاطع

نفرض أنّ (Δ) و (BC) متقاطعان إذن $\begin{cases}-1=1+t..............(1)\\2+\beta=-t...........(2)\\1-2\beta=1+2t.....(3)\end{cases}$

aziz_mus1@hotmail.fr

من (1) نجد $t=-2$ بالتعويض في جميع المعادلات نجد $\begin{cases}-1=1-2\\2+\beta=2\\1-2\beta=-5\end{cases}$ أي $\begin{cases}-1=-1\\\beta=0\\\beta=3\end{cases}$ وهذا تناقض

إذن (Δ) و (BC) غير متقاطعين وبالتالي فهما ليسا من نفس المستوي.

3) أ) حساب المسافة بين النقطة A والمستوي (P).

$$d\left(A;(P)\right)=\frac{\left|2(1)+3+1\right|}{\sqrt{4+1}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

ب) تبيين أنّ D نقطة من (P)؛ وأنّ المثلث BCD قائم.

لدينا $2y_D+z_D+1=2(0)-1+1=0$ ومنه $D\in(P)$

ولدينا $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ ، $\overrightarrow{BD}(1;0;0)$ و $\overrightarrow{CD}(0;1;-2)$ إذن $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BD}=0\times1+1\times0-2\times0=0$ ومنه $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{BD}$

وبالتالي المثلث BCD قائم في D.

4) تبيين أنّ $ABCD$ رباعي وجوه.

بما أنّ $d\left(A;(P)\right)\neq0$ فإنّ $A\notin(P)$ ومنه $ABCD$ رباعي وجوه (لأنّ المستوي (BCD) هو المستوي (P))

حساب حجمه.

$$V(ABCD)=\frac{1}{3}S(BCD)\times d\left(A;(P)\right)$$

لدينا $S(BCD)=\frac{BD\times CD}{2}$ ولدينا $BD=\sqrt{1+0+0}=1$ و $CD=\sqrt{0^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

ومنه $S(BCD)=\frac{1\times\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}ua$ وعليه $V(ABCD)=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{6}{\sqrt{5}}=1uv$.

<u>تمرين 06</u>☹

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$،

نعتبر النقط $A(1;0;-1)$، $B(-1;4;1)$، $C(2;3;3)$، $D(2;1;5)$

1– بيّن أنّ الشعاع $\vec{u}(-1;-1;1)$ عمودي على المستوي (ABC).

2– استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3– بين أن $ABCD$ هو رباعي أوجه.

4– احسب مساحة المثلث ABC.

5– احسب المسافة d بين النقطة D والمستوي (ABC).

6– احسب حجم رباعي الأوجه $ABCD$.

<u>الحل</u>☺

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$،

نعتبر النقط $A(1;0;-1)$، $B(-1;4;1)$، $C(2;3;3)$، $D(2;1;5)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(-2;4;2)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;3;4)$ و $\frac{4}{3}\neq\frac{-2}{1}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي

النقط A ، B و C تعين مستويا.

1– تبيين أنّ الشعاع $\vec{u}(-1;-1;1)$ عمودي على المستوي (ABC).

لدينا $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=-1(-2)-1(4)+1(2)=0$ و $\vec{u}.\overrightarrow{AC}=-1(1)-1(3)+1(4)=0$ ومنه الشعاع $\vec{u}$ عمودي على

aziz_mus1@hotmail.fr

كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي الشعاع $\vec{u}$ عمودي على المستوي (ABC).

2- استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

للمستوي (ABC) معادلة من الشكل $-x-y+z+d=0$ ولدينا $A\in(ABC)$ تعني $-1-1+d=0$ ومنه $d=2$
وعليه $-x-y+z+2=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3- تبيين أن $ABCD$ هو رباعي أوجه.

بما أنّ $-x_D-y_D+z_D+2=-2-1+5+2=4\neq 0$ فإن النقطة D خارجة عن المستوي (ABC) ومنه $ABCD$ هو رباعي أوجه.

4- حساب مساحة المثلث ABC.

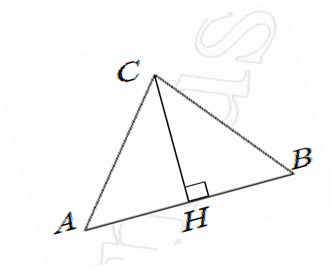
لتكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) عندئذ $\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}\right|=AB.AH$

ولدينا من جهة أخرى $\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|=\left|-2(1)+4(3)+2(4)\right|=18$ و $AB=\sqrt{(-2)^2+(4)^2+(2)^2}=\sqrt{24}$

وعليه $18=\sqrt{24}AH$ إذن $AH=\dfrac{18}{\sqrt{24}}$.

لدينا في المثلث ACH القائم في H : $AH^2+CH^2=AC^2$ ومنه $CH=\sqrt{AC^2-AH^2}$

حيث $AC^2=(1)^2+(3)^2+(4)^2=26$ و $AH^2=\dfrac{324}{24}$ ومنه $CH=\sqrt{26-\dfrac{324}{24}}=\sqrt{\dfrac{300}{24}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$



إذن $S(ABC)=\dfrac{AB.CH}{2}=\dfrac{2\sqrt{6}\times\dfrac{5\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{10\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}ua$

5- حساب المسافة d بين النقطة D والمستوي (ABC).

$$d=\frac{|-2-1+5+2|}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

6- حساب حجم رباعي الأوجه $ABCD$.

$V(ABCD)=\dfrac{1}{3}S(ABC)\times d$ ومنه $V(ABCD)=\dfrac{1}{3}\times5\sqrt{3}\times\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{20}{3}uv$.

تمرين 07☹

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(3;-1;2)$، $B(4;-1;-1)$، $C(2;0;2)$.

1) أ- بيّن أنّ النقط A، B و C تعيّن مستويا.

ب- بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(3;3;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثمّ عيّن معادلة ديكارتية له.

2) ليكن المستوي (P) الذي معادلته الديكارتية $x+y-1=0$.

أ- بيّن أنّ المستويين (P) و (ABC) متقاطعان.

ب- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (ABC).

3) أ- احسب المسافة بين O والمستقيم (Δ).

ب- استنتج معادلة ديكارتية لسطح الكرة التي مركزها O والمماسة للمستقيم (Δ).

الحل☺

أ- إثبات أنّ النقط A، B و C تعيّن مستويا: لدينا $\overrightarrow{AB}(1;0;-3)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;1;0)$

$\frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1}$ ومنه إحداثيات الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متناسبة وعليه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

وبالتالي فإنّ النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة فهي تعيّن مستويا وحيدا.

ب ـ إثبات أنّ $\vec{n}$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 3(1)+3.(0)+1.(-3) = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 3(-1)+3.(1)+1.(0) = 0$

ومنه الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وعليه فإنّ الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (ABC).

تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

المستوي (ABC) له معادلة من الشكل $3x+3y+z+d=0$ ولدينا C تنتمي للمستوي (ABC) يعني

$3(2)+3(0)+2+d=0$ ومنه $d=-8$ وبالتالي معادلة المستوي (ABC) هي: $3x+3y+z-8=0$.

أ ـ إثبات أنّ المستويين (P) و (ABC) متقاطعان.

لدينا $\vec{n}(3;3;1)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) و $\vec{n}'(1;1;0)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P)

و $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{3}$ ومنه الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا وعليه فإنّ المستويين (P) و (ABC) متقاطعان

ب ـ تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (ABC).

المستقيم (Δ) معرّف بالجملة التالية: $\begin{cases} 3x+3y+z-8=0 .....(1) \\ x+y-1=0 ....(2) \end{cases}$

من المعادلة (2) نجد: $x=1-y$.

وبتعويض قيمة x في (1) نجد $3(1-y)+3y+z-8=0$ ومنه $z=5$ وعليه $\begin{cases} x=1-y \\ y=y \\ z=5 \end{cases}$

وبوضع $y=t$ نجد: $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=5 \end{cases}$ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

أ ـ حساب المسافة بين النقطة O و (Δ).

لتكن H المسقط العمودي للنقطة O على (Δ) ومنه $\vec{u}.\overrightarrow{OH}=0$.

لدينا H تنتمي للمستقيم (Δ) إذن $H(1-t;t;5)$ و $\overrightarrow{OH}(1-t;t;5)$.

ولدينا $\vec{u}(-1;1;0)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

$\vec{u}.\overrightarrow{OH}=0$ معناه $(-1)(1-t)+t+0.(5)=0$ ومنه $t=\frac{1}{2}$ وعليه $H\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};5\right)$

$$d(O;(\Delta)) = OH = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+(5-0)^2} = \frac{\sqrt{102}}{2}$$

aziz_mus1@hotmail.fr

ب ـ استنتاج معادلة ديكارتية لسطح الكرة التي مركزها O والمماسة للمستقيم (Δ).

معادلة سطح الكرة هي $x^2+y^2+z^2=\frac{102}{4}$ أي $x^2+y^2+z^2=\frac{51}{2}$

تمرين 08☹

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

$x-y+z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يمسّ سطح الكرة (S) ذات المركز $A(1;-1;3)$.

1- جد نصف قطر سطح الكرة (S)، ثمّ استنتج معادلة ديكارتية لـ: (S).

2- جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل النقطة A والعمودي على (P).

3- لتكن النقطة H نقطة تماس (S) والمستوي (P)؛ عيّن احداثيات H.

4- عيّن احداثيات النقط المشتركة بين (S) وحامل محور الفواصل.

5- المستويان (P_1) و (P_2) معادلتيهما على الترتيب: $x-y-2z-3=0$ و $2x+y-z-2=0$.

ـ جد معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل النقطة $B(3;-6;2)$ والعمودي على المستويين (P_1) و (P_2).

الحل☺

$x-y+z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يمسّ سطح الكرة (S) ذات المركز $A(1;-1;3)$.

1- إيجاد نصف قطر سطح الكرة (S)، ثمّ استنتج معادلة ديكارتية لـ: (S).

لدينا $d(A;(P))=\frac{|1+1+3-11|}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ بما أن (P) يمس (S) فإن نصف قطر السطح (S) هو $R=2\sqrt{3}$

وبالتالي المعادلة الديكارتية للسطح (S) هي $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=12$.

2- إيجاد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل النقطة A والعمودي على (P).

لدينا $\vec{n}(1;-1;1)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P) وبما أنّ (d) عمودي على (P) فإنّ $\vec{n}$ موجه للمستقيم (d).

ومنه $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=3+t \end{cases}$ حيث t عدد حقيقي؛ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم (d).

3- لتكن النقطة H نقطة تماس (S) والمستوي (P)؛ تعيين احداثيات H.

H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) أي هي نقطة تقاطع المستقيم (d) والمستوي (P).

لدينا $H\in(d)$ معناه $H(1+t;-1-t;3+t)$ ولدينا $H\in(P)$ معناه $x_H-y_H+z_H-11=0$ ومنه

$1+t-(-1-t)+3+t-11=0$ ومنه $3t-6=0$ أي $t=2$ وبالتالي فإنّ $H(3;-3;5)$.

4- تعيين احداثيات النقط المشتركة بين (S) وحامل محور الفواصل.

نحل الجملة $\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=12.....(1) \\ y=0...(2) \\ z=0...(3) \end{cases}$ بتعويض كل من y و z في (1) نجد

$(x-1)^2+(0+1)^2+(0-3)^2=12$ ومنه $(x-1)^2=2$ أي $x=\sqrt{2}+1$ أو $x=-\sqrt{2}+1$

إذن $(x;y;z)\in\{(\sqrt{2}+1;0;0);(-\sqrt{2}+1;0;0)\}$ ومنه $(S)\cap(Ox)=\{I(\sqrt{2}+1;0;0);I'(-\sqrt{2}+1;0;0)\}$

5- المستويان (P_1) و (P_2) معادلتيهما على الترتيب: $x-y-2z-3=0$ و $2x+y-z-2=0$.

ـ إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل النقطة $B(3;-6;2)$ والعمودي على المستويين (P_1) و (P_2).

لدينا $\overrightarrow{n_1}(1;-1;-2)$ شعاع ناظم للمستوي (P_1) و $\overrightarrow{n_2}(2;1;-1)$ شعاع ناظم للمستوي (P_2). وهما شعاعي توجيه للمستوي (Q) العمودي على المستويين (P_1) و (P_2).

ليكن $\vec{u}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (Q) عندئذ $\begin{cases}\vec{u}.\overrightarrow{n_1}=0\\ \vec{u}.\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a-b-2c=0..........(1)\\ 2a+b-c=0..........(2)\end{cases}$

بجمع المعادلتين نجد $3a-3c=0$ ومنه $a=c$ بالتعويض في (2) نجد $2c+b-c=0$ ومنه $b=-c$ نأخذ مثلا $c=1$

نجد $\vec{u}(1;-1;1)$ ومنه للمستوي (Q) معادلة من الشكل $x-y+z+d=0$ ولدينا $B\in(Q)$ تعني $3+6+2+d=0$

أي $d=-11$ وعليه $x-y+z-11=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q) وعليه $(Q)=(P)$.

<u>تمرين 09☹ (بكالوريا تقني رياضي 2010)</u>

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقطتين $A(3;-2;2)$ و $B(0;4;-1)$.

1. أكتب معادلة للمستوي (P_1) الذي يشمل A و $\vec{u}(1;0;-1)$ شعاع ناظمي له.

2. (P_2) المستوي الذي يحوي المستقيم (AB) ويعامد المستوي (P_1).

أ ـ بيّن أنّ $\vec{v}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2).

ب ـ أكتب معادلة للمستوي (P_2).

3. نعتبر النقطتين C و D حيث: $C(6;1;5)$ و D معرّفة بـ: $\overrightarrow{CD}(0;-3;-6)$.

أ ـ بيّن أنّ المثلث ACD قائم في A واحسب مساحته.

ب ـ بيّن أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (ACD).

جـ ـ أحسب حجم رباعي الوجوه $ACDB$.

<u>الحل☺</u>

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقطتين $A(3;-2;2)$ و $B(0;4;-1)$.

1. كتابة معادلة للمستوي (P_1) الذي يشمل A و $\vec{u}(1;0;-1)$ شعاع ناظمي له.

المستوي (P_1) له معادلة من الشكل $x-z+d=0$ ولدينا $A\in(P_1)$ تعني $3-2+d=0$ أي $d=-1$ وعليه

$x-z-1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P_1).

2. (P_2) المستوي الذي يحوي المستقيم (AB) ويعامد المستوي (P_1).

أ ـ تبيين أنّ $\vec{v}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2).

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;6;-3)$ و $\vec{u}$ شعاعي توجيه للمستوي (P_2) وهما غير مرتبطين خطيا لأنّ يحوي المستقيم (AB) ويعامد المستوي (P_1) ولدينا $\vec{v}.\vec{u}=1\times1+1\times0+1(-1)=0$ و $\vec{v}.\overrightarrow{AB}=1(-3)+1\times6+1(-3)=0$

ومنه $\vec{v}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}\perp\vec{u}$ أي شعاع ناظمي للمستوي (P_2).

ب ـ كتابة معادلة للمستوي (P_2).

المستوي (P_2) له معادلة من الشكل $x+y+z+d=0$ ولدينا $B\in(P_2)$ تعني $0+4-1+d=0$ أي -3

aziz_mus1@hotmail.fr

وبالتالي $x+y+z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P_2).

3. نعتبر النقطتين C و D حيث: $C(6;1;5)$ و D معرّفة بـ: $\overrightarrow{CD}(0;-3;-6)$.

أ ـ تبيين أنّ المثلث ACD قائم في A

نضع $D(x';y';z')$ ومنه $\overrightarrow{CD}(x'-6;y'-1;z'-1)$ ولدينا $\overrightarrow{CD}(0;-3;-6)$ إذن $x'-6=0$ ، $y'-1=-3$ ، $z'-5=-6$ أي $x'=6$ ، $y'=-2$ و $z'=-1$ وعليه $D(6;-2;-1)$

لدينا $\overrightarrow{AC}(3;3;3)$ ، $\overrightarrow{AD}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=3\times3+3\times0+3(-3)=0$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AD}$ وبالتالي المثلث ACD قائم في A.

حساب مساحته.

$$S(ACD)=\frac{AC\times AD}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}ua$$

ب ـ تبيين أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (ACD).

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3\times3+6\times3-3\times3=0$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-3\times3+6\times0-3(-3)=0$ وهذا يعني $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي للمستوي (ACD) وبالتالي المستقيم (AB) يعامد المستوي (ACD)

جـ ـ حساب حجم رباعي الوجوه $ACDB$.

بما أن (AB) يعامد المستوي (ACD) فإن A هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (ACD)

وعليه $V(ABCD)=\frac{1}{3}S(ACD)\times AB=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times3\sqrt{6}=27uv$

تمرين 10 ☹

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ ، $C(6;-2;-1)$ ، $D(0;4;-1)$.

1) بيّن أنّ المثلث ABC قائم في A.

2) أكتب معادلة المستوي (P_1) الذي يشمل A ويعامد المستقيم (AC).

3) بيّن أنّ المستوي (P_2) ذا المعادلة: $x+y+z-3=0$ يشمل النقطة A ويعامد المستقيم (AB).

4) أ) أكتب معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها B ونصف قطرها $R=5\sqrt{3}$

ب) عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة L حيث $L=(S)\cap(P_2)$.

5) أ) احسب الجداءين السلميين الآتيين: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$ ، ثمّ استنتج أنّ المستقيم (AD) يعامد المستوي (ABC)

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل ☺

1) إثبات أنّ المثلث ABC قائم في A.

لدينا $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ و $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3(3)+0(3)+-3(3)=0$

أي أنّ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ وبالتالي المثلث ABC قائم في A.

2) معادلة المستوي (P_1) الذي يشمل A ويعامد المستقيم (AC).

بما أنّ $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ فإن المستوي (P_1) معادلته من الشكل: $3x-3z+d=0$ وبما أنّ (P_1) يشمل النقطة A فإنّ $3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$ وعليه $(P_1):3x-3z-3=0$.

3) إثبات أنّ المستوي (P_2) ذا المعادلة: $x+y+z-3=0$ يشمل النقطة A ويعامد المستقيم (AB).

لدينا $x_A+y_A+z_A-3=3-2+2-3=0$ ومنه (P_2) يشمل النقطة A .

ولدينا $\overrightarrow{n_{P_2}}(1;1;1)$ و $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ و $\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=\frac{3}{1}$ ومنه $\overrightarrow{n_{P_2}}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا إذن $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2) وبالتالي المستوي (P_2) يعامد المستقيم (AB).

4) أ) كتابة معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها B ونصف قطرها $R=5\sqrt{3}$

$(S):(x-6)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=75$.

ب) تعيين الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة L حيث $L=(S)\cap(P_2)$.

بُعد النقطة B عن المستوي (P_2) هو $d=\frac{|6+1+5-3|}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$.

و $d\prec 5\sqrt{3}$ وعليه (P_2) يقطع (S) في دائرة مركزها A المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P_2) ونصف قطرها r حيث $r^2+d^2=R^2$ ومنه $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{75-27}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

5) أ) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=0$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=0$.

ومنه الشعاع $\overrightarrow{AD}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وعليه الشعاع $\overrightarrow{AD}$ ناظمي للمستوي (ABC) وبالتالي المستقيم (AD) يعامد المستوي (ABC).

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

بما أنّ المستقيم (AD) يعامد المستوي (ABC) فإنّ A هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

وعليه حجم رباعي الوجوه $ABCD$ يعطى كما يلي $V=\frac{1}{3}S_{ABC}.AD$.

المثلث ABC قائم في A وبالتالي مساحته هي $S_{ABC}=\frac{AB.AC}{2}=\frac{3\sqrt{2}\times 3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}ua$

ولدينا $AD=3\sqrt{6}$ وعليه $V=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{6}=27uv$.

<u>تمرين 11</u>☹

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط:

$A(-1;2;1)$ ، $B(2;1;3)$ ، $C(0;-1;2)$.

ولتكن (P) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $AM=BM$.

1- بيّن أنّ (P) هو المستوي الذي معادلته $3x-y+2z-4=0$.

2- عيّن معادلة المستوي (Q) الذي يشمل A ويوازي (P).

3- أ) أُكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل C ويعامد (P).

ب) عيّن إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D).

جـ) احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D).

4- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (P') الذي يحوي المستقيم (AC) ويعامد المستوي (P)، ثمّ استنتج معادلة له.

الحل☺

1- إثبات أنّ (P) هو المستوي الذي معادلته $3x-y+2z-4=0$.

$AM=BM$ معناه $\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(y-3)^2}$

وتكافئ $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=(x-2)^2+(y-1)^2+(y-3)^2$

وبعد التبسيط نجد $3x-y+2z-4=0$ وبالتالي $3x-y+2z-4=0$ هي معادلة للمستوي (P).

2- تعيين معادلة المستوي (Q) الذي يشمل A ويوازي (P).

بما المستوي (Q) يوازي (P) فإنّ معادلته تكون من الشكل: $3x-y+2z+d=0$

وبما أنّ A نقطة من (Q) فإنّ $3(-1)-2+2(1)+d=0$ ومنه $d=3$

وعليه $3x-y+2z+3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q)

3- أ) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل C ويعامد (P).

لدينا $\vec{n}(3;-1;2)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P) وبما أنّ المستقيم (D) يعامد (P) فإنّ

الشعاع $\vec{n}(3;-1;2)$ يكون شعاع توجيه للمستقيم (D) ولدينا $C\in(D)$.

من أجل كل $M(x;y;z)$ من (D) لدينا: $\overrightarrow{CM}=t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي و $\overrightarrow{CM}(x;y+1;z-2)$.

ومنه $\begin{cases}x=3t\\y+1=-t\\z-2=2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=3t\\y=-1-t\\z=2+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

ب) تعيين إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D).

نحل الجملة $\begin{cases}x=3t..............(1)\\y=-1-t........(2)\\z=2+2t........(3)\\3x-y+2z+3=0.......(4)\end{cases}$.

وبتعويض كلا من (1) و (2) و (3) في (4) نجد: $3(3t)-(-1-t)+2(2+2t)+3=0$

ومنه $14t+8=0$ أي $t=-\frac{4}{7}$ إذن $\begin{cases}x=-\frac{12}{7}\\y=-\frac{3}{7}\\z=\frac{6}{7}\end{cases}$ إذن $E\left(-\frac{12}{7};-\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right)$.

جـ) حساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D).

لدينا المستقيم (D) يعامد المستوي (P) والمستويان (P) و (Q) متوازيان إذن (D) يعامد (Q).

ولدينا $A\in(Q)$ إذن المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) هي النقطة E نقطة تقاطع (Q) و (D).

وعليه المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي الطول AE.

$$AE=\sqrt{\left(-\frac{12}{7}+1\right)^2+\left(-\frac{3}{7}-2\right)^2+\left(\frac{6}{7}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{315}}{7}$$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

4- تعيين تمثيلا وسيطيا للمستوي (P') الذي يحوي المستقيم (AC) ويعامد المستوي (P).

لدينا (P') يحوي المستقيم (AC) إذن $\overrightarrow{AC}$ شعاع توجيه للمستوي (P').

ولدينا (P') يعامد المستوي (P) إذن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ الناظمي للمستوي (P) يكون شعاع توجيه ثان للمستوي (P') و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا.

وعليه من أجل كل $M(x;y;z)$ من (P') لدينا: $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}/\left((t,k)\in\mathbb{R}^2\right)$.

ومنه $\begin{cases}x=3t+k-1\\y=-t-3k+2\\z=2t+k+1\end{cases}$ حيث t و k عددان حقيقيان.

استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (P').

$$\begin{cases}x=3t+k-1..........(1)\\y=-t-3k+2........(2)\\z=2t+k+1..........(3)\end{cases}$$

من (1) نجد: $k=x-3t+1$ وبتعويض k بقيمتها في (2) و (3) نجد:

$y=-t-3(x-3t+1)+2$ و $z=2t+(x-3t+1)+1$ ومنه $\begin{cases}k=x-3t+1..........(4)\\y=-3x+8t-1.......(5)\\z=x-t+2............(6)\end{cases}$

من (6) نجد: $t=x-z+2$ وبتعويض t بقيمتها في (5) نجد: $y=-3x+8(x-z+2)-1$

وعليه $5x-y-8z+15=0$ هي معادلة للمستوي (P').

<u>تمرين 12</u>☹:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط:

$A(2;0;0)$، $B(0;1;0)$، $C(0;0;2)$.

1- بيّن أنّ النقط A، B و C ليست في استقامية.

2- جد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3- جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC).

4- (P) المستوي الذي معادلته $2x+2y+z-2=0$.

أ) بيّن أن (P) و (ABC) متقاطعان.

ب) بيّن أنّ النقطة B والنقطة C تنتميان إلى (P) ماذا تستنتج؟

5- عيّن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

<u>الحل</u>☺

1- إثبات أنّ النقط A، B و C ليست في استقامية.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;0;2)$ و $\frac{0}{1}\neq\frac{-2}{-2}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط A، B و C ليست في استقامية.

aziz_mus1@hotmail.fr

2- معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) إذن $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}-2a+b=0\\ -2a+2c=0\end{cases}$

ومنه $b=2a$ و $c=a$ نأخذ مثلا $a=1$ نجد $b=2$ و $c=1$ وعليه $\vec{n}(1;2;1)$.

إذن المستوي (ABC) له معادلة من الشكل $x+2y+z+d=0$ وبما أنّ A تنتمي للمستوي (ABC)

فإنّ $2+d=0$ ومنه $d=-2$ وبالتالي: $x+2y+z-2=0$ هي معادلة للمستوي (ABC)

3- تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC).

المستقيم (BC) شعاع توجيهه هو $\overrightarrow{BC}(0;-1;2)$.

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (BC) لدينا: $\overrightarrow{BM}=t\overrightarrow{BC}/t\in\mathbb{R}$ و $\overrightarrow{BM}=(x;y-1;z)$.

ومنه $\begin{cases}x=0\\ y-1=-t\\ z=2\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=0\\ y=1-t;(t\in\mathbb{R})\\ z=2\end{cases}$.

أ) إثبات أنّ (P) و (ABC) متقاطعان .

لدينا $\vec{n}(1;2;1)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) و $\vec{n}'(2;2;1)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P).

$\frac{2}{2}\neq\frac{2}{1}$ إذن إحداثيات الشعاعين $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير متناسبة ومنه الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا

وبالتالي المستويان (P) و (ABC) متقاطعان.

ب) إثبات أنّ النقطة B والنقطة C تنتميان إلى (P).

بتعويض إحداثيات النقطتين B و C في المستوي (P) نجد:

$2(0)+2(1)+0-2=0$ ومنه النقطة B تنتمي للمستوي (P).

$2(0)+2(0)+2-2=0$ ومنه النقطة C تنتمي للمستوي (P).

بما أنّ النقطتين B و C تنتميان للمستوي (P) فإنّ (BC) محتوى في المستوي (P)

وكذلك المستقيم (BC) محتوى في المستوي (ABC).

نتيجة: المستويان (P) و (ABC) يتقاطعان في المستقيم (BC).

5- تعيين مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

لتكن النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC

لدينا من أجل كل نقطة M من الفضاء $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

و $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|$.

أي $3MG=\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|$ ولدينا $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;0;2)$.

ومنه $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)(-4;1;2)$ وعليه $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{(-4)^2+1+2^2}=\sqrt{21}$.

ومنه $3MG=\sqrt{21}$ أي $MG=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

وبالتالي مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزها النقطة G وطول نصف قطرها $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

تمرين 13☹

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط: $A(1;4;1)$، $B(0;2;1)$ و $C(1;6;0)$.

1- أ ـ بيّن أنّ النقط A، B و C ليست في استقامية.

ب ـ أُكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2- ليكن سطح الكرة (S) التي مركزها $\omega(1;1;1)$ ونصف قطرها 3.

أ ـ أُكتب معادلة سطح الكرة (S).

ب ـ أُحسب $d\left(\omega;(ABC)\right)$.

3- عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من ω والعمودي على (ABC).

4- بيّن أنّ المستوي (ABC) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C)، عيّن مركزها ونصف قطرها.

الحل☺

1- أ ـ إثبات أنّ النقط A، B و C ليست في استقامية.

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(0;2;-1)$ و $\frac{2}{-2}\neq\frac{0}{1}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A، B و C ليست في استقامية.

ب ـ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) إذن $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}-a-2b=0.......(1)\\ 2b-c=0.........(2)\end{cases}$

وهي جملة معادلتين بثلاث مجاهيل فهي تقبل عدد غير منته من الحلول.

من (2) نجد $c=2b$ ومن (1) نجد $a=-2b$ وعليه $\vec{n}(-2b;b;2b)$ نأخذ مثلا $b=1$ ومنه $\vec{n}(-2;1;2)$.

ومنه معادلة المستوي (ABC) من الشكل $-2x+y+2z+d=0$ وبما أنّ B نقطة من (ABC) فإنّ $2+2+d=0$ ومنه $d=-4$ وعليه $(ABC):-2x+y+2z-4=0$.

2- ليكن سطح الكرة (S) التي مركزها $\omega(1;1;1)$ ونصف قطرها 3.

أ ـ كتابة معادلة سطح الكرة (S).

إذا كانت $M(x;y;z)$ تنتمي لـ (S) فإنّها تحقق $\omega M=3$.

$\omega M=3$ معناه $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$.

ب ـ حساب $d\left(\omega;(ABC)\right)$.

$d\left(\omega;(ABC)\right)=\frac{|-2(1)+1+2(1)-4|}{3}$ ومنه $d\left(\omega;(ABC)\right)=\frac{|-3|}{3}=1$.

3- تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من ω والعمودي على (ABC).

بما أنّ (Δ) عمودي على المستوي (ABC) فإنّ $\vec{n}(-2;1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (Δ) لدينا: $\overrightarrow{\omega M}=t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

ومنه $\begin{cases}x-1=-2t\\ y-1=t\\ z-1=2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=1-2t\\ y=1+t\\ z=1+2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

4- إثبات أنّ المستوي (ABC) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C).

لدينا نصف قطر سطح الكرة (S) هو $R=3$ و $d(\omega;(ABC))=1$ ومنه

$d(\omega;(ABC))\prec R$ وبالتالي (ABC) و (S) متقاطعان في دائرة (C) مركزها H

المسقط العمودي للنقطة ω على المستوي (ABC) ونصف قطرها r.

حسب نظرية فيتاغورث $R^2=r^2+d^2$ ومنه $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{3}$.

H المسقط العمودي للنقطة ω على المستوي (ABC) إذن هي نقطة تقاطع (Δ) و (ABC).

نحل الجملة $\begin{cases} x=1-2t \\ y=1+t \\ z=1+2t \\ -2x+y+2z-4=0 \end{cases}$ وعليه $-2(1-2t)+1+t+2(1+2t)-4=0$

ومنه $9t-3=0$ أي $t=\dfrac{1}{3}$ وعليه $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{4}{3} \\ z=\dfrac{5}{3} \end{cases}$ بالتالي $H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

إذن (ABC) و (S) يتقاطعان وفق دائرة (C) مركزها H ونصف قطرها $2\sqrt{3}$.

تمرين 14☹ بكالوريا علوم تجريبية 2011

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(0;1;5)$ ، $B(2;1;7)$ و $C(3;-3;6)$.

1- أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له.

ب) تحقق أنّ النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ) بيّن أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د) استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

2- نعتبر النقطة $M(2+t;1-4t;7-t)$ حيث t عدد حقيقي .

ولتكن الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $h(t)=AM$.

أ) اكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي t: $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$.

ج) استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر مايمكن.

- قارن بين القيمة الصغرى للدالة h والمسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

الحل☺

1- أ) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M(x;y;z)$ تنتمي لـ (Δ) معناه $\overrightarrow{BM}=k\vec{u}$ حيث k عدد حقيقي و $\overrightarrow{BM}(x-2;y-1;z-7)$

و $k\vec{u}(k;-4k;-k)$ ومنه $\overrightarrow{BM}=k\vec{u}$ معناه $\begin{cases} x-2=k \\ y-1=-4k\ ;k\in\mathbb{R} \\ z-7=-k \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=2+k \\ y=1-4k\ ;k\in\mathbb{R} \\ z=7-k \end{cases}$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ب) التحقق أنّ النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

C تنتمي إلى (Δ) معناه $\begin{cases}3=2+k\\-3=1-4k\\6=7-k\end{cases}$ وعليه $\begin{cases}k=1\\k=1\\k=1\end{cases}$.

k وحيد إذن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

جـ) إثبات أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

لدينا $\overrightarrow{AB}(2;0;2)$ و $\overrightarrow{BC}(1;-4;-1)$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=2(1)+0(-4)+2(-1)=2-2=0$.

وبالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د) استنتاج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

لدينا $B\in(\Delta)$ و $C\in(\Delta)$ إذن (Δ) هو المستقيم (BC).

ولدينا $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ وهذا يعني أنّ B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

أي B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ).

وعليه فإنّ المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ) هي AB.

$d(A;(\Delta))=AB=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

2- أ) كتابة عبارة $h(t)$ بدلالة t.

$AM=\sqrt{(2+t)^2+((1-4t)-1)^2+((7-t)-5)^2}$ ومنه $AM=\sqrt{8+18t^2}$.

أي أنّ $h(t)=\sqrt{8+18t^2}$.

ب) إثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي t: $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$.

الدّالة h تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $h'(t)=\dfrac{36t}{2\sqrt{8+18t^2}}$ أي $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{8+18t^2}}$.

ج) استنتاج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن.

$h'(0)=0$ ومنه الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى عند القيمة $t=0$ وهي $h(0)=2\sqrt{2}$.

ومنه المسافة AM تكون أصغر مايمكن من أجل $t=0$.

المقارنة بين القيمة الصغرى للدالة h والمسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

$h(0)=2\sqrt{2}$ و $d(A;(\Delta))=2\sqrt{2}$ وعليه $d(A;(\Delta))=h(0)$.

<u>تمرين 15</u>☹

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(2;1;3)$ ، $B(-3;-1;7)$ ، $C(3;2;4)$ و $D(0;2;0)$.

1- بيّن أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا.

2- (Δ) مستقيم معرّف بتمثيله الوسيطي $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}$.

أ ـ بيّن أنّ (Δ) يعامد المستوي (ABC)، ثمّ أُكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

ب ـ تحقّق أنّ النقطة D لا تنتمي للمستقيم (Δ)، ثمّ عيّن إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D

على المستقيم (Δ).

جـ - أُحسب المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ).

3- بيّن أنّ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقّق:

$(3x+y+2z-1)^2-(x+4y+z+3)^2=0$ هي إتحاد مستويين أحدهما المستوي (ABC).

الحل☺

1- إثبات أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-5;-2;4)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$.

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا معناه $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ ومنه $\begin{cases}-5=k\\-2=k\\4=k\end{cases}$ لا يمكن إيجاد k.

إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقلان خطيا ومنه النقط A ، B و C ليست في استقامية فهي تعيّن مستويا.

2- (Δ) مستقيم معرّف بتمثيله الوسيطي $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}$.

أ - إثبات أنّ (Δ) يعامد المستوي (ABC).

لدينا $\vec{u}(2;-3;1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

ولدينا $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=2(-5)-3(-2)+4=-10+6+4=0$

و $\vec{u}.\overrightarrow{AC}=2(1)-3(1)+1=2-3+1=0$.

ومنه الشعاع $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وعليه $\vec{u}$ يعامد المستوي (ABC)

وبالتالي المستقيم (Δ) يعامد المستوي (ABC).

كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

لدينا $\vec{u}(2;-3;1)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC).

من أجل كل $M(x;y;z)$ من المستوي (ABC) لدينا $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$ و $\overrightarrow{AM}(x-2;y-1;z-3)$.

ومنه $2(x-2)-3(y-1)+(z-3)=0$ أي $2x-3y+z-4=0$ هي معادلة للمستوي (ABC).

ب - التحقّق أنّ النقطة D لا تنتمي للمستقيم (Δ).

نفرض أن D تنتمي للمستقيم (Δ) إذن $\begin{cases}0=-7+2t\\2=-3t\\0=4+t\end{cases}$ أي $\begin{cases}t=\dfrac{7}{2}\\t=-\dfrac{2}{3}\\t=-4\end{cases}$ تناقض.

بالتالي النقطة D لا تنتمي للمستقيم (Δ).

تعيين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (Δ).

H المسقط العمودي للنقطة D على (Δ) إذن $\vec{u}.\overrightarrow{DH}=0$

H تنتمي للمستقيم (Δ) ومنه $H(-7+2t;-3t;4+t)$ و $\overrightarrow{DH}(-7+2t;-3t-2;4+t)$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ولدينا $\vec{u}(2;-3;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

$\vec{u}.\overrightarrow{DH}=0$ معناه $2(-7+2t)-3(-3t-2)+4+t=0$ أي $14t-4=0$ ومنه $t=\frac{2}{7}$.

وعليه $H\left(-7+2\left(\frac{2}{7}\right);-3\left(\frac{2}{7}\right);4+\frac{2}{7}\right)$ أي $H\left(-\frac{45}{7};-\frac{6}{7};\frac{30}{7}\right)$.

3- إثبات أنّ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقّق:

$(3x+y+2z-1)^2-(x+4y+z+3)^2=0$ هي إتحاد مستويين أحدهما المستوي (ABC).

$(3x+y+2z-1)^2-(x+4y+z+3)^2=0$ تعني

$[(3x+y+2z-1)+(x+4y+z+3)][(3x+y+2z-1)-(x+4y+z+3)]=0$

أي $(4x+5y+3z-2)(2x-3y+z-4)=0$

ومنه $2x-3y+z-4=0$ أو $x+5y+3z-2=0$.

إذن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تُحقّق:

$(3x+y+2z-1)^2-(x+4y+z+3)^2=0$ هي إتحاد مستويين أحدهما المستوي (ABC).

تمرين 16☹

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(1;4;3)$، $B(0;2;2)$ و $C(1;-1;1)$ والمستوي (P) الذي معادلته $x-3y-2z+3=0$.

أ - تحقق أنّ $\begin{cases}x=1+t\\y=4+2t\\z=3+t\end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) حيث t عدد حقيقي.

ب - أثبت أنّ (AB) يقطع المستوي (P)، ثمّ عيّن H إحداثيات نقطة تقاطعهما.

جـ - تحقق أنّ النقط A، B و C ليست في استقامية وأنّ $\vec{n}(1;2;-5)$ ناظم للمستوي (ABC).

د - عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

- بيّن أنّ (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

- (S) سطح كرة معادلتها: $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-1=0$.

أ - عيّن ω مركز (S) ونصف قطرها.

ب - أُحسب المسافة بين النقطة ω والمستوي (P)، ثمّ استنتج تقاطع (P) و (S).

الحل☺

أ - التحقق أنّ $\begin{cases}x=1+t\\y=4+2t\\z=3+t\end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (AB).

$\begin{cases}1=1+t\\4=4+2t\\3=3+t\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}t=0\\t=0\\t=0\end{cases}$ t وحيد ومنه النقطة A تنتمي للمستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=1+t\\y=4+2t\\z=3+t\end{cases}$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ولدينا $\overrightarrow{AB}$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\vec{v}(1;2;1)$ ومنه $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 4+2t \\ z = 3+t \end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (AB).

ب ـ إثبات أنّ (AB) يقطع المستوي (P).

لدينا $\vec{u}(1;-3;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\overrightarrow{AB}(-1;-2;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB).

و $\vec{u}.\overrightarrow{AB} = -1-3(-2)-2(-1) = 7$ وهذا يعني أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير متعامدين

ومنه (AB) يقطع المستوي (P).

تعيين H إحداثيات نقطة تقاطعهما.

إحداثيات النقطة H معرّفة بالجملة $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 4+2t \\ z = 3+t \\ x-3y-2z+3=0 \end{cases}$.

وعليه $1+t-3(4+2t)-2(3+t)+3=0$ أي $-7t-14=0$ ومنه $t=-2$

إذن $\begin{cases} x = 1-2 \\ y = 4+2(-2) \\ z = 3-2 \end{cases}$ أي $H(-1;0;1)$.

جـ ـ تحقق أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية.

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0;-5;-2)$ و $\frac{-5}{-2} \neq \frac{0}{-1}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A ، B و C ليست في استقامية.

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = -1+2(-2)-5(-1) = -5+5 = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0+2(-5)-5(-2) = -10+10 = 0$.

الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ومنه $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (ABC).

د ـ تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستوي (ABC) فإنّها تُحقق $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ مع $\overrightarrow{AM}(x-1;y-4;z-3)$.

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ معناه $(x-1)+2(y-4)-5(z-3)=0$

ومنه $x+2y-5z+6=0$ هي معادلة للمستوي (ABC).

ـ إثبات أنّ (P) و (ABC) متقاطعان.

لدينا $\vec{n}(1;2;-5)$ هو شعاع ناظم للمستوي (ABC) و $\vec{u}(1;-3;-2)$ شعاع ناظم للمستوي (P) و

$\frac{-3}{2} \neq \frac{1}{1}$ ومنه الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي (P) و (ABC) متقاطعان.

تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

إذا كانت $M \in (\Delta)$ فإنّ إحداثياتها تحقق الجملة $\begin{cases} x-3y-2z+3=0 ....(1) \\ x+2y-5z+6=0 ....(2) \end{cases}$

بطرح (1) من (2) نجد $5y-3z+3=0$ ومنه $y = \frac{3}{5}z - \frac{3}{5}$.

بالتعويض في (1) نجد $x-3\left(\frac{3}{5}z-\frac{3}{5}\right)-2z+3=0$ ومنه $5x-9z+9-10z+15=0$

ومنه $5x-19z+24=0$ وعليه $x=\frac{19}{5}z-\frac{24}{5}$.

بوضع $z=5t$ نجد $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=19t-\frac{24}{5} \\ y=3t-\frac{3}{5} \\ z=5t \end{cases}$.

أ ـ تعيين ω مركز (S) ونصف قطرها.

$x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-1=0$ تكافئ $(x-1)^2-1+(y+1)^2-1+(z-1)^2-1-1=0$

وتكافئ $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$.

إذن مركز (S) هو النقطة $\omega(1;-1;1)$ ونصف قطرها $R=2$.

ب ـ حساب المسافة بين النقطة ω والمستوي (P).

$d=\frac{|1-3(-1)-2(1)+3|}{\sqrt{1+9+4}}=\frac{5}{\sqrt{14}}$.

استنتاج تقاطع (P) و (S).

$d\prec R$ ومنه (P) يقطع (S) في دائرة مركزها I المسقط العمودي للنقطة ω على المستوي (P) ونصف قطرها r.

حسب نظرية فيثاغورث $r^2+d^2=R^2$ ومنه $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{4-\frac{25}{14}}=\sqrt{\frac{31}{14}}$.

<u>تمرين 17</u>☹ <u>بكالوريا تقني رياضي 2013</u>

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط:

$A(3;-2;-1)$، $B(5;-3;2)$ ، $C(2;3;2)$ و $D(1;-5;-2)$.

1) بيّن أنّ النقط A، B و C تعيّن مستويا ؛ نرمز له بالرمز (P).

2) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;1;-1)$ ناظمي للمستوي (P)، ثمّ جد معادلة ديكارتية للمستوي (P).

3) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D ويعامد (P).

ب) عيّن احداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P).

4) H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB)، و λ عدد حقيقي حيث: $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

أ) بيّن أنّ: $\lambda=\frac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$.

ب) استنتج العدد الحقيقي λ وإحداثيات النقطة H، ثمّ المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB).

<u>الحل</u>☺

1) **إثبات أنّ النقط A، B و C تعيّن مستويا.**

$\overrightarrow{AB}(2;-1;3)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;5;3)$ و $\frac{-1}{2}\neq\frac{5}{-1}$ ومنه إحداثيات الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متناسبة

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

أي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

2) إثبات أنّ الشعاع $\vec{n}(2;1;-1)$ ناظمي للمستوي (P).

لدينا $\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2(2)+1(-1)-1(3)=0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2(-1)+1(5)-1(3)=0 \end{cases}$

ومنه الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وعليه فإنّ الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (ABC).

معادلة ديكارتية للمستوي (P).

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من (P) لدينا: $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ مع $\overrightarrow{AM}(x-3;y+2;z+1)$.

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ معناه $2(x-3)+(y+2)-(z+1)=0$ ومنه $2x+y-z-5=0$ هي معادلة للمستوي (P).

3) أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D ويعامد (P).

بما أنّ (Δ) يعامد (P) فإنّ $\vec{n}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) ولدينا $D\in(\Delta)$.

لتكن $M(x;y;z)$ من المستقيم (Δ) فإنّها تُحقق: $\overrightarrow{DM}=t\vec{n}/t\in\mathbb{R}$ مع $\overrightarrow{DM}=(x-1;y+5;z+2)$.

ومنه $\begin{cases} x-1=2t \\ y+5=t \\ z+2=-t \end{cases}$ أي $(\Delta):\begin{cases} x=1+2t \\ y=-5+t \\ z=-2-t \end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

ب) تعيين إحداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P).

إحداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) هي نقطة تقاطع المستقيم العمودي على (P) والمار من النقطة D مع المستوي (P) أي هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P).

نحل الجملة $\begin{cases} x=1+2t.............(1) \\ y=-5+t............(2) \\ z=-2-t............(3) \\ 2x+y-z-5=0..........(4) \end{cases}$

نعوض كل من x و y و z من (1) و (2) و (3) بقيمهما في (4) نجد:

$2(1+2t)+(-5+t)-(-2-t)-5=0$ ومنه $6t-6=0$ أي $t=1$.

ومنه $\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=-3 \end{cases}$ إذن $E(3;-4;-3)$.

4) أ) إثبات أنّ: $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}$.

لدينا H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB) ومنه $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$

ولدينا $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}$ إذن $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ ومنه $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}$.

ب) استنتاج العدد الحقيقي λ.

$\overrightarrow{AD}(-2;-3;-1)$ و $\overrightarrow{AB}(2;-1;3)$ ومنه $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=2(-2)-1(-3)+3(-1)=-4$

aziz_mus1@hotmail.fr

و $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{14}$ إذن $\lambda=\frac{-4}{14}=-\frac{2}{7}$.

إحداثيات النقطة H.

نضع $H(x';y';z')$.

لدينا $\lambda\overrightarrow{AB}(2\lambda;-\lambda;3\lambda)$ و $\overrightarrow{AH}(x'-3;y'+2;z'+1)$ وعليه $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}$ معناه

$x'-3=2\lambda$ و $y'+2=-\lambda$ و $z'+1=3\lambda$ ومنه $x'=2\lambda+3$ و $y'=-\lambda-2$ و $z'=3\lambda-1$.

وبما أنّ $\lambda=-\frac{2}{7}$ فإنّ: $x'=\frac{17}{7}$ و $y'=-\frac{12}{7}$ و $z'=-\frac{13}{7}$ إذن $H\left(\frac{17}{7};-\frac{12}{7};-\frac{13}{7}\right)$.

المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB).

$d(D;(AB))=DH=\frac{3\sqrt{70}}{7}$.

<u>تمرين 18</u>☹ <u>بكالوريا علوم تجريبية 2014</u>

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1;-1;-2)$ ، $B(1;-2;-3)$ و $C(2;0;0)$.

1) أ) برهن أنّ A، B و C ليست في استقامية.

ب) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC).

جـ) تحقق أنّ $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرّفين بمعادلتيهما كما يلي:

$(P):x-y-2z+5=0$ و $(Q):3x+2y-z+10=0$.

برهن أنّ (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي $\begin{cases}x=t-3\\y=-t\\z=t+1\end{cases};(t\in\mathbb{R})$

3) عيّن تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q).

4) لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

نسمي $d(M,(P))$ المسافة بين M والمستوي (P) و $d(M,(Q))$ المسافة بين M والمستوي (Q)

عيّن المجموعة (Γ) للنقط M حيث: $\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$.

<u>الحل</u>☺

1) أ) إثبات أنّ A، B و C ليست في استقامية.

لدينا $\overrightarrow{AB}(0;-1;-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(1;1;2)$ و $\frac{2}{-1}\neq\frac{1}{-1}$ إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ الشعاعان غير مرتبطين خطيا ومنه A، B و C ليست في استقامية.

ب) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(ABC)$ معناه $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

ومنه $\begin{cases}x-1=\beta\\y+1=-\alpha+\beta\\z+2=-\alpha+2\beta\end{cases};(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ أي $\begin{cases}x=\beta+1\\y=-\alpha+\beta-1\\z=-\alpha+2\beta-2\end{cases};(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

جـ) التحقق أنّ $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

$x_A+y_A-z_A-2=1-1+2-2=0$ ، $x_B+y_B-z_B-2=1-2+3-2=0$ ،

aziz_mus1@hotmail.fr

$x_C+y_C-z_C-2=2+0-0-2=0$ ومنه إحداثيات النقط A، B و C تحقق المعادلة $x+y-z-2=0$

وعليه $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

طريقة 2: بما أنّ $(\beta+1)+(-\alpha+\beta-1)-(-\alpha+2\beta-2)-2=0$ فإنّ $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

إثبات أنّ (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=t-3 \\ y=-t \\ z=t+1 \end{cases};(t\in\mathbb{R})$

$(t-3)-(-t)-2(t+1)+5=0$ ومنه (Δ) محتوى في المستوي (P)

$3(t-3)+2(-t)-(t+1)+10=0$ ومنه (Δ) محتوى في المستوي (Q)

إذن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ)

3) تعيين تقاطع المستويات (ABC)، (P) و (Q).

بما أنّ $(P)\cap(Q)=(\Delta)$ فإنّ $(ABC)\cap(P)\cap(Q)=(ABC)\cap(\Delta)$.

نحل الجملة $\begin{cases} x=t-3 \\ y=-t \\ z=t+1 \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$ وعليه $t-3-t-t-1-2=0$ ومنه $t=-6$ إذن $\begin{cases} x=-9 \\ y=6 \\ z=-5 \end{cases}$

وعليه $(ABC)\cap(P)\cap(Q)=\{I(-9;6;-5)\}$.

تعيين المجموعة (Γ) للنقط M حيث: $\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$.

$\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$ معناه $\sqrt{6}\times\frac{|x-y-2z+5|}{\sqrt{6}}=\sqrt{14}\times\frac{|3x+2y-z+10|}{\sqrt{14}}$

وتكافئ $|x-y-2z+5|=|3x+2y-z+10|$ وتكافئ $x-y-2z+5=3x+2y-z+10$ أو

$x-y-2z+5=-3x-2y+z-10$ أي $2x+3y+z+5=0$ أو $4x+y-3z+15=0$

إذن (Γ) هي اتحاد مستويين (P_1) و (P_2) حيث $(P_1):2x+3y+z+5=0$ و $(P_2):4x+y-3z+15=0$.

تمرين 19 ☹ بكالوريا تقني رياضي 2011

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط A، B، C و D حيث:

$A(2;0;1)$، $B(3;-2;0)$، $C(2;8;-4)$ و $D(3;5;3)$.

1. بيّن أنّ النقط A، B، D تعيّن مستويا.
2. بيّن أنّ المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD).
3. H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

أ - بيّن أنّ المستقيم (AB) يعامد المستوي (CDH).

ب - عيّن معادلة للمستوي (CDH) واكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

جـ - استنتج إحداثيات النقطة H.

4. أُحسب الأطوال DH، CD، AB، ثمّ أُحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل ☺

1. **إثبات أنّ النقط A، B، D تعيّن مستويا.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(1;-2;-1)$ و $\overrightarrow{AD}(1;5;2)$ و $\frac{1}{1}\neq\frac{5}{-2}$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطين خطيا

aziz_mus1@hotmail.fr

فإنّ النقط A ، B ، D ليست على استقامة واحدة فهي تعيّن مستويا.

2. **إثبات أنّ المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD).**

لدينا $\overrightarrow{CD}(1;-3;7)$ ومنه $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}=1(1)-3(-2)+7(-1)=0$

و $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}=1(1)-3(5)+7(2)=0$.

ومنه الشعاع $\overrightarrow{CD}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ وعليه $\overrightarrow{CD}$ يعامد المستوي (ABD) وبالتالي المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD).

3. **أ - إثبات أنّ المستقيم (AB) يعامد المستوي (CDH).**

لدينا H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) ومنه $\overrightarrow{AB}$ يعامد $\overrightarrow{CH}$.

ولدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=1(1)-3(-2)+7(-1)=0$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ يعامد $\overrightarrow{CD}$.

وبالتالي فإنّ المستقيم (AB) يعامد المستوي (CDH).

ب - تعيين معادلة للمستوي (CDH).

لدينا $\overrightarrow{AB}$ شعاعا ناظميا للمستوي (CDH) ومنه فإنّ المستوي (CDH) له معادلة من الشّكل $x-2y-z+d=0$ وبما أنّ D مثلا تنتمي للمستوي (CDH) فإنّ $3-2(5)-3+d=0$

ومنه $d=10$ وعليه معادلة المستوي (CDH) هي: $x-2y-z+10=0$.

التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB).

من أجل كل $M(x;y;z)$ من (AB) لدينا: $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ حيث t عدد حقيقي.

و $\overrightarrow{AM}(x-2;y;z-1)$ ومنه $\begin{cases} x-2=t \\ y=-2t \\ z-1=-t \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=2+t \\ y=-2t \;;t\in\mathbb{R} \\ z=1-t \end{cases}$.

جـ - استنتاج إحداثيات النقطة H.

بما أنّ H تنتمي للمستقيم (AB) وتنتمي للمستوي (CDH) فإنّها تمثل نقطة تقاطع (AB) و (CDH).

H تنتمي لـ(AB) معناه $H(2+t;-2t;1-t)$ ولدينا H تنتمي للمستوي (CDH)

إذن $x_H-2y_H-z_H+10=0$ ومنه $t+2-2(-2t)-(-t+1)+10=0$ ومنه $t=-\frac{11}{6}$

وعليه $H\left(2-\frac{11}{6};-2\left(\frac{-11}{6}\right);\frac{11}{6}+1\right)$ أي $H\left(\frac{1}{6};\frac{11}{3};\frac{17}{6}\right)$.

4. **حساب الأطوال** DH ، CD ، AB.

$AB=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$ ، $CD=\sqrt{1^2+(-3)^2+7^2}=\sqrt{59}$

$DH=\sqrt{\left(\frac{1}{6}-3\right)^2+\left(\frac{11}{3}-5\right)^2+\left(\frac{17}{6}-3\right)^2}=\frac{\sqrt{354}}{6}$.

حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

حجم رباعي الوجوه يعطى $\frac{1}{3}\times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع.

فإنّ $V=\frac{1}{3}S_{ABD}\times d$ ، حيث S_{ABD} مساحة المثلث ABD و d هو بُعد النقطة C على المستوي (ABD)

بما أنّ المستقيم (AB) يعامد المستوي (CDH) فإنّ المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB)

هي النقطة H نقطة تقاطع (AB) والمستوي (CDH) وعليه $S_{ABD}=\dfrac{AB.DH}{2}$.

وبما أنّ المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD) فإنّ النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (ABD) أي $d=CD$.

وعليه $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{AB.DH}{2}\times CD=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{59}}{2}\times\sqrt{59}=\dfrac{59}{6}uv$.

تمرين 20☹

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط: $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$.

الجزء الأوّل:

1. بيّن أنّ المثلث ABC قائم.
2. ليكن (P) المستوي الذي معادلته $x+y+z-3=0$.
   - بيّن أنّ (P) عمودي على (AB) ويمر من النقطة A .
3. ليكن (P') المستوي العمودي على (AC) والذي يمر من A .
   - عيّن معادلة ديكارتية لـ(P') .
4. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و(P').

الجزء الثاني:

1. لتكن النقطة $D(0;4;-1)$ ، بيّن أنّ المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).
2. احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.
3. بيّن أنّ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هي $\dfrac{\pi}{4}Rad$.
4. أ ـ احسب مساحة المثلث BDC .

   ب ـ استنتج المسافة بين A والمستوي (BDC).

الحل☺

الجزء الأوّل:

1. **إثبات أنّ المثلث ABC قائم .**

لدينا $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ و $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3(3)+3(0)+3(-3)=0$ ومنه المثلث ABC قائم في A .

2. ليكن (P) المستوي الذي معادلته $x+y+z-3=0$.

إثبات أنّ (P) عمودي على (AB) ويمر من النقطة A .

لدينا $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) ولدينا $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا إذن $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) وبالتالي (P) عمودي على (AB).

ولدينا $x_A+y_A+z_A-3=3-2+2-3=0$ إذن المستوي (P) يمر من النقطة A .

3. ليكن (P') المستوي العمودي على (AC) والذي يمر من A .

تعيين معادلة ديكارتية لـ(P').

بما أنّ (P') عمودي على (AC) فإنّ $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P') إذن المستوي (P') معادلته من الشكل $3x-3z+d=0$ ولدينا A نقطة من (P') يعني $3x_A-3z_A+d=0$ أي $3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$ وبالتالي $(P'):3x-3z-3=0$.

4. **تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (P').**

المستقيم (Δ) معرّف بالجملة التالية: $\begin{cases} x+y+z-3=0......(1) \\ 3x-3z-3=0........(2) \end{cases}$.

بضرب المعادلة (1) بالعدد 3 وبجمع المعادلتين نجد $6x+3y-12=0$ ومنه $y=4-2x$.

وبتعويض قيمة y في المعادلة (1) نجد $x+(4-2x)+z-3=0$ ومنه $z=x-1$.

وبوضع $x=t$ نجد $(\Delta):\begin{cases} x=t \\ y=4-2t\,;(t\in\mathbb{R}) \\ z=-1+t \end{cases}$.

الجزء الثاني:

1. **إثبات أنّ المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).**

لدينا $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ و $\begin{cases} \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=0 \\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=0 \end{cases}$.

ومنه الشعاع $\overrightarrow{AD}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وعليه $\overrightarrow{AD}$ يعامد المستوي (ABC) وبالتالي المستقيم (AD) يعامد المستوي (ABC).

2. **حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.**

بما أنّ المستقيم (AD) يعامد المستوي (ABC) فإنّ النقطة A هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) أي $d(D;(ABC))=AD$.

وعليه $V=\frac{1}{3}S_{ABC}.AD$ حيث S_{ABC} هي مساحة المثلث القائم ABC.

$AB=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=3\sqrt{3}$ ، $AC=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$.

$S_{ABC}=\frac{AB.AC}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ و $AD=\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(-3)^2}=3\sqrt{6}$.

وبالتالي $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{6}=27uv$.

3. **تبيين أنّ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هي $\frac{\pi}{4}Rad$.**

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}=DC\times DB\times\cos\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB}\right)$ ومنه $\cos\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB}\right)=\frac{\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}}{DC.DB}$

$\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$ و $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ ومنه $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}=6(6)-3(-6)+6(0)=54$

ولدينا $DC\times DB=54\sqrt{2}$ ومنه $\cos\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB}\right)=\frac{54}{54\sqrt{2}}$ أي $\cos\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DB}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

وهذا يعني أنّ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}Rad$.

4. أ **- حساب مساحة المثلث** BDC.

$S_{BCD}=\frac{1}{2}DC\times DB\times\sin\widehat{BDC}=\frac{1}{2}54\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27ua$.

aziz_mus1@hotmail.fr

ب ـ استنتاج المسافة بين A والمستوي (BDC).

لدينا $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}\times d$ حيث d هي المسافة بين A والمستوي (BDC).

ومنه $27=\frac{1}{3}(27)\times d$ وعليه $d=3$ إذن المسافة بين A والمستوي (BDC) هي 3.

تمرين 21☹

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطة $A(2;0;2)$

والمستوي (P) ذو المعادلة: $x+y-z-3=0$.

1- حدّد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من A والعمودي على المستوي (P).

2- حدّد إحداثيات B نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و (P).

3- نعتبر السطح (S) الذي مركزه النقطة A والذي يتقاطع مع المستوي (P) وفق الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها 2.

أ ـ حدّد نصف قطر سطح الكرة (S).

ب ـ أكتب معادلة ديكارتية للسطح (S).

الحل☺

1- تحديد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من A والعمودي على المستوي (P).

لدينا $\vec{n}(1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) وبما أنّ (Δ) عمودي على (P) فإنّ $\vec{n}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

لتكن $M(x;y;z)$ من (Δ) ومنه $\overrightarrow{AM}=t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

ومنه $\begin{cases} x-2=t \\ y=t \\ z-2=-t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases} x=2+t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$.

2- تحديد إحداثيات B نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و (P).

نحل الجملة $\begin{cases} x=2+t \\ y=t \\ z=2-t \\ x+y-z-3=0 \end{cases}$ وعليه $(2+t)+t-(2-t)-3=0$ ومنه $t=1$.

إذن $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ وعليه $B(3;1;1)$.

أ ـ تحديد نصف قطر سطح الكرة (S).

ليكن R نصف قطر سطح الكرة (S)، حسب نظرية فيتاغورث

$R^2=AB^2+2^2=3+4=7$ ومنه $R=\sqrt{7}$.

ب ـ معادلة ديكارتية للسطح (S).

معادلة السطح (S) هي: $(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=7$.

تمرين 22☹ بكالوريا علوم تجريبية 2014

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط:

$A(2;-1;1)$ ، $B(-1;2;1)$ ، $C(1;-1;2)$ و $D(1;1;1)$.

1) أ) تحقق أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

جـ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

أ) احسب احداثيات النقطة G .

ب) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$.

بيّن أنّ (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

جـ) اكتب معادلة ديكارتية لـ (Γ) .

3) بيّن أنّ (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

الحل☺

1) أ) التحقق أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;3;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$ و $\frac{0}{3}\neq\frac{-1}{-3}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب) تبيين أنّ الشعاع $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1(-3)+1(3)+1(0)=-3+3=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=1(-1)+1(0)+1(1)=-1+1=0$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC) .

جـ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

معادلة المستوي (ABC) من الشكل $x+y+z+d=0$ وبما أنّ A تنتمي للمستوي (ABC) فإنّ $2-1+1+d=0$

ومنه $d=-2$ وعليه معادلة المستوي (ABC) هي $x+y+z-2=0$.

2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

أ) حساب احداثيات النقطة G .

$$x_G=\frac{x_A+2x_B-x_C}{2}=\frac{2-2-1}{2}=\frac{-1}{2} \text{ ، } y_G=\frac{y_A+2y_B-y_C}{2}=\frac{-1+4-1}{2}=2$$

$z_G=\frac{z_A+2z_B-z_C}{2}=\frac{1+2-2}{2}=\frac{1}{2}$ وعليه $G\left(-\frac{1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$.

ب) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$.

تبيين أنّ (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

لدينا G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$ ومنه $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(1+2-1)\overrightarrow{MG}$

أي $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$

$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ معناه $\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ وتكافئ $2MG=2MD$ أي $MG=MD$

إذن (Γ) هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

aziz_mus1@hotmail.fr

جـ) كتابة معادلة ديكارتية لـ (Γ).

لتكن I منتصف القطعة $[GD]$ إذن $I\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right)$.

المستوي (Γ) شعاعه الناظمي هو $\overrightarrow{GD}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ و يشمل النقطة I.

معادلة المستوي (Γ) من الشكل $\frac{3}{2}x-y+\frac{1}{2}z+d=0$ وبما أنّ I تنتمي للمستوي (Γ) فإنّ $\frac{3}{8}-\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+d=0$

ومنه $d=\frac{3}{4}$ وعليه معادلة (Γ) هي $\frac{3}{2}x-y+\frac{1}{2}z+\frac{3}{4}=0$ أي $6x-4y+2z+3=0$.

3) تبيين أنّ (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

لدينا $\vec{n}'(6;-4;2)$ شعاع ناظمي لـ (Γ) و $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

واضح أنّ $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا إذن (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

تعيين تمثيل وسيطي لـ (Δ).

نحل الجملة $\begin{cases} x+y+z-2=0 ....(1) \\ 6x-4y+2z+3=0.....(2) \end{cases}$ بضرب المعادلة (1) بالعدد 4 وبجمع المعادلتين نجد

$10x+6z-5=0$ ومنه $x=\frac{1}{2}-\frac{3}{5}z$ وبتعويض x في (1) نجد $\frac{1}{2}-\frac{3}{5}z+y+z-2=0$ ومنه $y+\frac{2}{5}z-\frac{3}{2}=0$

أي $y=\frac{3}{2}-\frac{2}{5}z$ وبوضع $z=5t$ نجد $\begin{cases} x=\frac{1}{2}-3t \\ y=\frac{3}{2}-2t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=5t \end{cases}$

<u>**تمرين 23**</u><u>☹ بكالوريا رياضيات 2012</u>

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط: $A(1;1;1)$ ، $B(1;-1;0)$ ، $C(2;0;1)$.

1- بيّن أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا (P_1) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

2- (P_2) المستوي الذي $x-2y-2z+6=0$ معادلة ديكارتية له.

- بيّن أنّ (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3- بيّن أنّ النقطة O هي مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.

4- أ) عيّن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{3}$.

ب) احسب إحداثيات D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ).

جـ) ماهي طبيعة المثلث ODE؟ ثمّ استنتج المسافة بين O و (Δ).

<u>**الحل**</u>☺

1- إثبات أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا (P_1).

لدينا $\overrightarrow{AB}(0;-2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-1;0)$ و $\frac{0}{1}\neq\frac{-1}{-2}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين

خطيا ومنه فإنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية فهي تعيّن مستويا (P_1).

تعيين تمثيلا وسيطيا للمستوي (P_1).

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليس لهما نفس الحامل وعليه $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ معلما للمستوي (P_1).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

إذا كانت M تنتمي لـ (P_1) فإنها تحقق: $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$.

حيث α و β عددان حقيقيان و $\overrightarrow{AM}=(x-1;y-1;z-1)$.

ومنه $\begin{cases}x-1=\beta\\y-1=-2\alpha-\beta\\z-1=-\alpha\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=1+\beta\\y=1-2\alpha-\beta\\z=1-\alpha\end{cases}$ و α و β عددان حقيقيان.

وهو تمثيل وسيطي للمستوي (P_1).

2- (P_2) المستوي الذي $x-2y-2z+6=0$ معادلة ديكارتية له.

- إثبات أنّ (P_1) و (P_2) متقاطعان.

لدينا $\vec{n}(1;-2;-2)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P_2).

نفرض أنّ $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (P_1) إذن $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ ولدينا $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1(0)-2(-2)-2(-1)=6\\\vec{n}.\overrightarrow{AC}=1(1)-2(-1)-2(0)=3\end{cases}$ تناقض.

إذن الشعاع $\vec{n}$ ليس ناظمي للمستوي (P_1) وبالتالي المستويان (P_1) و (P_2) غير متوازيين فهما متقاطعان.

كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

إذا كانت $M\in(\Delta)$ فإنّ إحداثياتها تحقق الجملة: $\begin{cases}x=1+\beta\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\y=1-2\alpha-\beta\ldots\ldots\ldots(2)\\z=1-\alpha\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)\\x-2y-2z+6=0\ldots(4)\end{cases}$.

نعوض كل من x و y و z من (1) و (2) و (3) بقيمهما في (4) نجد:

$1+\beta-2(1-2\alpha-\beta)-2(1-\alpha)+6=0$ ومنه $3\beta+6\alpha+3=0$ وعليه $\beta=-2\alpha-1$.

إذن $\begin{cases}x=1+(-2\alpha-1)\\y=1-2\alpha-(-2\alpha-1)\\z=1-\alpha\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=-2\alpha\\y=2\quad(\alpha\in\mathbb{R})\\z=1-\alpha\end{cases}$ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

3- إثبات أنّ النقطة O هي مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.

نسمي G هي مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$ وعليه

$x_G=\dfrac{1+1-2}{1+1-1}=0$ ، $y_G=\dfrac{1-1-0}{1+1-1}=0$ ، $z_G=\dfrac{1+0-1}{1+1-1}=0$ ومنه النقطة G منطقة على O.

إذن النقطة O هي مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$.

4- أ) تعيين (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{3}$

لدينا $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(1+1-1)\overrightarrow{MO}$ أي $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}$

aziz_mus1@hotmail.fr

ومنه $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{3}$ تعني $\left\|\overrightarrow{MO}\right\|=2\sqrt{3}$ أي $MO=2\sqrt{3}$.

إذن المجموعة (S) هي سطح كرة مركزه O ونصف قطره $2\sqrt{3}$.

ب) حساب إحداثيات D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ).

$x^2+y^2+z^2=12$ هي معادلة ديكارتية لـ (S).

نحل الجملة $\begin{cases} x=-2\alpha \\ y=2 \\ z=1-\alpha \\ x^2+y^2+z^2=12 \end{cases}$ وعليه $(-2\alpha)^2+2^2+(1-\alpha)^2=12$ أي $5\alpha^2-2\alpha-7=0$

بعد حل المعادلة نجد: $\alpha=\frac{7}{5}$ أو $\alpha=-1$.

ومنه $\begin{cases} x=-2\left(\frac{7}{5}\right) \\ y=2 \\ z=1-\frac{7}{5} \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=-2(-1) \\ y=2 \\ z=1+1 \end{cases}$.

إذن يتقاطع (S) و (Δ) في النقطتين $D\left(-\frac{14}{5};2;-\frac{2}{5}\right)$ و $E(2;2;2)$.

جـ) طبيعة المثلث ODE.

بما أن النقطتين D و E تنتميان لسطح الكرة (S) التي مركزها O فإنّ $OE=OD$ ومنه فإنّ المثلث ODE متساوي السّاقين.

استنتاج المسافة بين O و (Δ).

بما أنّ النقطتين D و E تنتميان للمستقيم (Δ) فإنّ (Δ) هو المستقيم (DE).

المثلث ODE متساوي الساقين بالتالي المسقط العمودي للنقطة O على (DE) هي النقطة H منتصف القطعة $[DE]$ ومنه $d(O;(DE))=OH$.

ولدينا $H\left(-\frac{2}{5};2;\frac{4}{5}\right)$ وعليه $OH=\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2+2^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{5}}$.

إذن $d(O;(\Delta))=\sqrt{\frac{24}{5}}$.

تمرين 24☹

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(1;2;3)$، $B(0;1;4)$ و $C(-1;-3;2)$ ، $D(4;-2;5)$ والشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$.

1– أ ـ بيّن أنّ النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

ب ـ بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

ج ـ عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2– ليكن المستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t \\ z=4-t \end{cases}$ حيث t عدد حقيقي.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ـ بيّن أنّ النقطة D تنتمي للمستقيم (Δ) وأنّ هذا المستقيم عمودي على المستوي (ABC).

3ـ لتكن H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

ـ بيّن أنّ H هي مركز ثقل المثلث ABC.

الحل☺

1ـ أ ـ إثبات أنّ النقط A، B و C ليست على استقامة واحدة .

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$ و $\frac{-2}{-1}\neq\frac{-5}{-1}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A، B و C ليست على استقامة واحدة .

ب ـ إثبات أنّ الشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2(-1)-1(-1)+1(1)=-2+2=0$.

و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=2(-2)-1(-5)+1(-1)=-4+5-1=0$.

بما أنّ $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ والشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا فإنّ $\vec{n}(2;-1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

ج ـ تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من (ABC) لدينا: $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-3)$

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ معناه $2(x-1)-1(y-2)+(z-3)=0$ ومنه $(ABC):2x-y+z-3=0$.

2ـ ليكن المستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=2-2t\\y=-1+t\\z=4-t\end{cases}$ حيث t عدد حقيقي.

ـ إثبات أنّ النقطة D تنتمي للمستقيم (Δ) وأنّ هذا المستقيم عمودي على المستوي (ABC).

$D\in(\Delta)$ معناه $\begin{cases}4=2-2t\\-2=-1+t\\5=4-t\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}t=-1\\t=-1\\t=-1\end{cases}$ إذن من أجل $t=-1$ نجد النقطة $D(4;-2;5)$ من المستقيم (Δ).

من التمثيل الوسيطي نجد $\vec{u}(-2;1;-1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

و $\vec{n}(2;-1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ومنه $\vec{u}=-\vec{n}$ وعليه الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا وبالتالي فإنّ (Δ) عمودي على المستوي (ABC).

3ـ لتكن H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

ـ بيّن أنّ H هي مركز ثقل المثلث ABC.

نجد أولا إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

نحل الجملة $\begin{cases}x=2-2t\\y=-1+t\\z=4-t\\2x-y+z-3=0\end{cases}$ ومنه $2(2-2t)-(-1+t)+(4-t)-3=0$

ومنه $-6t+6=0$ وعليه $t=1$ إذن $H(0;0;3)$.

لدينا $\overrightarrow{HA}(1;2;0)$ ، $\overrightarrow{HB}(0;1;1)$ و $\overrightarrow{HC}(-1;-3;-1)$

ومنه $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}(-1+0+1;-3+1+2;-1+1+0)$ أي $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}(0;0;0)$

وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ وبما أن النقط A ، B و C ليست في استقامة فإن H هي مركز ثقل

aziz_mus1@hotmail.fr

المثلث ABC.

تمرين 25☹

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(1;4;-5)$ ، $B(3;2;-4)$ ، $C(5;4;-3)$ و $D(-2;8;4)$ والشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$.

1. بيّن أنّ $x-2z-11=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).
2. حدّد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة D ويوازي $\vec{u}$.
3. ليكن (P) المستوي ذو المعادلة: $x-y-z-7=0$.

أ ـ بيّن أنّ المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=11+2t\\y=4+t\\z=t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

ب ـ بيّن أنّ المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

4. تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$، تحقق أنّ: $E\in(\Delta)$ و $F\in(T)$.
5. لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ مع α عدد حقيقي.

أ ـ جد بدلالة α معادلة ديكارتية لـ(Γ) واستنتج أنّ (Γ) مستو، $\overrightarrow{EF}$ شعاع ناظمي له.

ب ـ عيّن قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.

الحل☺

1. إثبات أنّ $x-2z-11=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

لدينا $x_A-2z_A-11=1-2(-5)-11=0$ و $x_B-2z_B-11=3-2(-4)-11=0$

و $x_C-2z_C-11=5-2(-3)-11=0$ ومنه إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة $x-2z-11=0$

وبالتالي $x-2z-11=0$ هي معادلة للمستوي (ABC).

2. تحديد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة D ويوازي $\vec{u}$.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

M تنتمي لـ (T) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{DM}=k\vec{u}$.

ومنه $\begin{cases}x+2=k\\y-8=5k\\z-4=-k\end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=-2+k\\y=8+5k\\z=4-k\end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$.

3. ليكن (P) المستوي ذو المعادلة: $x-y-z-7=0$.

أ ـ إثبات أنّ المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=11+2t\\y=4+t\\z=t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

بالتعويض في معادلة كل من (ABC) و (P) نجد:

$(11+2t)-2(t)-11=0$ و $(11+2t)-(4+t)-t-7=11-11+2t-2t=0$

ومنه (Δ) محتوى في (ABC) ومحتوى في (P) وعليه (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ).

ب ـ إثبات أنّ المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

لدينا $\vec{u}(1;5;-1)$ هو شعاع توجيه لـ(T) و $\vec{v}(2;1;1)$ هو شعاع توجيه لـ (Δ).

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

و $\frac{1}{5} \neq \frac{2}{1}$ إذن (T) و (Δ) غير متوازيين.

ندرس تقاطع (T) و (Δ).

نحل الجملة $(*)\begin{cases} 11+2t=-2+k ......(1) \\ 4+t=8+5k ....(2) \\ t=4-k ....(3) \end{cases}$

ندرس إمكانية وجود ثنائية t و k من الأعداد الحقيقية تحقق الجملة $(*)$.

بتعويض t بقيمتها من (3) في (2) نجد $4+(4-k)=8+5k$ ومنه $k=0$

بالتعويض في (3) نجد $t=4$ وبتعويض t و k بقيمهما في (1) نجد $-2=19$ تناقض.

إذن (T) و (Δ) غير متقاطعين وبما أنهما غير متوازيين فإنهما ليسا من نفس المستوي.

4. تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$ ، تحقق أنّ: $E\in(\Delta)$ و $F\in(T)$.

$E\in(\Delta)$ معناه $\begin{cases} 3=11+2t \\ 0=4+t \\ -4=t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t=-4 \\ t=-4 \\ t=-4 \end{cases}$ بما أن t وحيد فإنّ $E\in(\Delta)$.

$F\in(T)$ معناه $\begin{cases} -3=-2+k \\ 3=8+5k \\ 5=4-k \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} k=-1 \\ k=-1 \\ k=-1 \end{cases}$ بما أنّ k وحيد فإنّ $F\in(T)$.

5. لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ مع α عدد حقيقي.

أ ـ إيجاد بدلالة α معادلة ديكارتية لـ(Γ).

$\overrightarrow{ME}(3-x;-y;-4-z)$ و $\overrightarrow{FE}(6;-3;-9)$.

$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ معناه $6(3-x)+3y-9(-4-z)=\alpha$ ومنه $-6x+3y+9z+54-\alpha=0$

هي معادلة ديكارتية لـ (Γ) وهي معادلة مستوي شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$.

ب ـ تعيين قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.

لتكن I منتصف $[EF]$ ومنه $I\left(0;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$ ويشمل النقطة I.

ومنه $-6(0)+3\left(\frac{3}{2}\right)+9\left(\frac{1}{2}\right)+54-\alpha=0$ أي $\alpha=63$.

طريقة ثانية:

المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{FE}=0$.

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{FE}=0$ معناه $(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EI}).\overrightarrow{FE}=0$ ومعناه $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FE}=0$

أي $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=-\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FE}$ ومنه $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{FE}$.

$\overrightarrow{IE}\left(3;-\frac{3}{2};-\frac{9}{2}\right)$ ومنه $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{EF}=3(6)-\frac{3}{2}(-3)-\frac{9}{2}(-9)=18+45=63$

ومنه $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{FE}=0$ تعني $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=63$.

إذن المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=63$

وعليه $\alpha = 63$.

تمرين 26 ☹ بكالوريا تقني رياضي 2014

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

A ، B و C ثلاث نقط من الفضاء حيث $A\left(0;-1;1\right)$ ، $B\left(1;3;2\right)$ و $C\left(-1;3;4\right)$.

1) أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، ثمّ استنتج القيمة المدورة إلى الوحدة، بالدرجات للزاوية $\widehat{BAC}$

ب) بيّن أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا.

2) أ) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}\left(2;-1;2\right)$ ناظمي للمستوي $\left(ABC\right)$.

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $\left(ABC\right)$.

3) ليكن $\left(S\right)$ سطح الكرة الذي معادلته: $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$

نسمي Ω و R مركز ونصف قطر $\left(S\right)$ احسب R وعيّن احداثيات Ω

4) اكتب معادلة ديكارتية لكل من المستويين $\left(P_1\right)$ و $\left(P_2\right)$ مماسي سطح الكرة $\left(S\right)$ والموازيين للمستوي $\left(ABC\right)$.

الحل☺

1) أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

لدينا $\overrightarrow{AB}\left(1;4:1\right)$ ، $\overrightarrow{AC}\left(-1;4:3\right)$ ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1.(-1)+4.(4)+1.(3)=18$.

استنتاج القيمة المدورة إلى الوحدة، بالدرجات للزاوية $\widehat{BAC}$

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$ ومن جهة أخرى $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=18$

ومنه $AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}=18$ ومنه $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{18}{AB\times AC}$

ولدينا $\sqrt{1^2+4^2+1^2}=\sqrt{18}$ ، $AC=\sqrt{\left(-1\right)^2+4^2+3^2}=\sqrt{26}$

ومنه $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{18}{\sqrt{18}\times\sqrt{26}}=\sqrt{\dfrac{9}{13}}$ وهذا يعني أنّ $\widehat{BAC}=34^\circ$

ب) تبيين أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا.

بما أنّ $\widehat{BAC}\neq 0$ و $\widehat{BAC}\neq\pi$ فإنّ النقط A ، B و C تعين مستويا.

2) أ) تبيين أنّ الشعاع $\vec{n}\left(2;-1;2\right)$ ناظمي للمستوي $\left(ABC\right)$.

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2.(1)-1.(4)+2.(1)=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=2.(-1)-1.(4)+2.(3)=0$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظمي للمستوي $\left(ABC\right)$.

ب) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $\left(ABC\right)$.

المستوي $\left(ABC\right)$ له معادلة من الشكل $2x-y+2z+d=0$ وبما أنّ A تنتمي للمستوي $\left(ABC\right)$ فإنّ

$1+2+d=0$ ومنه $d=-3$ وعليه معادلة المستوي $\left(ABC\right)$ هي $2x-y+2z-3=0$

3) ليكن $\left(S\right)$ سطح الكرة الذي معادلته: $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$

حساب R وتعيين احداثيات Ω

$x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$ معناه $\left(x-2\right)^2-4+\left(y+3\right)^2-9+\left(z-1\right)^2-1+5=0$

ومنه $\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2+\left(z-1\right)^2=9$ إذن $\Omega\left(2;-3;1\right)$ و $R=3$.

4) كتابة معادلة ديكارتية لكل من المستويين $\left(P_1\right)$ و $\left(P_2\right)$ مماسي سطح الكرة $\left(S\right)$ والموازيين للمستوي $\left(ABC\right)$.

المستوي $\left(P\right)$ الموازي لـ $\left(ABC\right)$ معادلته من الشكل $2x-y+2z+d=0$ وبما أنّ $\left(P\right)$ مماس لـ $\left(S\right)$ فإنّ

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$d(\Omega;(P))=3$ ومنه $\frac{|4+3+2+d|}{3}=3$ ومنه $|9+d|=9$ وعليه $9+d=9$ أو $9+d=-9$

أي $d=0$ أو $d=-18$.

إذن يوجد مستويان موازيان للمستوي (ABC) مماسين لسطح الكرة (S) معادلتاهما

$(P_1): 2x-y+2z=0$ و $(P_2): 2x-y+2z-18=0$.

تمرين 27☹

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(7;1;1)$، $B(1;7;1)$، $C(1;1;7)$ و $D(-1;-1;-1)$.

1.أ ـ بيّن أنّ النقط A، B و C تعين مستويا (P)؛ ثمّ تحقق أنّ معادلة ديكارتية للمستوي (P) هي

$x+y+z-9=0$

ب ـ تحقق أنّ المستقيم (OD) عمودي على (P).

جـ ـ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OD).

د ـ بيّن أنّ النقطة $H(3;3;3)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P)؛ وأنها مركز الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC.

2. ليكن (Q) المستوي المحوري للقطعة $[CD]$.

أ ـ تحقق أنّ المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) هي $x+y+4z-12=0$.

ب ـ عيّن إحداثيات Ω نقطة تقاطع (OD) و (Q).

ج ـ بيّن أنّ Ω هي مركز رباعي الوجوه $ABCD$.

د ـ بيّن أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع؛ ثمّ احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

3. (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=12\sqrt{3}$.

أ ـ بيّن أنّ (S) هي سطح الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها $3\sqrt{3}$.

ب ـ اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S)؛ ثمّ تحقق أنّ (S) تشمل النقط A، B ، C و D .

جـ ـ استنتج أن (P) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تعيين عناصرها.

الحل☺

1.أ ـ تبيين أنّ النقط A، B و C تعين مستويا (P)

لدينا $\overrightarrow{AB}(-6;6;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-6;0;6)$ و $\frac{0}{6}\neq\frac{-6}{-6}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط A، B و C تعيّن مستويا (P).

التحقق أنّ معادلة ديكارتية للمستوي (P) هي $x+y+z-9=0$

$x_A+y_A+z_A-9=7+1+1-9=0$ ، $x_B+y_B+z_B-9=1+7+1-9=0$ ،

$x_C+y_C+z_C-9=1+1+7-9=0$ ومنه إحداثيات النقط A، B و C تحقق المعادلة $x+y+z-9=0$

وعليه المعادلة الديكارتية للمستوي (P) هي $x+y+z-9=0$

ب ـ التحقق أنّ المستقيم (OD) عمودي على (P).

لدينا $\overrightarrow{OD}(-1;-1;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (OD) و $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\overrightarrow{OD}=-\vec{n}$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

إذن الشعاعان $\overrightarrow{OD}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا بالتالي المستقيم (OD) عمودي على (P).

جـ ـ تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OD).

من أجل كل $M(x;y;z)$ من المستقيم (OD) لدينا: $\overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{OD}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

ومنه $\begin{cases} x=-t \\ y=-t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=-t \end{cases}$

د ـ تبيين أنّ النقطة $H(3;3;3)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P).

يمكن استعمال طريقتين

<u>طريقة 1:</u> نثبت أن H تنتمي للمستوي (P) و أنّ $\overrightarrow{DH}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا.

<u>طريقة 2:</u> نثبت أن H تنتمي للمستوي (P) و $d(D;(P))=DH$.

نستعمل طريقة 1

لدينا $x_H+y_H+z_H-9=3+3+3-9=0$ ومنه $H\in(P)$

ولدينا $\overrightarrow{DH}(4;4;4)$ ومنه $\overrightarrow{DH}=4\vec{n}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{DH}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا بالتالي H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P).

إثبات أنّ H هي مركز الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC.

$\overrightarrow{HA}(4;-2;-2)$ ومنه $HA=\sqrt{4^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{24}$

$\overrightarrow{HB}(-2;4;-2)$ ومنه $HB=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{24}$

$\overrightarrow{HC}(-2;-2;4)$ ومنه $HC=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{24}$

بما أنّ $HA=HB=HC$ فإنّ H هي مركز الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC.

ب ـ تعيين إحداثيات Ω نقطة تقاطع (OD) و (Q).

نحل الجملة $\begin{cases} x=-t.........................(1) \\ y=-t.........................(2) \\ z=-t.........................(3) \\ x+y+4z-12=0......(4) \end{cases}$ ومنه $-t-t-4t-12=0$ وعليه $t=-2$ إذن $\Omega(2;2;2)$.

ج ـ إثبات أنّ Ω هي مركز رباعي الوجوه $ABCD$.

لدينا $\overrightarrow{\Omega A}(5;-1;-1)$ ، $\overrightarrow{\Omega B}(-1;5;-1)$ ، $\overrightarrow{\Omega C}(-1;-1;5)$ ، $\overrightarrow{\Omega D}(-3;-3-3)$

ومنه $\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}+\overrightarrow{\Omega D}(5-1-1-3;-1+5-1-3;-1-1+5-3)$ أي $\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}+\overrightarrow{\Omega D}(0;0;0)$

وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}+\overrightarrow{\Omega D}=\vec{0}$ وبالتالي Ω هي مركز رباعي الوجوه $ABCD$.

د ـ إثبات أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع.

$\overrightarrow{AB}(-6;6;0)$ ومنه $AB=\sqrt{(-6)^2+6^2}=6\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC}(-6;0;6)$ ومنه $AC=\sqrt{(-6)^2+6^2}=6\sqrt{2}$

$\overrightarrow{BC}(0;-6;6)$ ومنه $BC=\sqrt{(-6)^2+6^2}=6\sqrt{2}$

بما أنّ $AB=AC=BC$ فإنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع.

حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

$V=\frac{1}{3}S\times d$ حيث S هي مساحة المثلث ABC و d هو بُعد النقطة D عن المستوي (P).

لتكن I منتصف $[AB]$ ومنه $I(4;4;1)$

$$S=\frac{BC\times AI}{2}=\frac{6\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}{2}=18au \quad ، \quad d=\frac{|-1-1-1-9|}{\sqrt{3}}=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$$

وعليه $V=\frac{1}{3}\times18\times4\sqrt{3}=24\sqrt{3}uv$.

3. (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=12\sqrt{3}$.

أ ـ تبيين أنّ (S) هي سطح الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها $3\sqrt{3}$.

Ω مركز رباعي الوجوه $ABCD$ ومنه $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{M\Omega}$

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=12\sqrt{3}$ معناه $\left\|4\overrightarrow{\Omega M}\right\|=12\sqrt{3}$ أي $\Omega M=3\sqrt{3}$

إذن (S) هي سطح الكرة الذي مركزه Ω ونصف قطره $3\sqrt{3}$.

ب ـ كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S).

تذكير: المعادلة الديكارتية لسطح الكرة الذي مركزه $\omega(x_0;y_0;z_0)$ ونصف قطره R هي $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) هي $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=27$.

التحقق أنّ (S) تشمل النقط A، B، C و D.

$\overrightarrow{\Omega A}(5;-1;-1)$ ومنه $\Omega A=\sqrt{5^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$\overrightarrow{\Omega B}(-1;5;-1)$ ومنه $\Omega B=\sqrt{(-1)^2+5^2+(-1)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$\overrightarrow{\Omega C}(-1;-1;5)$ ومنه $\Omega C=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+5^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$\overrightarrow{\Omega D}(-3;-3-3)$ ومنه $\Omega D=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

إذن (S) تشمل النقط A، B، C و D.

جـ ـ استنتاج أن (P) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تعيين عناصرها.

بما أنّ النقط A، B و C تنتمي للمستوي (P) وتنتمي لسطح الكرة (S) فإنّ (P) و (S) يتقاطعان وفق الدائرة التي تشمل النقط A، B و C أي يتقاطعان وفق الدائرة (C).

تمرين 28☹

I/ D و H نقطتان من الفضاء و I منتصف القطعة المستقيمة $[DH]$.

1) بيّن أنّه، من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون: $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=MI^2-ID^2$.

2) استنتج أنّ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=0$ هي سطح كرة (S) يطلب تعيين مركزه ونصف قطره.

II/ الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(3;0;0)$ ، $B(0;6;0)$ ، $C(0;0;4)$ و $D(-5;0;1)$.

1) أ) تحقق أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(4;2;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

جـ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل D ويعامد المستوي (ABC).

3) نسمي H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)؛ احسب احداثيات النقطة H.

4) احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)، ثمّ اكتب معادلة لسطح الكرة (S) المذكورة في الجزء **I**.

5) نعتبر النقطة $N\left(\frac{12}{5};\frac{6}{5};0\right)$.

أ) أثبت أنّ N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

ب) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل☺

الجزء I/.

1) إثبات أنّه، من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون: $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=MI^2-ID^2$ **.**

$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IH}\right)$ وبما أنّ I منتصف القطعة المستقيمة $[DH]$ فإنّ $\overrightarrow{IH}=-\overrightarrow{ID}$

ومنه $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{ID}\right)=MI^2-ID^2$.

2) استنتاج أنّ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=0$ هي سطح كرة (S)

$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH}=0$ تكافئ $MI^2-ID^2=0$ و تكافئ $MI=ID$ بالتالي مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزه I ونصف قطره ID.

الجزء II/.

1) أ) التحقق أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;6;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-3;0;4)$ و $\frac{-3}{-3}\neq\frac{0}{6}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب) تبيين أنّ الشعاع $\vec{n}(4;2;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=4(-3)+2(6)+3(0)=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=4(-3)+2(0)+3(4)=0$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC).

جـ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

معادلة المستوي (ABC) من الشكل $4x+2y+3z+d=0$ وبما أنّ A تنتمي للمستوي (ABC) فإنّ

$4(3)+d=0$ ومنه $d=-12$ وعليه معادلة المستوي (ABC) هي $4x+2y+3z-12=0$.

2) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل D ويعامد المستوي (ABC).

بما أنّ (Δ) يعامد (P) فإنّ $\vec{n}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (Δ) لدينا: $\overrightarrow{DM}=t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

ومنه $\begin{cases}x+5=4t\\y=2t\\z-1=3t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=-5+4t\\y=2t\\z=1+3t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$.

3) نسمي H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

حساب احداثيات النقطة H.

H هي نقطة تقاطع (Δ) والمستوي (ABC).

نحل الجملة
$$\begin{cases} x=-5+4t \ldots\ldots(1) \\ y=2t \ldots\ldots(2) \\ z=1+3t \ldots\ldots(3) \\ 4x+2y+3z-12=0 \ldots\ldots(4) \end{cases}$$

نعوض كل من x و y و z من (1) و (2) و (3) بقيمهما في (4) نجد: $4(-5+4t)+2(2t)+3(1+3t)-12=0$

ومنه $29t-29=0$ أي $t=1$ إذن $\begin{cases} x=-5+4(1) \\ y=2(1) \\ z=1+3(1) \end{cases}$ وعليه $H(-1;2;4)$

4) حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

يمكن حساب المسافة بطريقتين

__طريقة 1:__ $d(D;(ABC))=\dfrac{|4(-5)+2(0)+3(1)-12|}{\sqrt{29}}=\dfrac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}$

__طريقة 2:__ $d(D;(ABC))=DH$

لدينا $\overrightarrow{DH}(4;2;3)$ وعليه $DH=\sqrt{4^2+2^2+3^2}=\sqrt{29}$ إذن $d(D;(ABC))=\sqrt{29}$.

كتابة معادلة لسطح الكرة (S).

تعيين احداثيات I.

$x_I=\dfrac{x_D+x_H}{2}=-3$ ، $y_I=\dfrac{y_D+y_H}{2}=1$ ، $z_I=\dfrac{z_D+z_H}{2}=\dfrac{5}{2}$ إذن $I\left(-3;1;\dfrac{5}{2}\right)$

$$ID=\frac{DH}{2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$$

$MI=ID$ معناه $(x+3)^2+(y-1)^2+\left(z-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{29}{4}$ وهي معادلة السطح (S).

5) نعتبر النقطة $N\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{6}{5};0\right)$.

أ) إثبات أنّ N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

تكون N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) إذا تحقق ما يلي: $\overrightarrow{CN}\perp\overrightarrow{AB}$ و $N\in(AB)$

لدينا $\overrightarrow{CN}\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{6}{5};4\right)$ ومنه $\overrightarrow{CN}.\overrightarrow{AB}=\dfrac{12}{5}(-3)+\dfrac{6}{5}(6)+0(0)=0$ وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{CN}\perp\overrightarrow{AB}$

ولدينا $\overrightarrow{AN}\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{6}{5};0\right)$ و $\overrightarrow{AB}(-3;6;0)$ ومنه $\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{AN}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN}$ مرتبطان خطيا ومنه

N تنتمي للمستقيم (AB) وبالتالي N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

$V=\dfrac{1}{3}S\times DH$ حيث S هي مساحة المثلث ABC.

لدينا $AB=\sqrt{(-3)^2+6^2}=3\sqrt{5}$ ، $CN=\sqrt{\dfrac{144}{25}+\dfrac{36}{25}+16}=\sqrt{\dfrac{580}{25}}=\sqrt{\dfrac{116}{5}}=\dfrac{2\sqrt{29}}{\sqrt{5}}$

aziz_mus1@hotmail.fr

ومنه $S=\frac{1}{2}AB\times CN=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{5}}=3\sqrt{29}$ وعليه $V=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{29}\times\sqrt{29}=29uv$.

تمرين 29☹

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط:

$A(3;-1;2)$ ، $B(1;1;-2)$ و $G(4;-2;4)$ والمستوي (P) الذي معادلته $x-2y+3z+8=0$.

1. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)؛ ثمّ عيّن إحداثيات L نقطة تقاطع المستقيم (AB) والمستوي (P).

2. أ ـ بيّن أن G تنتمي للمستقيم (AB) وأنها مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب ـ عيّن طبيعة وعناصر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

3 أ ـ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة G ويعامد المستوي (P)، ثمّ عيّن إحداثيات H نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ).

ب ـ استنتج المسافة بين النقطة L والمستقيم (Δ).

4. أ ـ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (AGH)، ثمّ استنتج معادلة ديكارتية له.

ب ـ بيّن أنّ المستويين (AGH) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (d) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

الحل☺

1. كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

المستقيم (AB) شعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}(-2;2;-4)$

$M(x;y;z)\in(AB)$ معناه $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ حيث t عدد حقيقي

ومنه $\begin{cases}x-3=-2t\\ y+1=2t\\ z-2=-4t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=3-2t\\ y=-1+2t\\ z=2-4t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$.

تعيين إحداثيات L نقطة تقاطع المستقيم (AB) والمستوي (P).

نحل الجملة $\begin{cases}x=3-2t\\ y=-1+2t\\ z=2-4t\\ x-2y+3z+8=0\end{cases}$ ومنه $3-2t+2-4t+6-12t+8=0$ ومنه $t=\frac{19}{18}$

وعليه $\begin{cases}x=3-2\left(\frac{19}{18}\right)\\ y=-1+2\left(\frac{19}{18}\right)\\ z=2-4\left(\frac{19}{18}\right)\end{cases}$ إذن $L\left(\frac{8}{9};\frac{10}{9};-\frac{20}{9}\right)$

2. أ ـ تبيين أن G تنتمي للمستقيم (AB).

aziz_mus1@hotmail.fr

$G\in(AB)$ معناه $\begin{cases}4=3-2t\\-2=-1+2t\\4=2-4t\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}t=-\frac{1}{2}\\t=-\frac{1}{2}\\t=-\frac{1}{2}\end{cases}$ إذن من أجل $t=-\frac{1}{2}$ نجد النقطة G من المستقيم (AB).

تبيين أنّ G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

لدينا G تنتمي للمستقيم (AB) من أجل $t=-\frac{1}{2}$ ومنه $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ومنه $2\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}$

تكافئ $2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ وتكافئ $2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ومنه $-3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ إذن G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بـ -3 و 1 على الترتيب.

ب ـ تعيين طبيعة وعناصر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

G مرجح الجملة $\{(A;-3),(B;1)\}$ إذن من أجل كل نقطة M من الفضاء لدينا $-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MG}$

ولدينا $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$

$\left\|-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ معناه $\left\|-2\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|$ أي $MG=\frac{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|}{2}$

ولدينا $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}$ ومنه $MG=\sqrt{6}$ وبالتالي (E) هي سطح الكرة التي مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

3 أ ـ كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة G ويعامد المستوي (P).

بما أنّ (Δ) يعامد (P) فإنّ $\vec{n}(1;-2;3)$ يكون شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

$M(x;y;z)\in(\Delta)$ معناه $\overrightarrow{GM}=t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

ومنه $\begin{cases}x-4=t\\y+2=-2t;(t\in\mathbb{R})\\z-4=3t\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=4+t\\y=-2-2t;(t\in\mathbb{R})\\z=4+3t\end{cases}$.

تعيين إحداثيات H نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ).

نحل الجملة $\begin{cases}x=4+t\\y=-2-2t\\z=4+3t\\x-2y+3z+8=0\end{cases}$ ومنه $4+t+4+4t+12+9t+8=0$ ومنه $t=-2$

وعليه $H(2;2;-2)$

ب ـ استنتاج المسافة بين النقطة L والمستقيم (Δ).

بما أن (Δ) يعامد (P) فإن المسقط العمودي لكل نقطة من المستوي (P) على المستقيم (Δ) هي H نقطة تقاطعهما

وبما $L\in(P)$ فإن المسافة بين النقطة L والمستقيم (Δ) هي LH.

$\overrightarrow{LH}\left(\frac{10}{9};\frac{8}{9};\frac{2}{9}\right)$ ومنه $LH=\sqrt{\frac{100}{81}+\frac{64}{81}+\frac{4}{81}}=\frac{\sqrt{168}}{9}$

4. أ ـ كتابة تمثيلا وسيطيا للمستوي (AGH)

aziz_mus1@hotmail.fr

لدينا $\overrightarrow{AG}(1;-1;2)$ ، $\overrightarrow{AH}(-1;3;-4)$ و $\frac{-1}{1}\neq\frac{3}{-1}$ ومنه النقط A ، G و H تعين مستويا.

$M(x;y;z)\in(AGH)$ معناه $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{AH}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

ومنه $\begin{cases} x-3=\alpha-\beta \\ y+1=-\alpha+3\beta;(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ z-2=2\alpha-4\beta \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=3+\alpha-\beta \\ y=-1-\alpha+3\beta;(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ z=2+2\alpha-4\beta \end{cases}$.

استنتاج معادلة ديكارتية له.

$\begin{cases} x=3+\alpha-\beta...............(1) \\ y=-1-\alpha+3\beta..........(2) \\ z=2+2\alpha-4\beta..........(3) \end{cases}$ بضرب المعادلة (1) بـ -1 و بجمع (1) و (2) و (3) نجد $-x+y+z+2=0$

وهي معادلة المستوي (AGH).

ب ـ تبيين أنّ المستويين (AGH) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (d) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

لدينا $\vec{n}(1;-2;3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\vec{n}'(-1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (AGH)

و $\frac{1}{-2}\neq\frac{-1}{1}$ إذن الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا ومنه المستويان (AGH) **و** (P) متقاطعان وفق مستقيم (d).

المستقيم (d) معرّف بالجملة $\begin{cases} x-2y+3z+8=0......(1) \\ -x+y+z+2=0.......(2) \end{cases}$ بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد $-y+4z+10=0$

ومنه $y=4z+10$ بالتعويض في (1) نجد $x-2(4z+10)+3z+8=0$ ومنه $x=5z+12$

وبوضع $z=t$ نجد $(d):\begin{cases} x=5t+12 \\ y=4t+10 \\ z=t \end{cases}$

تمرين 30☹

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(8;0;8)$ ، $B(10;3;10)$ ، $C(10;1;6)$ و $D(6;5;4)$.

والمستقيم (Δ) المعرّف بتمثيله الوسيطي $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=-5+3t \\ y=1+2t \\ z=-2t \end{cases}$

1– أُكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل النقطتين A و B.

2– بيّن أنّ المستقيمين (Δ) و (d) ليسا من نفس المستوي.

3– ليكن المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (d) ويوازي (Δ).

أ ـ بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي للمستوي (P).

ب ـ أُكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P).

ج ـ M نقطة كيفية من المستقيم (Δ)، بيّن أنّ بُعد M عن المستوي (P) مستقل عن اختيار النقطة M.

د ـ أثبت أنّ C هي المسقط العمودي للنقطة D على (P).

4- ادرس الوضع النسبي للمستويين (P) و (xOy).

الحل☹

1- كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل النقطتين A و B.

المستقيم (d) شعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$.

من أجل كل $M(x;y;z)$ من المستقيم (d) لدينا: $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$.

ومنه $(\lambda\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=8+2\lambda\\ y=3\lambda\\ z=8+2\lambda\end{cases}$ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم (d).

2- إثبات أنّ المستقيمين (Δ) و (d) ليسا من نفس المستوي.

لدينا $\vec{u}(3;2;-2)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (d).

$\frac{3}{2}\neq\frac{2}{3}$ إذن $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا ومنه المستقيمان (Δ) و (d) غير متوازيين.

ندرس تقاطع (Δ) و (d).

نحل الجملة $\begin{cases}-5+3t=8+2\lambda.....(1)\\ 1+2t=3\lambda............(2)\\ -2t=8+2\lambda.........(3)\end{cases}$

بجمع (2) و (3) نجد $1=8+5\lambda$ ومنه $\lambda=-\frac{7}{5}$.

بتعويض قيمة λ في (1) و (2) و (3) نجد: $\begin{cases}-5+3t=\frac{26}{5}\\ 1+2t=-\frac{21}{5}\\ -2t=\frac{26}{5}\end{cases}$ إذن $\begin{cases}t=\frac{51}{15}\\ t=-\frac{13}{5}\\ t=-\frac{13}{5}\end{cases}$ تناقض

ومنه (Δ) و (d) غير متقاطعين.

بما أنّ (Δ) و (d) غير متوازيين وغير متقاطعين فهما ليسا من نفس المستوي.

3- ليكن المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (d) ويوازي (Δ).

أ - إثبات أنّ الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي للمستوي (P).

(P) يشمل المستقيم (d) ويوازي (Δ) وبما أنّ (d) لايوازي (Δ) إذن $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ هما شعاعي توجيه للمستوي (P)

ولدينا $\vec{n}.\vec{u}=2(3)-2(2)-2=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2(2)-2(3)+2=0$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (P).

ب - كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

المستوي (P) له معادلة من الشكل $2x-2y+z+d=0$ وبما أنّ A تنتمي للمستوي (P) فإنّ

$2(8)-2(0)+8+d=0$ ومنه $d=-24$ وعليه معادلة المستوي (P) هي $2x-2y+z-24=0$

ج - M نقطة كيفية من المستقيم (Δ).

إثبات أنّ بُعد M عن المستوي (P) مستقل عن اختيار النقطة M.

aziz_mus1@hotmail.fr

$$d(M;P)=\frac{|2(-5+3t)-2(1+2t)-2t-24|}{\sqrt{4+2+1}}=\frac{36}{9}=4.$$

إذن مهما تكن النقطة M من (Δ) فإن بُعدها عن المستوي (P) ثابت وهو $d=4$.

د ـ إثبات أنّ C هي المسقط العمودي للنقطة D على (P).

$2x_C-2y_C+z_C-24=2(10)-2+6-24=0$ ومنه $C\in(P)$.

ولدينا $\overrightarrow{CD}(-4;4;-2)$ ومنه $\overrightarrow{CD}=-2\vec{n}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{CD}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا.

إذن C هي المسقط العمودي للنقطة D على (P).

4– دراسة الوضع النسبي للمستويين (P) و (xOy).

المستوي (xOy) معادلته $z=0$.

نحل الجملة $\begin{cases}2x-2y+z-24=0.....(1)\\ z=0.............................(2)\end{cases}$

نعوض (2) في (1) نجد $2x-2y-24=0$ ومنه $x=y+12$.

وبوضع $y=t$ نجد $\begin{cases}x=12+t\\ y=t\\ z=0\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

ومنه المستويان (P) و (xOy) يتقاطعان وفق المستقيم الذي يشمل النقطة $K(12;0;0)$ ويوازي الشعاع $\vec{v}(1;1;0)$.

تمرين 31☹ بكالوريا تقني رياضي 2014

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

(Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان من الفضاء معرّفان بتمثيليهما الوسيطيين التاليين:

$$(\Delta_1):\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2-2t;(t\in\mathbb{R})\\ z=1-t\end{cases}\quad \text{و}\quad (\Delta_2):\begin{cases}x=1\\ y=-1-t';(t'\in\mathbb{R})\\ z=4+2t'\end{cases}$$

1) أ) عيّن إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2).

ب) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) المعيّن بالمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2).

2) أ) أثبت أنّ النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي للمستوي (P).

ب) بيّن أنّ النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P).

3) أ) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.

ب) عيّن إحداثيات C و D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب.

4) أ) عيّن طبيعة المثلث BCD، ثمّ احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

ب) استنتج مساحة المثلث ACD.

الحل☺

1) أ) تعيين إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2).

نحل الجملة $\begin{cases} 3+2t=1.................(1) \\ -2-2t=-1-t'......(2) \\ 1-t=4+2t'..........(3) \end{cases}$ من (1) نجد $t=-1$ بالتعويض عن t في (2) نجد $0=-1-t'$

ومنه $t'=-1$ وبتعويض t و t' في التمثيلين الوسيطيين لـ (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب نجد

$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$ و $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$ إذن المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) يتقاطعان في النقطة $B(1;0;2)$.

ب) تعيين تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2).

$\vec{u}(2;-2;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ_1) و $\vec{v}(0;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ_2) وهما أساس للمستوي (P).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(P)$ معناه $\overrightarrow{BM}=t\vec{u}+t'\vec{v}$ و $\overrightarrow{BM}(x-1;y;z-2)$.

ومنه $\begin{cases} x-1=2t \\ y=-2t-t' \\ z-2=-t+2t' \end{cases}$ $(t;t')\in\mathbb{R}^2$ أي $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2t-t' \\ z=2-t+2t' \end{cases}$ $(t;t')\in\mathbb{R}^2$

2) أ) إثبات أنّ النقطة $A(6;4;4)$ لا تنتمي للمستوي (P).

نفرض أنّ A تنتمي للمستوي (P) إذن $\begin{cases} 6=1+2t..........(1) \\ 4=-2t-t'......(2) \\ 4=2-t+2t'...(3) \end{cases}$

من (1) نجد $t=\frac{5}{2}$ بالتعويض في (2) و (3) نجد $\begin{cases} t=\frac{5}{2} \\ 4=5-t' \\ 4=-\frac{1}{2}+2t' \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t=\frac{5}{2} \\ t'=1 \\ t'=\frac{9}{4} \end{cases}$ تناقض

إذن A لا تنتمي للمستوي (P).

ب) تبيين أنّ النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P).

تكون B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) إذا وفقط إذا كان:

$B\in(P)$ و $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

لدينا $\overrightarrow{BA}(5;4;2)$ و $\overrightarrow{BA}.\vec{u}=5\times2+4(-2)+2(-1)=0$ و $\overrightarrow{BA}.\vec{v}=5\times0+4(-1)+2(2)=0$

وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{BA}\perp\vec{u}$ و $\overrightarrow{BA}\perp\vec{v}$ بالتالي $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) وبما أنّ $B\in(P)$ فإنّ B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P).

3) أ) تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.

معادلة المستوي (Q) من الشكل $5x+y-7z+d=0$ وبما أنّ $A\in(Q)$ فإنّ $5(6)+4-7(4)+d=0$

ومنه $d=-6$ وعليه $5x+y-7z-6=0$ هي معادلة للمستوي (Q)

ب) تعيين إحداثيات C و D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب.

تعيين إحداثيات C نقطة تقاطع (Q) مع (Δ_1).

نحل الجملة $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t \\ 5x+y-7z-6=0 \end{cases}$ وعليه $5(3+6t)-2-2t-7(1-t)-6=0$ ومنه $35t=0$ أي $t=0$

إذن $C(3;-2;1)$.

تعيين إحداثيات D نقطة تقاطع (Q) مع (Δ_2).

نحل الجملة $\begin{cases} x=1 \\ y=-1-t' \\ z=4+2t' \\ 5x+y-7z-6=0 \end{cases}$ وعليه $5-1-t'-7(4+2t')-6=0$ ومنه $-15t'-30=0$ أي $t'=-2$

إذن $D(1;1;0)$.

4) أ) تعيين طبيعة المثلث BCD.

$\overrightarrow{BC}(2;-2;-1)$ ومنه $BC=\sqrt{4+4+1}=3$

$\overrightarrow{BD}(0;1;-2)$ ومنه $BD=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$\overrightarrow{CD}(-2;3;-1)$ ومنه $CD=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$

ومنه $BC^2+BD^2=CD^2$ إذن المثلث BCD قائم في B.

طريقة 2: لدينا $\vec{u}.\vec{v}=2\times0-2(-1)-1(2)=0$ وهذا يعني أنّ $\vec{u}\perp\vec{v}$ ومنه المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) متعامدان ومتقاطعان في النقطة B وبما أنّ $C\in(\Delta_1)$ و $D\in(\Delta_2)$ فإنّ المثلث BCD قائم في B.

حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

حجم رباعي الوجوه يعطى كما يلي $\frac{1}{3}\times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع.

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}\times AB$ (AB هي المسافة بين A والمستوي $(BCD)=(P)$)

لدينا $AB=3\sqrt{5}$ ، $S_{BCD}=\frac{BC\times BD}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}ua$

وعليه $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}\times3\sqrt{5}=\frac{15}{2}uv$.

ب) استنتاج مساحة المثلث ACD.

لدينا $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ACD}\times d(B;(Q))$ لأنّ المستوي (ACD) هو المستوي (Q).

ومنه $S_{ACD}=\frac{3V_{ABCD}}{d(B;(Q))}$ ولدينا $d(B;(Q))=\frac{|5-14-6|}{5\sqrt{3}}=\frac{15}{5\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

وعليه $S_{ACD}=\frac{3V_{ABCD}}{d(B;(Q))}=\frac{3\times\frac{15}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{2}ua$.

تمرين 32 ☹ بكالوريا رياضيات 2013

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط $A(0;0;1)$ ، $B(2;2;-1)$ ، $C(-2;-7;-7)$ و $D(-3;4;4)$

و المستوي (P) المعرف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1-2\alpha \\ z=4+\alpha+\beta \end{cases}$ ، α و β وسيطيان حقيقيان.

1. **أ -** بيّن أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب - تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي (ABC)، ثمّ اكتب معادلة ديكارتية له.

2. **أ -** اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)، ثمّ بيّن أنّ المستويين (ABC) و (P) متعامدان .

ب - بيّن أنّ تقاطع (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-7+4t\,;t\in\mathbb{R} \\ z=-7+5t \end{cases}$$

جـ - احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)، والمسافة بين النقطة D والمستوي (P)، ثمّ استنتج المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ)

3. (Q) المستوي الذي يشمل النقطة D والعمودي على كل من المستويين (ABC) و (P).

أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q).

ب - بيّن أنّ المستويات الثلاثة (ABC)، (P) و (Q) تتقاطع في نقطة واحدة H ، ثمّ عيّن إحداثيات H .

جـ - احسب بطريقة ثانية، المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ).

الحل☺ :

1. أ - إثبات أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

لدينا $\overrightarrow{AB}(2;2;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-7;-8)$ و $\dfrac{-2}{2}\neq\dfrac{-7}{2}$

إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب - التحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي (ABC)، ثمّ كتابة معادلة ديكارتية له.

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=3(2)-2(2)-2=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=3(-2)-2(-7)-8=0$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC).

معادلة المستوي (ABC)

(ABC) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AM}(x;y;z-1)$.

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ معناه $3x-2y+z-1=0$ وهي معادلة للمستوي (ABC).

2. أ - كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P)، ثمّ تبيين أنّ المستويين (ABC) و (P) متعامدان.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

لدينا $\begin{cases} x = 1+3\alpha+\beta.........(1) \\ y = 1-2\alpha.............(2) \\ z = 4+\alpha+\beta.........(3) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد $x+y=2+\alpha+\beta$ ومنه $x+y-2=\alpha+\beta$

ولدينا من (3) $z-4=\alpha+\beta$ ومنه $x+y-2=z-4$ وعليه $x+y-z+2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

تبيين أنّ المستويين (ABC) و (P) متعامدان.

$\vec{n}(3;-2;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و $\vec{n'}(1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P).

$\vec{n}.\vec{n'}=3(1)-2(1)-1=0$ وهذا يعني $\vec{n}$ يعامد $\vec{n'}$ ومنه (ABC) و (P) متعامدان.

ب ـ تبيين أنّ تقاطع (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-7+4t;t\in\mathbb{R} \\ z=-7+5t \end{cases}$$

بالتعويض في معادلة (ABC) و (P) نجد:

$3(-2+t)-2(-7+4t)+(-7+5t)-1=0$ ومنه (Δ) محتوى في المستوي (ABC).

و $(-2+t)+(-7+4t)-(-7+5t)+2=0$ ومنه (Δ) محتوى في المستوي (P).

وعليه تقاطع (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ).

جـ ـ المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

$$d_1=\frac{|3(-3)-2(4)+4-1|}{\sqrt{14}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}.$$

المسافة بين النقطة D والمستوي (P).

$$d_2=\frac{|-3+4-4+2|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

استنتاج المسافة d_3 بين النقطة D والمستقيم (Δ).

المستويان (ABC) و (P) متعامدان ومنه حسب نظرية فيتاغورث $d_3^2=d_1^2+d_2^2$

ومنه $d_3=\sqrt{d_1^2+d_2^2}$ وعليه $d_3=\sqrt{\frac{43}{3}}$.

.3 (Q) المستوي الذي يشمل النقطة D والعمودي على كل من المستويين (ABC) و (P).

أ ـ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q).

(ABC) و (P) يتقاطعان في المستقيم (Δ) وبما أن (Q) يعامد (ABC) و (P) فإنه يعامد المستقيم (Δ) أي أنّ $\vec{u}(1;4;5)$ شعاع توجيه (Δ) هو شعاع ناظمي للمستوي (Q).

معادلة المستوي (Q) من الشكل $x+4y+5z+d=0$ وبما أنّ D تنتمي للمستوي (Q)

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

فإنّ $-3+4(4)+5(4)+d=0$ ومنه $d=-33$ وعليه $(Q): x+4y+5z-33=0$.

ب ـ تبيين أنّ المستويات الثلاثة (ABC)، (P) و (Q) تتقاطع في نقطة واحدة H.

بما أنّ $(ABC)\cap(P)=(\Delta)$ فإنّ $(ABC)\cap(P)\cap(Q)=(Q)\cap(\Delta)$.

بما أنّ (Δ) يعامد (Q) فإنّ (Δ) و (Q) يتقاطعان في نقطة H.

تعيين H نقطة تقاطع (Δ) و (Q).

إحداثيات H هي حل للجملة
$$\begin{cases} x=-2+t \dots\dots\dots\dots(1) \\ y=-7+4t \dots\dots\dots\dots(2) \\ z=-7+5t \dots\dots\dots\dots(3) \\ x+4y+5z-33=0 \dots(4) \end{cases}$$

ومنه $-2+t+4(-7+4t)+5(-7+5t)-33=0$ وعليه $t=\dfrac{7}{3}$ إذن $H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{3};\dfrac{14}{3}\right)$.

جـ ـ حساب بطريقة ثانية، المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ).

المسقط العمودي لكل نقطة من (Q) على (Δ) هي النقطة H لأنّ (Δ) عمودي على (Q).

وبما أنّ D نقطة من (Q) فإنّ H هي المسقط العمودي للنقطة D على (Δ).

بالتالي $d(D;(\Delta))=DH$.

لدينا $\overrightarrow{DH}\left(\dfrac{10}{3};-\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ ومنه $DH=\sqrt{\dfrac{100}{9}+\dfrac{25}{9}+\dfrac{4}{3}}=\sqrt{\dfrac{129}{9}}=\sqrt{\dfrac{43}{3}}$.

تمرين 33☹ بكالوريا تقني رياضي 2009

1– نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط:

$A(1;1;2)$ ، $B(-1;0;-2)$ ، $C(-1;0;-6)$

ـ بيّن أنّ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق: $MA^2-MB^2=1$ هي مستو عمودي على المستقيم (AB) نرمز له بالرمز (P) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

2– لتكن S مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تُحقق: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

ـ بيّن أنّ S هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها R.

3– G نقطة من الفضاء معرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

أ ـ عيّن إحداثيات النقطة G ثمّ تأكد أنّها تنتمي إلى S.

ب ـ أُكتب معادلة المستوي (Q) الذي يمسّ سطح الكرة S في النقطة G.

الحل☺**:**

تبيين أنّ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق: $MA^2-MB^2=1$ هي مستو عمودي على المستقيم (AB) نرمز له بالرمز (P) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

$AM=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}$ ومنه $AM^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2$

$BM=\sqrt{(x+1)^2+y^2+(z+2)^2}$ ومنه $BM^2=(x+1)^2+y^2+(z+2)^2$

$MA^2 - MB^2 = 1$ تكافئ $\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2\right]-\left[(x+1)^2+y^2+(z+2)^2\right]=1$

وتكافئ $-4x-2y-8z=0$ أي $-2x-y-4z=0$ وهي معادلة مستو شعاعه الناظم $\overrightarrow{AB}(-2;-1;-4)$ ومنه المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB).

2– لتكن S مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

ـ إثبات أنّ S هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها R.

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$ معناه $(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1-6=0$

ومنه $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ إذن S هي سطح كره مركزها $\omega(1;1;1)$

وطول نصف قطرها $R=3$.

3– G نقطة من الفضاء معرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

أ ـ تعيين إحداثيات النقطة G ثمّ التأكد أنّها تنتمي إلى S.

G هي مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$ وعليه $x_G=\dfrac{x_A-x_B+x_C}{1-1+1}=1$

$y_G=\dfrac{y_A-y_B+y_C}{1-1+1}=1$ ، $z_G=\dfrac{z_A-z_B+z_C}{1-1+1}=-2$ إذن $G(1;1;-2)$.

التأكد أنّ G تنتمي إلى S.

يمكن التأكد بسهولة أنّ G تنتمي إلى S بتعويض إحداثيات G في معادلة S نجد:

$(1-1)^2+(1-1)^2+(-2-1)^2=9$ وهذا يعني أنّ G تنتمي إلى S.

ب ـ كتابة معادلة المستوي (Q) الذي يمسّ سطح الكرة S في النقطة G.

المستوي (Q) ناظمه الشعاع $\overrightarrow{\omega G}$ ويشمل النقطة G. ولدينا $\overrightarrow{\omega G}(0.0.-3)$.

ومنه معادلة (Q) من الشكل $-3z+d=0$ وبما أنّ (Q) يشمل G فإنّ $-3(-2)+d=0$ ومنه $d=-6$

وعليه $-3z-6=0$ ومنه $z+2=0$ هي معادلة للمستوي (Q).

<u>تمرين 34☹ (بكالوريا تقني رياضي 2012)</u>

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، (P) المستوي الذي

$-4x-3y+1=0$ معادلة ديكارتية له و (D) المستقيم الذي $(k\in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x=k \\ y=\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}k \\ z=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}k \end{cases}$ تمثيل وسيطي له

1. تحقق أنّ المستقيم (D) محتوى في المستوي (P).
2. أ ـ أُكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1;1;0)$ و $\vec{u}(4;1;3)$ شعاع توجيه له.

   ب ـ عيّن إحداثيات تقاطع المستقيمين (D) و (Δ).
3. بيّن أنّ: $3x-4z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيمين (D) و (Δ).
4. $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

   أ ـ احسب المسافة بين M و كل من (P) و (Q).

aziz_mus1@hotmail.fr

ب ـ أثبت أن مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من (P) و (Q) هي إتحاد مستويين متعامدين (P_1) و (P_2) يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما.

5. عين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة الآتية:

$$\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 3x-4z-3=0 \\ x+3y+4z+2=0 \end{cases}$$

الحل☺:

1. **التحقق أنّ المستقيم (D) محتوى في المستوي (P).**

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم (D) في معادلة المستوي (P) نجد:

$-4(k)-3\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}k\right)+1=-4k-1+4k+1=0$ ومنه المستقيم (D) محتوى في المستوي (P)

2. أ ـ كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1;1;0)$ و $\vec{u}(4;1;3)$ شعاع توجيه له.

لتكن $M(x;y;z)$ من (Δ) ومنه $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}\,/\,\lambda\in\mathbb{R}$ و $\overrightarrow{AM}(x-1;y-1;z)$.

ومنه $\begin{cases} x-1=4\lambda \\ y-1=\lambda \\ z=3\lambda \end{cases};(\lambda\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases} x=1+4\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=3\lambda \end{cases};(\lambda\in\mathbb{R})$.

ب ـ تعيين إحداثيات تقاطع المستقيمين (D) و (Δ).

نحل الجملة $\begin{cases} k=1+4\lambda..............(1) \\ \frac{1}{3}-\frac{4}{3}k=1+\lambda.........(2) \\ -\frac{3}{4}+\frac{3}{4}k=3\lambda......(3) \end{cases}$

$\begin{cases} k=1+4\lambda..............(1) \\ \frac{1}{3}-\frac{4}{3}k=1+\lambda.........(2) \\ -\frac{3}{4}+\frac{3}{4}k=3\lambda......(3) \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} k=1+4\lambda..............(1) \\ 1-4k=3+3\lambda.........(2) \\ -3+3k=12\lambda......(3) \end{cases}$

نعوض k بقيمتها من (1) في (2) نجد $1-4(1+4\lambda)=3+3\lambda$ أي $-19\lambda=6$ ومنه $\lambda=-\frac{6}{19}$

بالتعويض في (1) نجد $k=1+4\left(-\frac{6}{19}\right)$ أي $k=-\frac{5}{19}$.

بتعويض قيمتي k و λ في (3) نجد: $-3+3\left(-\frac{5}{19}\right)=12\left(-\frac{6}{19}\right)$ أي $-\frac{72}{19}=-\frac{72}{19}$ محققة.

نتيجة: المستقيمان (D) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيات $\left(-\frac{5}{19};\frac{13}{19};\frac{18}{19}\right)$.

3. **إثبات أنّ:** $3x-4z-3=0$ **هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيمين (D) و (Δ).**

بما أنّ المستقيمين (D) و (Δ) متقاطعان فإنّه يوجد مستو وحيد يشملهما.

$3(k)-4\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}k\right)-3=3k+3-3k-3=0$ ومنه المستقيم (D) محتوى في المستوي (Q)

بنفس الطريقة مع المستقيم (Δ): $3(1+4\lambda)-4(3\lambda)-3=0$ ومنه المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (Q).

إذن $3x-4z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيمين (D) و (Δ).

أ ـ حساب المسافة بين M و كل من (P) و (Q).

$d(M;(P))=\frac{|-4x-3y+1|}{5}$ ، $d(M;(Q))=\frac{|3x-4z-3|}{5}$.

ب ـ إثبات أنّ مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من (P) و (Q) هي إتحاد مستويين متعامدين (P_1) و (P_2) يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما.

$d(M;(P))=d(M;(Q))$ معناه $\frac{|-4x-3y+1|}{5}=\frac{|3x-4z-3|}{5}$

وتكافئ $|-4x-3y+1|=|3x-4z-3|$ أي $-4x-3y+1=3x-4z-3$ أو

$-4x-3y+1=-(3x-4z-3)$ ومنه $-7x-3y+4z+4=0$ أو $x+3y+4z+2=0$.

إذن مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من (P) و (Q) هي إتحاد مستويين متعامدين $(P_1):-7x-3y+4z+4=0$ و $(P_2):x+3y+4z+2=0$.

5. **تعيين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة الآتية:**

$$\begin{cases}4x+3y-1=0\\3x-4z-3=0\\x+3y+4z+2=0\end{cases}$$

الجملة هي تقاطع المستويات الثلاثة (P) و (Q) و (P_2).

لدينا $(P)\cap(Q)=(D)$ لندرس تقاطع (D) والمستوي (P_2).

نحل الجملة $\begin{cases}x=k\\y=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}k\\z=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}k\\x+3y+4z+2=0\end{cases}$ وعليه $k+3\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}k\right)+4\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}k\right)+2=0$

أي $k-4k+3k+1-3+2=0$ أي $0=0$ ومنه (D) محتوى في (P_2).

ومنه مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة هي المستقيم (D).

تمرين 34☹

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط: $A(-2;1;2)$ ، $B(2;3;0)$ و $C(-2;0;1)$

لتكن (P) مجموعة النقط M بحيث $AM=BM$

1− بيّن أنّ (P) هو المستوي الذي معادلته الديكارتية: $2x+y-z-1=0$

2- حدد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المار من C والموازي للمستوي (P) .

3- أ ـ حدد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من C والعمودي على المستوي (P).

ب ـ احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) والمسافة بين النقطة A والمستوي (P)

4- أ ـ حدد معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي قطرها $[AB]$.

ب ـ حدد تقاطع المستوي (P) وسطح الكرة (S).

الحل☺

1- **تبيين أنّ (P) هو المستوي الذي معادلته الديكارتية:** $2x+y-z-1=0$

(P) هو مجموعة النقط M بحيث $AM=BM$ ومنه (P) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

لتكن I منتصف $[AB]$ ومنه $I(0;2;1)$ ولدينا $2x_I+y_I-z_I-1=2(0)+2-1-1=0$

و $\overrightarrow{AB}(4;2;-2)$ إذن $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي للمستوي ذو المعادلة $2x+y-z-1=0$.

المستوي ذو المعادلة $2x+y-z-1=0$ شعاعه الناظمي $\overrightarrow{AB}$ وهو يشمل I منتصف $[AB]$ إذن هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ أي هو المستوي (P).

طريقة ثانية:

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$AM=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}$ و $BM=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+z^2}$

$AM=BM$ تعني $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(x-2)^2+(y-3)^2+z^2$

بعد التبسيط نجد

$AM=BM$ معناه $8x+4y-4z-4=0$ أي $2x+y-z-1=0$ وهي معادلة ديكارتية لـ(P).

2- **تحديد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المار من C والموازي للمستوي (P).**

المستوي (Q) يوازي (P) إذن معادلة المستوي (Q) من الشكل $2x+y-z+d=0$ وبما أنّ النقطة C تنتمي للمستوي (Q) فإنّ $2(-2)+0-1+d=0$ ومنه $d=5$ وعليه $2x+y-z+5=0$ معادلة للمستوي (Q)

3- أ ـ **تحديد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من C والعمودي على المستوي (P).**

(D) عمودي على (P) ومنه $\vec{u}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي لـ(P) يكون شعاع توجيه للمستقيم (D).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(D)$ معناه $\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$ حيث t عدد حقيقي و $\overrightarrow{CM}(x+2;y;z-1)$ و $t\vec{u}(2t;t;-t)$.

$\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$ معناه $\begin{cases}x+2=2t\\ y=t\\ z-1=-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=-2+2t\\ y=t\\ z=1-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

ب ـ حساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D).

aziz_mus1@hotmail.fr

لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) ومنه $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$.

لدينا $H\in(D)$ ومنه $H(-2+2t;t;1-t)$ ومنه $\overrightarrow{AH}(2t;t-1;-1-t)$.

$\vec{u}.\overrightarrow{AH}=0$ معناه $2(2t)+(t-1)+t+1=0$ ومنه $6t=0$ أي $t=0$ إذن $H(-2;0;1)$ وبالتالي

H منطبقة على C أي C هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D).

ومنه $d(A;(D))=AC$.

$\overrightarrow{AC}(0;-1;-1)$ إذن $AC=\sqrt{2}$ وعليه $d(A;(D))=\sqrt{2}$.

المسافة بين النقطة A والمستوي (P).

$$d(A;(P))=\frac{|2(-2)+1-2-1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\sqrt{6}.$$

4– أ **- تحيد معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي قطرها $[AB]$.**

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(S)$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ بحيث $\overrightarrow{MA}(-2-x;1-y;2-z)$ و $\overrightarrow{MB}(2-x;3-y;-z)$

ومنه $(-2-x)(2-x)+(1-y)(3-y)+(2-z)(-z)=0$

بالتالي المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) هي: $x^2+y^2+z^2-4y-2z-1=0$

وتكافئ $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$.

ب - تحديد تقاطع المستوي (P) وسطح الكرة (S).

مركز السطح (S) هو $\omega(0;2;1)$ ونصف قطره هو $R=\sqrt{6}$.

$$d(\omega;(P))=\frac{|2(0)+2-1-1|}{\sqrt{6}}=0.$$

بما أنّ $d(\omega;(P))=0$ فإنّ المستوي (P) وسطح الكرة (S) يتقاطعان وفق الدائرة الكبيرة في الكرة (S).

أي الدائرة التي مركزها $\omega(0;2;1)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

<u>تمرين 36</u>☹

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط: $A(2;1;-1)$، $B(1;-1;3)$،

$C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$ ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$.

1) **أ)** أحسب إحداثيات النقطة I.

ب) ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $2x+4y-8z+5=0$ ؛ بين أن (P) هو المستوي المحوري لـ $[AB]$.

2) أُكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له.

3) **أ)** جد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ).

ب) بيّن أنّ (Δ) و (AB) من نفس المستوي، ثمّ استنتج أنّ المثلث IEC قائم.

4) **أ)** بيّن أنّ المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE).

ب) احسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

<u>الحل</u>☺

1) أ) **إحداثيات النقطة I.**

$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3}{2}$ ، $y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=0$ ، $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=1$ إذن $I\left(\frac{3}{2};0;1\right)$.

ب) تبيين أنّ (P) هو المستوي المحوري لـ $[AB]$.

لدينا $\vec{n}(2;4;-8)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) ولدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ ومنه $\vec{n}=-2\overrightarrow{AB}$ بالتالي الشعاعان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا وعليه $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P).

ولدينا $2x_I+4y_I-8z_I+5=2\left(\frac{3}{2}\right)+4(0)-8(1)+5=0$ إذن I تنتمي للمستوي (P).

ومنه (P) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

2) **كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له.**

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(\Delta)$ معناه يوجد عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$ و $\overrightarrow{CM}\left(x+\frac{3}{2};y+2;z-1\right)$.

$\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$ معناه $\begin{cases}x+\frac{3}{2}=t\\ y+2=2t\ \ (t\in\mathbb{R})\\ z-1=-4t\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=-\frac{3}{2}+t\\ y=-2+2t\ \ (t\in\mathbb{R})\\ z=1-4t\end{cases}$.

3) أ) **إيجاد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ).**

نحل الجملة $\begin{cases}x=-\frac{3}{2}+t\\ y=-2+2t\\ z=1-4t\\ 2x+4y-8z+5=0\end{cases}$ وعليه $2\left(-\frac{3}{2}+t\right)+4(-2+2t)-8(1-4t)+5=0$

أي $-3+2t-8+8t-8+32t+5=0$ ومنه $-14+42t=0$ وعليه $t=\frac{1}{3}$.

إذن $x=-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{7}{6}$ ، $y=-2+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$ ، $z=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}$ أي $E\left(-\frac{7}{6};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

ب) تبيين أنّ (Δ) و (AB) من نفس المستوي.

لدينا $\vec{u}(1;2;-4)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB).

و $\overrightarrow{AB}=-\vec{u}$ ومنه الشعاعان $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا إذن المستقيمان (Δ) و (AB) متوازيان وبالتالي فهما من نفس المستوي.

استنتاج أنّ المثلث IEC قائم.

(AB) و (Δ) متوازيان ومنه (Δ) عمودي على (P) في E وبما أنّ $C\in(\Delta)$

فإنّ (CE) عمودي على (P) في E وبما أنّ I تنتمي للمستوي (P) فهذا يعني أنّ المثلث IEC قائم في E.

4) أ) **تبيين أنّ المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE).**

aziz_mus1@hotmail.fr

لدينا $\overrightarrow{ID}(2;-3;-1)$ و $\overrightarrow{IE}\left(-\frac{8}{3};\frac{-4}{3};\frac{-4}{3}\right)$ و $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$.

ومنه $\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB}=2(-1)-3(-2)-1(4)=0$ و $\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IE}=2\left(-\frac{8}{3}\right)-3\left(-\frac{4}{3}\right)-1\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{16}{3}+\frac{12}{3}+\frac{4}{3}=0$.

اذن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE).

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

لدينا (ID) عمودي على (AB) إذن فهو عمودي على (CE) لأنّ (CE) هو المستقيم (Δ) و (Δ) يوازي (AB)

ومنه (ID) عمودي على كل من (CE) و (IE) وبالتالي (ID) يعامد المستوي (ICE)

فتكون النقطة I هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ICE).

وعليه حجم رباعي الوجوه $DIEC$ يعطى كما يلي $V=\frac{1}{3}S_{ICE}\times ID$ حيث S_{ICE} هي مساحة المثلث ICE.

$S_{ICE}=\frac{IE.CE}{2}=\frac{\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{3}}{2}=\frac{2\sqrt{14}}{3}$ و $ID=\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$.

وعليه $V=\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{14}}{3}\times\sqrt{14}=\frac{28}{9}uv$.

<u>تمرين 37☹ (بكالوريا تقني رياضي 2012)</u>

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، النقط:

$A(3;0;0)$ ، $B(0;4;0)$ ، $C(2;2;2)$.

1. بيّن أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية وأنّ الشعاع $\vec{n}(4;3;-1)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.
2. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقط A ، B و C.
3. أ - بيّن أنّ: $6x-8y+7=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P') مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $AM=BM$.

ب - بيّن أنّ: $2x-4y-4z+3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $(P")$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $AM=CM$.

جـ - بيّن أنّ (P') و $(P")$ يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

4. احسب إحداثيات النقطة ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

<u>الحل:</u>

1. **تبيين أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;4;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;2;2)$ و $\frac{-1}{-3}\neq\frac{2}{4}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

وبالتالي النقط A ، B و C ليست في استقامية.

إثبات أنّ الشعاع $\vec{n}(4;3;-1)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=4(-3)+3(4)-1(0)=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=4(-1)+3(2)-1(2)=0$.

ومنه $\vec{n}(4;3;-1)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

2. **كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقط A ، B و C.**

بما أنّ $\vec{n}(4;3;-1)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ فإنه شعاع ناظمي للمستوي (P)

ومنه معادلة المستوي (P) من الشكل $4x+3y-z+d=0$ وبما أنّ A تنتمي للمستوي (P) فإنّ
$4(3)+d=0$ ومنه $d=-12$ وعليه $4x+3y-z-12=0$ هي معادلة للمستوي (P).

3. أ ـ **تبيين أنّ:** $6x-8y+7=0$ **معادلة ديكارتية للمستوي** (P') **مجموعة النقط** $M(x;y;z)$ **من الفضاء حيث:** $AM=BM$ **.**

المستوي (P') هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

(P') شعاعه الناظم $\overrightarrow{AB}$ وهو يشمل النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (P') ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}=0$ مع $\overrightarrow{IM}\left(x-\frac{3}{2};y-2;z\right)$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}=0$ معناه $-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+4(y-2)+0(z)=0$ ومنه $-3x+4y-\frac{7}{2}=0$

أي $6x-8y+7=0$ وهي معادلة للمستوي (P').

ب ـ **تبيين أنّ:** $2x-4y-4z+3=0$ **معادلة ديكارتية للمستوي** $(P")$ **مجموعة النقط** $M(x;y;z)$ **من الفضاء حيث:** $AM=CM$ **.**

$(P")$ هو المستوي المحوري للقطعة $[AC]$. نبيّن أنّ $2x-4y-4z+3=0$ هي معادلة $(P")$.

لتكن I' منتصف $[AC]$ ومنه $I'\left(\frac{5}{2};1;1\right)$.

$(P")$ ناظمه الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ويشمل النقطة I'. ومنه من أجل كل $M(x;y;z)$ من $(P")$ لدينا $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{I'M}=0$

ومنه $-1\left(x-\frac{5}{2}\right)+2(y-1)+2(z-1)=0$ أي $-x+2y+2z-\frac{3}{2}=0$ وهذه الأخيرة تكافئ

$2x-4y-4z+3=0$ وهي معادلة للمستوي $(P")$.

جـ ـ **تبيين أنّ** (P') **و** $(P")$ **يتقاطعان وفق مستقيم** (Δ) **يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.**

(P') ناظمه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ و $(P")$ ناظمه الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ولدينا الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

وبالتالي (P') و $(P")$ يتقاطعان وفق مستقيم (Δ).

تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)**.**

إذا كانت $M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) فإنّ إحداثياتها هي حلول الجملة $\begin{cases}6x-8y+7=0............(1)\\2x-4y-4z+3=0.....(2)\end{cases}$.

من (1) نجد $x=\frac{4}{3}y-\frac{7}{6}$ نعوض في (2) نجد $2\left(\frac{4}{3}y-\frac{7}{6}\right)-4y-4z+3=0$ ومنه $z=-\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}$

وبوضع $y=3t$ نجد $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=4t-\frac{7}{6}\\y=3t\\z=-t+\frac{1}{6}\end{cases}$.

4. **حساب إحداثيات النقطة** ω **مركز الدائرة المحيطة بالمثلث** ABC **.**

مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هي نقطة تقاطع محاوره أي هي نقطة تقاطع (Δ) و (P).

تقاطع (Δ) و (P) هو حل الجملة $\begin{cases} x = 4t - \dfrac{7}{6} \\ y = 3t \\ z = -t + \dfrac{1}{6} \\ 4x + 3y - z - 12 = 0 \end{cases}$

وعليه $4\left(4t - \dfrac{7}{6}\right) + 3(3t) - \left(-t + \dfrac{1}{6}\right) - 12 = 0$ ومنه $16t - \dfrac{28}{6} + 9t + t - \dfrac{1}{6} - 12 = 0$ أي $26t = \dfrac{101}{6}$

أي $t = \dfrac{101}{156}$ إذن $\begin{cases} x = 4\left(\dfrac{101}{156}\right) - \dfrac{7}{6} \\ y = 3\left(\dfrac{101}{156}\right) \\ z = -\dfrac{101}{156} + \dfrac{1}{6} \end{cases}$ وعليه $\omega\left(\dfrac{37}{26}; \dfrac{101}{52}; -\dfrac{25}{52}\right)$